FGV EPGE
ESCOLA BRASILEIRA DE ECONOMIA E FINANÇAS

Notas de Aula para o Mestrado e Doutorado em Economia

Política Econômica, Monetária e Fiscal

FGV/EPGE — Fernando Veloso

Vitor Wilher[1]

Versão preliminar — compilada ao longo do curso (a partir de Outubro de 2026). Baseada nas notas de aula do professor, em McCallum (1996) e nos artigos originais da bibliografia.

[1]Bacharel e Mestre em Economia pela UFF, Candidato ao PhD em Economia pela EPGE/FGV. É Especialista em Ciências de Dados e Inteligência Artificial Generativa pela PUC-Rio. Atualmente, exerce a função de Data Tech Lead na Análise Macro (http://analisemacro.com.br). Saiba mais em https://github.com/vitorwilher.

Índice

1 Introdução **4**
- 1.1 Sobre o que é o curso . . . 4
- 1.2 Programa . . . 4
- 1.3 Como ler estas notas . . . 5
  - 1.3.1 Uma palavra sobre os dados e o software . . . 5
- 1.4 Referências . . . 6

2 Expectativas Racionais e Análise Dinâmica **7**
- 2.1 O modelo básico . . . 7
- 2.2 Preços flexíveis e a dicotomia clássica . . . 8
  - 2.2.1 O bloco real . . . 8
  - 2.2.2 O bloco monetário . . . 9
- 2.3 Como modelar expectativas . . . 10
  - 2.3.1 Expectativas estáticas . . . 10
  - 2.3.2 Expectativas adaptativas . . . 10
  - 2.3.3 Expectativas racionais . . . 10
- 2.4 Solução do modelo com expectativas racionais . . . 12
  - 2.4.1 Solução por substituição recursiva . . . 12
  - 2.4.2 Uma regra de política e o método dos coeficientes indeterminados . . . 13
- 2.5 Propriedades da solução e a crítica de Lucas . . . 14
  - 2.5.1 Sinais e dinâmica . . . 14
  - 2.5.2 A crítica de Lucas . . . 15
  - 2.5.3 Choques reais e o câmbio real . . . 15
- 2.6 Mais realismo na especificação . . . 15
  - 2.6.1 Passeios aleatórios e crescimento monetário persistente . . . 16
- 2.7 O modelo com preços rígidos . . . 17
  - 2.7.1 A regra de preços . . . 17
  - 2.7.2 As hipóteses simplificadoras . . . 17
  - 2.7.3 O preço de preços flexíveis e o preço pré-fixado . . . 18
  - 2.7.4 A solução para o câmbio . . . 18
  - 2.7.5 *Overshooting* . . . 19
  - 2.7.6 A moeda tem efeito real . . . 19
- 2.8 Laboratório computacional em R e Python . . . 20
  - 2.8.1 (a) Coeficientes indeterminados como sistema linear . . . 20
  - 2.8.2 (b) Expectativas racionais *versus* adaptativas . . . 21
  - 2.8.3 (c) A crítica de Lucas em uma regressão . . . 23
  - 2.8.4 (d) As regularidades 1 e 2 nos dados . . . 25
  - 2.8.5 (e) *Overshooting* e efeito real da moeda . . . 26
- 2.9 Exercícios . . . 28
- 2.10 Gabarito dos Exercícios . . . 28
  - 2.10.1 Exercício 1 . . . 28
  - 2.10.2 Exercício 2 . . . 29
  - 2.10.3 Exercício 3 . . . 29
  - 2.10.4 Exercício 4 . . . 30
  - 2.10.5 Exercício 5 . . . 30
  - 2.10.6 Exercício 6 . . . 30

3 Lista de Exercícios 1 — Resolução **32**
- 3.1 Exercício 1 . . . 33
- 3.2 Exercício 2 . . . 35
- 3.3 Exercício 3 . . . 36
  - 3.3.1 Item (a) . . . 37

3.3.2 Item (b) . . . 39
3.3.3 Verificação numérica . . . 42
3.4 Exercício 4 . . . 43
3.4.1 De onde vem a fórmula . . . 43
3.4.2 A intuição, em quatro passos . . . 44
3.4.3 Casos-limite . . . 45
3.5 Exercício 5 . . . 45
3.5.1 Verificação numérica . . . 48

4 Oferta e demanda agregada com expectativas racionais 50
4.1 Motivação: o choque do petróleo . . . 50
4.2 O modelo . . . 50
4.3 O modelo clássico . . . 51
4.4 O modelo keynesiano . . . 52
4.4.1 O equilíbrio . . . 53
4.4.2 A oferta agregada keynesiana . . . 55
4.5 Choques de oferta . . . 55
4.5.1 A rigidez amplia ou atenua o choque? . . . 56
4.6 A reação do Banco Central . . . 57
4.7 Extensão: indexação salarial . . . 58
4.8 Laboratório computacional em R e Python . . . 60
4.8.1 (a) Simulação e conferência da solução . . . 60
4.8.2 (b) Quando a rigidez amplia o choque . . . 60
4.8.3 (c) A política que fecha o hiato . . . 61
4.8.4 (d) Indexação ótima . . . 62
4.9 Exercícios . . . 63
4.10 Gabarito dos Exercícios . . . 63

A O método dos coeficientes indeterminados 64
A.1 Por que igualar coeficientes funciona . . . 64
A.2 As regras de expectativa . . . 65
A.3 Exemplo 1: uma equação *forward* com choque AR(1) . . . 65
A.3.1 E se a conjectura estiver errada? . . . 66
A.4 Exemplo 2: com variável defasada, duas raízes . . . 67
A.4.1 A ligação com as bolhas . . . 68
A.5 Exemplo 3: duas expectativas e a ineficácia da política . . . 68
A.6 Roteiro e erros comuns . . . 69
A.7 Verificação numérica . . . 70
A.8 Onde estudar . . . 72
A.9 Exercícios . . . 73
A.10 Gabarito . . . 73

Referências 74

1 Introdução

Estas notas acompanham a disciplina de **Política Econômica, Monetária e Fiscal** do Doutorado Profissional em Economia e Finanças da FGV/EPGE, ministrada por Fernando Veloso a partir de outubro de 2026. Elas seguem a ordem do programa e tomam as notas de aula do professor como fonte primária: a notação, a numeração das ideias e o encadeamento são os do curso, ainda que o texto seja de minha autoria e acrescente derivações, a leitura dos textos originais e implementações computacionais que as notas deixam implícitas.

> **!** Estado destas notas
>
> O programa tem **quatro blocos**. Esta versão cobre o início do primeiro, que é o material divulgado até o momento da compilação: a solução de modelos com **expectativas racionais**, desenvolvida a partir do Capítulo 8 de McCallum (1996) — o modelo de câmbio com preços flexíveis, as hipóteses de expectativas estáticas, adaptativas e racionais, a solução *forward*, o método dos coeficientes indeterminados, a primeira aparição da crítica de Lucas e o modelo com preços rígidos que gera *overshooting*. A resolução da **Lista 1** vem em seguida, confrontada com o gabarito oficial. Depois, o modelo de **oferta e demanda agregada** com salários pré-fixados da seção 10.3 de Blanchard e Fischer (1989), que deriva a curva de oferta de Lucas e discute choques de oferta, política monetária e indexação. Um apêndice trata do método dos coeficientes indeterminados. Os capítulos seguintes serão acrescentados conforme o curso avança — a estrutura do documento já está montada para recebê-los.

1.1 Sobre o que é o curso

O objetivo declarado do programa é fornecer os instrumentos para entender como a política econômica é conduzida, **com ênfase na política monetária de curto prazo**, a partir dos modelos que pesquisadores e bancos centrais efetivamente usam para medir a transmissão da política para preços e atividade.

O fio condutor é metodológico. Desde os anos 1970, um modelo macroeconômico usado para avaliar política precisa dizer **como os agentes formam expectativas**, porque o efeito de uma política depende do que os agentes esperam que ela seja no futuro. A primeira parte do curso monta essa caixa de ferramentas — resolver um modelo linear com expectativas racionais — e a usa para entender três resultados clássicos: a **crítica de Lucas** (os coeficientes de uma forma reduzida mudam quando muda a regra de política), a **curva de oferta de Lucas** (só a parte não antecipada da política mexe com o produto) e os **contratos justapostos de Taylor** (como a rigidez nominal devolve à política monetária um papel real e persistente). A segunda parte troca as equações postuladas por fundamentos microeconômicos — o modelo monetário com preços flexíveis e o **modelo Novo Keynesiano** básico de Galí (2008). A terceira usa esse modelo para discutir **regras versus discrição**, política ótima, a regra de Taylor, metas de inflação e economia aberta. A quarta aplica tudo a **tópicos recentes**: inflação e dívida pública no pós-pandemia, a política econômica do governo Trump e a agenda brasileira para o próximo quadriênio.

1.2 Programa

Tabela 1: Programa da disciplina.

Bloco	Conteúdo
1	**Modelos de referência com expectativas racionais**: solução de modelos com expectativas racionais; crítica de Lucas; curva de oferta de Lucas; contratos justapostos de Taylor
2	**Modelos DSGE**: modelo monetário com preços e salários flexíveis; modelo básico Novo Keynesiano
3	**Política monetária no modelo Novo Keynesiano**: regras *versus* discrição; política ótima; regra de Taylor; metas de inflação; economia aberta
4	**Tópicos recentes**: inflação e dívida pública no pós-pandemia; política econômica do governo Trump; política econômica brasileira no próximo quadriênio

1.3 Como ler estas notas

Cada capítulo abre com a **motivação** do problema, desenvolve a teoria com **derivações passo a passo** — inclusive as que as notas do professor e o livro apenas enunciam — e fecha com duas seções fixas:

- um **Laboratório computacional em R e Python**, que reproduz numericamente os resultados do capítulo. Cada exercício aparece primeiro em R e depois em Python, com o mesmo raciocínio e, sempre que a conta é determinística, o mesmo número. O código roda na própria compilação do PDF, de modo que os números impressos são os que o software de fato produziu;
- uma lista de **Exercícios**, no espírito das listas da disciplina, seguida de um **gabarito desenvolvido**.

As **listas oficiais** do curso ganham um capítulo próprio, com enunciado e resolução completa, logo após o capítulo cujo material cobrem.

Resultados centrais aparecem em caixa, $\boxed{\text{assim}}$. Hipóteses e convenções que não podem ser esquecidas vão em caixas de destaque. Quando um conceito de séries temporais ou de probabilidade é mobilizado — ruído branco, passeio aleatório, lei das expectativas iteradas —, uma caixa *Ferramenta* o explica no nível necessário para acompanhar a derivação.

1.3.1 Uma palavra sobre os dados e o software

O laboratório do primeiro capítulo é sobretudo de **simulação**: os modelos são lineares, e simular um modelo cuja solução foi derivada à mão é a melhor forma de verificar a solução. Onde o capítulo faz

afirmações empíricas — as três regularidades de câmbio e preços com que McCallum (1996) motiva o modelo de preços rígidos —, uso séries públicas do **FRED** (câmbio bilateral mensal e índices de preços ao consumidor da OCDE), baixadas uma vez para a pasta `dados/`, de modo que o PDF compila sem conexão.

Em R, uso apenas a base e o `ggplot2`; em Python, apenas `numpy`, `pandas` e `matplotlib`. Sistemas de coeficientes indeterminados são resolvidos **como sistemas lineares**, e não com pacotes de solução de modelos DSGE: escrever a conta deixa explícito o que esses pacotes fazem por baixo do capô.

1.4 Referências

O programa lista três manuais de base. Para o primeiro bloco, McCallum (1996) (Capítulo 8) é o texto que as notas do professor seguem, e Blanchard e Fischer (1989) é a referência de pós-graduação para modelos com expectativas racionais. Para o segundo e o terceiro blocos, Galí (2008) é o manual do modelo Novo Keynesiano, e Woodford (2003) o tratamento completo. Ao longo das aulas o curso usa também **artigos originais** — Lucas (1976), Taylor (1980), Kydland e Prescott (1977), Hall (1978), entre outros —, citados no próprio texto.

2 Expectativas Racionais e Análise Dinâmica

Até aqui, na formação de um economista, a maior parte da macroeconomia aberta é **estática comparativa**: desloca-se uma curva, compara-se o equilíbrio novo com o antigo. Este capítulo dá o passo para a **análise dinâmica**: traçar, período a período, a trajetória do câmbio, dos preços e do produto quando a economia é atingida por choques aleatórios. O passo é mais difícil por três razões que se reforçam, e que McCallum (1996) lista logo na abertura do Capítulo 8: descrever movimentos período a período é mais trabalhoso que comparar equilíbrios; movimentos realistas exigem **choques estocásticos**; e, num mundo em mudança e sujeito a choques, os agentes precisam **formar expectativas** sobre o futuro — expectativas que em geral não observamos e que, portanto, precisam de uma teoria.

A teoria adotada é a das **expectativas racionais**. O capítulo mostra o que ela diz, por que ela é a hipótese de referência e — o ponto que interessa para o resto do curso — como se **resolve** um modelo linear em que ela vale.

> **!** A ideia central do capítulo
>
> Com expectativas racionais, o valor de hoje de uma variável como o câmbio depende do que os agentes esperam da **política em todo o futuro**. Por isso não existe "efeito da moeda sobre o câmbio" independente da regra de política: o coeficiente que liga m_t a s_t depende de quão persistente a política é. Essa é a **crítica de Lucas**, e ela aparece aqui não como uma tese metodológica, mas como uma consequência de duas linhas de álgebra.

O capítulo segue a sequência das notas do professor e de McCallum (1996). A primeira parte monta o **modelo básico** de economia aberta e mostra que, com preços flexíveis, ele se dicotomiza em um bloco real e um bloco monetário. A segunda discute **como modelar expectativas** — estáticas, adaptativas e racionais — e prova as duas propriedades que definem a racionalidade. A terceira **resolve** o modelo de duas formas, por substituição recursiva e pelo método dos coeficientes indeterminados, e extrai a crítica de Lucas. A quarta torna o modelo mais **realista** — passeios aleatórios e crescimento monetário persistente — e a quinta introduz **preços rígidos**, o que gera *overshooting* do câmbio e efeitos reais da moeda.

2.1 O modelo básico

O modelo é o de McCallum (1996), Capítulos 5 a 7, agora com choques estocásticos nas funções IS e LM:

$$
\begin{aligned}
y_t &= b_0 + b_1 r_t + b_2 q_t + b_3 g_t + b_4 y_t^* + v_t, && b_1 < 0,\ b_2, b_3, b_4 > 0 && \text{(IS)} \\
m_t - p_t &= c_0 + c_1 y_t + c_2 R_t + \varepsilon_t, && c_1 > 0,\ c_2 < 0 && \text{(LM)} \\
r_t &= R_t - (p_{t+1}^e - p_t) && && \text{(juro real)} \\
q_t &= s_t - (p_t - p_t^*) && && \text{(câmbio real)} \\
R_t &= R_t^* + s_{t+1}^e - s_t && && \text{(UIP)}
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Todas as variáveis estão em **logaritmos**, exceto as taxas de juros. y_t é o produto real, r_t e R_t os juros real e nominal, q_t o câmbio real, g_t o gasto do governo, y_t^* o produto externo, m_t a moeda, p_t

o nível de preços, s_t o câmbio nominal (preço da moeda estrangeira em moeda doméstica, de modo que **aumento de s_t é depreciação**). O asterisco indica variáveis externas e o sobrescrito e, valores esperados. v_t e ε_t são choques de demanda por bens (IS) e de demanda por moeda (LM).

A IS diz que a demanda por bens domésticos cai com o juro real e sobe com o câmbio real (uma depreciação real barateia os bens domésticos), com o gasto do governo e com a renda externa. A LM é uma demanda por moeda convencional. As duas últimas equações são uma **definição** (câmbio real) e uma **condição de arbitragem** (paridade descoberta de juros), esta sem choque — uma simplificação que McCallum (1996) relaxa no Capítulo 9.

Para fechar o modelo com **preços flexíveis**, acrescenta-se

$$y_t = \bar{y}_t, \tag{2}$$

em que $\bar{y}_t$, o produto de pleno emprego, segue um processo estocástico exógeno. A Equação 2 **não** diz que estamos no longo prazo: diz que os preços se ajustam dentro do período, de modo que o produto está em pleno emprego **em cada período**.

> **i** Ferramenta — ruído branco e passeio aleatório
>
> Um processo x_t é **ruído branco** se, em cada período, é sorteado de uma mesma distribuição com média zero e variância σ_x^2, independentemente do passado: $E(x_t) = 0$, $\text{Var}(x_t) = \sigma_x^2$ e $\text{Cov}(x_t, x_{t+j}) = 0$ para $j \neq 0$. A melhor previsão de um ruído branco é sempre a sua média: $E_t x_{t+j} = 0$ para $j \geq 1$.
> Um processo é um **passeio aleatório** se suas **variações** são ruído branco: $x_t = x_{t-1} + \eta_t$. Choques a um passeio aleatório são **permanentes**: um η_t positivo eleva x_{t+j} na mesma magnitude para todo $j \geq 0$. A melhor previsão é o valor corrente: $E_t x_{t+j} = x_t$. Com uma constante, $x_t = \mu + x_{t-1} + \eta_t$, tem-se um passeio aleatório **com drift**, e $E_t x_{t+j} = x_t + j\mu$.

2.2 Preços flexíveis e a dicotomia clássica

2.2.1 O bloco real

Substituindo a UIP na definição do juro real e somando e subtraindo os preços externos:

$$\begin{aligned} r_t &= R_t^* + s_{t+1}^e - s_t - p_{t+1}^e + p_t \\ &= \underbrace{R_t^* - (p_{t+1}^{*e} - p_t^*)}_{r_t^*} + \underbrace{[s_{t+1}^e - (p_{t+1}^e - p_{t+1}^{*e})]}_{q_{t+1}^e} - \underbrace{[s_t - (p_t - p_t^*)]}_{q_t}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\boxed{r_t = r_t^* + q_{t+1}^e - q_t.} \tag{3}$$

A Equação 3 é a **paridade descoberta em termos reais**: o diferencial de juros reais é igual à depreciação real esperada. r_t^* é a taxa nominal externa (os *Fed funds*, por exemplo) menos a inflação externa: na prática, o juro real americano.

Levando a Equação 3 e a Equação 2 à IS:

$$\bar{y}_t = b_0 + b_1\left(r_t^* + q_{t+1}^e - q_t\right) + b_2 q_t + b_3 g_t + b_4 y_t^* + v_t. \tag{4}$$

Com exceção de q_t e q_{t+1}^e, a Equação 4 só contém variáveis exógenas. Ela é, portanto, uma **equação em diferenças estocástica** que determina sozinha a trajetória do câmbio real. Não aparece nela nenhuma variável monetária — m_t, p_t ou s_t. Com preços flexíveis, as variáveis reais são determinadas independentemente das nominais: é a **dicotomia clássica**. Do ponto de vista do bloco monetário, q_t é exógeno.

O termo "estocástica" indica que a equação envolve incerteza. "Em diferenças" indica tempo discreto: as equações diferenciais são a contrapartida em tempo contínuo. Se q_{t+1}^e não aparecesse, bastaria isolar q_t e escrevê-lo em função de $\bar{y}_t$, g_t, y_t^* e v_t. A dificuldade é que o câmbio real de hoje depende do que se espera para o câmbio real de amanhã, o que é a natureza da macroeconomia moderna: dinâmica e com incerteza.

2.2.2 O bloco monetário

Levando a UIP e a Equação 2 à LM, e usando a definição do câmbio real para eliminar $p_t = s_t + p_t^* - q_t$:

$$m_t - \left(s_t + p_t^* - q_t\right) = c_0 + c_1\bar{y}_t + c_2\left(R_t^* + s_{t+1}^e - s_t\right) + \varepsilon_t.$$

Juntando todas as variáveis tratadas como exógenas no bloco monetário num único choque composto,

$$u_t \equiv p_t^* - q_t + c_1\bar{y}_t + c_2 R_t^* + \varepsilon_t, \tag{5}$$

chega-se a

$$\boxed{m_t - s_t = c_0 + c_2\left(s_{t+1}^e - s_t\right) + u_t.} \tag{6}$$

A Equação 6 tem uma única variável endógena, s_t, que depende da política monetária (m_t), das expectativas sobre o próprio câmbio e do choque composto. Ela é a mesma equação da **demanda por moeda de Cagan** (Cagan 1956), com s_t no lugar de p_t: com preços flexíveis e câmbio real exógeno, o câmbio nominal é o preço da moeda doméstica em termos de moeda estrangeira e se comporta como o nível de preços de uma economia fechada.

O modelo ainda não está completo por duas razões: falta dizer **como m_t é gerado** — a regra de política — e falta dizer **como se forma s_{t+1}^e**. Sem a segunda, o modelo não pode ser resolvido nem estimado: s_t e m_t são observáveis, mas s_{t+1}^e não é.

2.3 Como modelar expectativas

2.3.1 Expectativas estáticas

A hipótese mais simples é que os agentes esperam que o valor observado mais recente se mantenha: $s^e_{t+1} = s_t$. Como teoria geral, ela é ruim — numa inflação alta, seria tolo esperar que o nível de preços do próximo período seja igual ao de hoje, e a hipótese ignora qualquer informação sobre a política. Ironicamente, para o câmbio ela não funciona mal, mas por acaso: o câmbio é próximo de um passeio aleatório, e para um passeio aleatório o valor corrente **é** a melhor previsão.

2.3.2 Expectativas adaptativas

Uma generalização é supor que a expectativa é uma **defasagem distribuída** dos valores passados, $x^e_{t+1} = \lambda_0 x_t + \lambda_1 x_{t-1} + ...$, com pesos que somam um. O caso mais importante tem pesos geometricamente decrescentes, $\lambda_j = \lambda(1-\lambda)^j$ com $0 < \lambda \leq 1$:

$$x^e_{t+1} = \lambda x_t + \lambda(1-\lambda)x_{t-1} + \lambda(1-\lambda)^2 x_{t-2} + \cdots \tag{7}$$

Subtraindo a mesma expressão defasada um período, multiplicada por $(1-\lambda)$, os termos passados se cancelam e sobra a forma de **correção de erros**:

$$x^e_{t+1} - x^e_t = \lambda\left(x_t - x^e_t\right). \tag{8}$$

A revisão da expectativa é proporcional ao último erro de previsão. A equivalência entre as duas formas foi vista como uma virtude, e as **expectativas adaptativas** foram a hipótese padrão até o fim dos anos 1960. Na aula, o professor lembrou o que as derrubou na década seguinte: o fim do sistema de Bretton Woods e do padrão-ouro, em 1971, e os dois choques do petróleo, de 1973 e 1979. O regime monetário internacional mudou e vieram choques sem precedente. Projetar o futuro a partir do passado deixou de funcionar, e os modelos com expectativas adaptativas erraram feio.

O problema é que qualquer regra fixa desse tipo pode errar **sistematicamente**. Numa aceleração inflacionária, com $x_t > x_{t-1}$ em todo período, a previsão adaptativa fica abaixo do realizado período após período (o laboratório, item (b), mostra isso). Pior: **qualquer** fórmula com coeficientes fixos $\lambda_0, \lambda_1, ...$ é batida por alguma trajetória — basta que $x_t = \delta + \lambda_0 x_{t-1} + \lambda_1 x_{t-2} + \cdots$ para que o erro seja sempre δ. Agentes que pagam caro pelos erros não repetiriam o mesmo erro indefinidamente.

2.3.3 Expectativas racionais

A conclusão é que a ausência de erros sistemáticos não pode ser representada por uma **fórmula**, mas por uma **condição**. A hipótese de Muth (1961) é que a expectativa subjetiva dos agentes coincide com a expectativa matemática condicional à informação disponível:

$$\boxed{x^e_{t+j} = E\left(x_{t+j} \mid \Omega_t\right) \equiv E_t x_{t+j},} \tag{9}$$

em que Ω_t é o conjunto de informação dos agentes em t. A pergunta natural é: de onde vem a distribuição "verdadeira" de x_{t+1}? A resposta do economista é que, ao construir o modelo, ele já adotou uma visão de como x_t é gerado. A única forma coerente de proceder é usar **a distribuição implicada pelo próprio modelo**. Se x_{t+1} é exógeno, a expectativa usa a distribuição exógena; se é endógeno, usa as equações do modelo.

A hipótese tem duas implicações, e elas são exatamente a formalização de "não cometer erros sistemáticos".

O erro de previsão tem média zero. Pela lei das expectativas iteradas,

$$E\left(x_{t+1} - x_{t+1}^e\right) = E(x_{t+1}) - E\left[E(x_{t+1} \mid \Omega_t)\right] = E(x_{t+1}) - E(x_{t+1}) = 0. \tag{10}$$

O erro é não correlacionado com qualquer informação disponível. Seja $z_t \in \Omega_t$. Como o erro tem média zero, sua covariância com z_t é a média do produto:

$$\begin{aligned} E\left[(x_{t+1} - x_{t+1}^e) z_t\right] &= E(x_{t+1} z_t) - E\left[E(x_{t+1} \mid \Omega_t)\, z_t\right] \\ &= E(x_{t+1} z_t) - E\left[E(x_{t+1} z_t \mid \Omega_t)\right] = 0, \end{aligned} \tag{11}$$

em que a segunda igualdade usa que z_t é conhecido em t e pode entrar na expectativa condicional, e a terceira, de novo, a lei das expectativas iteradas. O erro pode ser grande, mas não é **previsível** com nada que os agentes sabiam quando previram.

> **Ferramenta — a lei das expectativas iteradas**
>
> Para duas variáveis X e Y com densidade conjunta $f(x, y)$, a média da média condicional é a média incondicional, $E[E(Y \mid X)] = E(Y)$. A prova, do Apêndice de McCallum (1996), é uma troca na ordem de integração:
>
> $$E\left[\int y f(y \mid x)\, dy\right] = \int\!\!\int y \frac{f(x,y)}{f(x)}\, dy\, f(x)\, dx = \int y \left[\int f(x,y)\, dx\right] dy = \int y f(y)\, dy.$$
>
> Em séries temporais ela aparece na forma $E_t\left[E_{t+1} x_{t+2}\right] = E_t x_{t+2}$: a previsão de hoje sobre a previsão que farei amanhã é a minha previsão de hoje. Se eu esperasse revisar minha previsão para cima, já deveria tê-la revisado. É essa propriedade que permite "empurrar" o operador E_t através das expectativas futuras na solução *forward*.

Dois cuidados. Primeiro, as provas mostram que o erro é **não correlacionado** com a informação disponível, não que é **independente** dela — as duas coisas coincidem se as variáveis forem normais. Segundo, toda a análise vale para **modelos lineares**: em modelos não lineares a média condicional deixa de ser a previsão relevante, e a análise fica muito mais difícil. A hipótese, proposta por Muth (1961), só foi absorvida pela macroeconomia no início dos anos 1970, com os trabalhos de Lucas (Lucas 1972, 1976) e de Sargent e Wallace (1975).

2.4 Solução do modelo com expectativas racionais

Com expectativas racionais e $\alpha \equiv c_2 < 0$, a Equação 6 fica (a troca de c_2 por α é de McCallum (1996), e o professor a manteve para que notas e livro coincidam; α mede quanto a demanda por moeda reage ao juro)

$$m_t - s_t = c_0 + \alpha\left(E_t s_{t+1} - s_t\right) + u_t. \tag{12}$$

Supõe-se que Ω_t contém os valores correntes e passados de m_t e s_t. Como os agentes conhecem o modelo, eles também inferem os valores correntes e passados de u_t a partir da Equação 12. E, por ora, u_t é ruído branco: $E_t u_{t+1} = 0$.

2.4.1 Solução por substituição recursiva

Isolando s_t:

$$s_t = \frac{m_t - c_0 - \alpha E_t s_{t+1} - u_t}{1-\alpha}. \tag{13}$$

Isto ainda não é uma solução, porque $E_t s_{t+1}$ é endógeno. Mas a mesma equação vale um período à frente; aplicando E_t e usando a lei das expectativas iteradas e $E_t u_{t+1} = 0$,

$$E_t s_{t+1} = \frac{E_t m_{t+1} - c_0 - \alpha E_t s_{t+2}}{1-\alpha}.$$

Defina $\theta \equiv \alpha/(\alpha-1)$. Como $\alpha < 0$, tem-se $0 < \theta < 1$. Substituindo para a frente J vezes:

$$s_t = -\frac{u_t}{1-\alpha} + \frac{1}{1-\alpha}\sum_{j=0}^{J-1}\theta^j\left(E_t m_{t+j} - c_0\right) + \theta^J E_t s_{t+J}.$$

Se o último termo vai a zero quando $J \to \infty$, e usando $\sum_j \theta^j = 1/(1-\theta) = 1-\alpha$, a constante se simplifica para $-c_0$ e

$$\boxed{s_t = -c_0 - \frac{u_t}{1-\alpha} + \frac{1}{1-\alpha}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)^j E_t m_{t+j}.} \tag{14}$$

Esta é a eq. (11) das notas do professor. A mensagem é a mais importante do capítulo: **o câmbio de hoje depende de toda a trajetória esperada da moeda**, com pesos geometricamente decrescentes. As expectativas sobre a política futura funcionam como **âncora** do câmbio. Para resolver o modelo, portanto, é preciso especificar o **processo** que gera m_t — a regra de política.

> ⚠ A condição terminal e as bolhas
>
> A Equação 14 exige que $\theta^J E_t s_{t+J} \to 0$. Ela exclui as soluções com **bolhas**: se s_t^F é a solução da Equação 14, qualquer $s_t = s_t^F + b_t$ com $E_t b_{t+1} = \theta^{-1} b_t$ também satisfaz a Equação 12. Como $\theta^{-1} > 1$, a bolha cresce explosivamente em valor esperado, sem relação com fundamentos.

A solução de **fundamentos** é a que a literatura adota — McCallum (1983) a justifica como a solução de **estado mínimo** (*minimal state variable*), e Blanchard e Kahn (1980) dão as condições gerais para que ela seja única entre as soluções não explosivas. O método dos coeficientes indeterminados, a seguir, seleciona automaticamente essa solução.

2.4.2 Uma regra de política e o método dos coeficientes indeterminados

Suponha que a moeda siga

$$m_t = \mu_0 + \mu_1 m_{t-1} + e_t, \qquad 0 \leq \mu_1 \leq 1, \tag{15}$$

com e_t ruído branco: e_t é o componente não sistemático da política e $\mu_0 + \mu_1 m_{t-1}$, o sistemático. Então $E_t m_{t+1} = \mu_0 + \mu_1 m_t$, $E_t m_{t+2} = \mu_0 + \mu_1(\mu_0 + \mu_1 m_t)$, e assim por diante: em princípio, basta calcular todas as previsões e somá-las na Equação 14. Há, porém, um caminho muito mais curto.

Combinando as Equações 12 e 15:

$$c_0 + \alpha E_t s_{t+1} + (1-\alpha) s_t + u_t = \mu_0 + \mu_1 m_{t-1} + e_t. \tag{16}$$

Primeiro passo: conjecturar a forma da solução. A Equação 16 mostra s_t dependendo de m_{t-1}, u_t, e_t e $E_t s_{t+1}$. Esta última depende de $E_t m_{t+1}$ — que depende só de m_t, isto é, de m_{t-1} e e_t — e de $E_t s_{t+2}$, que pelo mesmo raciocínio não traz variáveis novas. Logo, as **variáveis de estado** são m_{t-1}, u_t e e_t, e, como o modelo é linear, conjectura-se

$$s_t = \phi_0 + \phi_1 m_{t-1} + \phi_2 u_t + \phi_3 e_t. \tag{17}$$

Segundo passo: calcular a expectativa implicada pela conjectura. Se a Equação 17 vale em todo período, $s_{t+1} = \phi_0 + \phi_1 m_t + \phi_2 u_{t+1} + \phi_3 e_{t+1}$ e, como $E_t u_{t+1} = E_t e_{t+1} = 0$,

$$E_t s_{t+1} = \phi_0 + \phi_1 m_t = \phi_0 + \phi_1 \left(\mu_0 + \mu_1 m_{t-1} + e_t\right). \tag{18}$$

Terceiro passo: substituir e igualar coeficientes. Levando as Equações 17 e 18 à Equação 16:

$$\begin{aligned} &[c_0 + \alpha\phi_0 + \alpha\phi_1\mu_0 + (1-\alpha)\phi_0] + [\alpha\phi_1\mu_1 + (1-\alpha)\phi_1]\, m_{t-1} \\ &\quad + [\alpha\phi_1 + (1-\alpha)\phi_3]\, e_t + [(1-\alpha)\phi_2 + 1]\, u_t = \mu_0 + \mu_1 m_{t-1} + e_t. \end{aligned}$$

Para que a conjectura seja uma solução, a igualdade tem de valer **para quaisquer valores** de m_{t-1}, e_t e u_t. Isso só acontece se os coeficientes de cada variável forem iguais dos dois lados:

$$\begin{aligned} c_0 + \alpha\phi_0 + \alpha\phi_1\mu_0 + (1-\alpha)\phi_0 &= \mu_0, \\ \alpha\phi_1\mu_1 + (1-\alpha)\phi_1 &= \mu_1, \\ \alpha\phi_1 + (1-\alpha)\phi_3 &= 1, \\ (1-\alpha)\phi_2 + 1 &= 0. \end{aligned} \tag{19}$$

São quatro equações lineares nas quatro incógnitas — os **coeficientes indeterminados**. Resolvendo de baixo para cima, e escrevendo $D \equiv 1 - \alpha + \alpha\mu_1 = 1 - \alpha(1 - \mu_1)$:

$$\phi_1 = \frac{\mu_1}{D}, \qquad \phi_2 = -\frac{1}{1-\alpha}, \qquad \phi_3 = \frac{1 - \alpha\phi_1}{1-\alpha} = \frac{1}{D}, \qquad \phi_0 = \frac{\mu_0(1-\alpha)}{D} - c_0. \tag{20}$$

A solução é, então,

$$s_t = \frac{\mu_0(1-\alpha)}{D} - c_0 + \frac{\mu_1}{D}\, m_{t-1} - \frac{1}{1-\alpha}\, u_t + \frac{1}{D}\, e_t. \tag{21}$$

Ela descreve s_t em função de choques exógenos e de uma variável predeterminada, m_{t-1}: é uma solução **genuinamente dinâmica**. Como $\mu_0 + \mu_1 m_{t-1} + e_t = m_t$, ela pode ser reescrita em termos da moeda corrente:

$$\boxed{s_t = -\frac{\alpha\mu_0}{1 - \alpha + \alpha\mu_1} - c_0 + \frac{1}{1 - \alpha + \alpha\mu_1}\, m_t - \frac{1}{1-\alpha}\, u_t.} \tag{22}$$

A Equação 21 e a Equação 22 são a mesma solução: dadas as sequências de choques, geram a mesma trajetória de s_t. O Exercício 2 mostra que a solução *forward* da Equação 14, calculada com as previsões da Equação 15, leva exatamente ao mesmo resultado.

> **i** Por que o método funciona — e o que ele escolhe
>
> A conjectura usa **apenas** as variáveis de estado necessárias, m_{t-1}, u_t e e_t. Se tivéssemos incluído, por exemplo, s_{t-1}, o sistema de coeficientes admitiria mais de uma solução, e algumas delas seriam as bolhas da caixa anterior. Restringir a conjectura ao **menor conjunto de estados** é o critério de McCallum (1983) para selecionar a solução de fundamentos.

2.5 Propriedades da solução e a crítica de Lucas

2.5.1 Sinais e dinâmica

Como $\alpha < 0$ e $|\mu_1| \leq 1$, os coeficientes $1/(1-\alpha)$ e $1/D$ são positivos. Um choque monetário positivo, $e_t > 0$, **deprecia** a moeda doméstica: mais oferta de moeda doméstica reduz seu valor em moeda estrangeira. Um choque composto positivo, $u_t > 0$, **aprecia** a moeda. Pela Equação 5, u_t sobe com p_t^*, $\bar{y}_t$ e ε_t e cai com q_t e R_t^*. Assim, uma depreciação real ($q_t \uparrow$) deprecia o câmbio nominal; uma alta dos preços externos o aprecia; e um aumento da demanda por moeda ($\varepsilon_t \uparrow$) valoriza a moeda, como valorizaria qualquer bem cuja demanda sobe.

Mais interessante é a dinâmica. Pela Equação 21, o efeito de um choque e_t sobre s_t é $1/D$; sobre s_{t+1}, que depende de m_t, é μ_1/D; sobre s_{t+k}, é μ_1^k/D. Se $|\mu_1| < 1$, o efeito se dissipa, porque o choque monetário é transitório. Se $\mu_1 = 1$, a moeda é um passeio aleatório, $D = 1$, e o efeito sobre s_{t+k} é igual a 1 para todo $k \geq 0$: **o câmbio se deprecia na mesma proporção da expansão monetária**, e permanentemente — o resultado da teoria quantitativa.

2.5.2 A crítica de Lucas

Olhe de novo para o coeficiente de m_t na Equação 22:

$$\frac{\partial s_t}{\partial m_t} = \frac{1}{1-\alpha(1-\mu_1)}. \tag{23}$$

Ele depende de μ_1, um parâmetro **da regra de política**, e não só de α, um parâmetro "estrutural" da demanda por moeda. Como $\alpha < 0$, ele é **crescente** em μ_1: quanto mais persistente o choque monetário, maior o impacto sobre o câmbio, porque um choque persistente eleva também a moeda **esperada** em todos os períodos futuros, e o câmbio depende dessa trajetória esperada (Equação 14).

A implicação é a **crítica de Lucas** (Lucas 1976). Um econometrista que estimasse a regressão de s_t em m_t sob uma regra com $\mu_1 = 0{,}5$ obteria um coeficiente estável e bem estimado — e erraria ao usá-lo para prever o efeito de mudar para uma regra com $\mu_1 = 1$. Os coeficientes de uma forma reduzida **não são invariantes** à regra de política, porque embutem as expectativas que os agentes formam sobre ela. O laboratório, item (c), mostra o coeficiente estimado mudando com a regra. A crítica é o item 1.2 do programa e volta com força no próximo capítulo.

2.5.3 Choques reais e o câmbio real

Os choques de gasto e de demanda por bens afetam s_t via câmbio real. Reorganizando a Equação 4,

$$q_t = \frac{-b_1 q^e_{t+1} + (\bar{y}_t - b_0 - b_1 r^*_t - b_3 g_t - b_4 y^*_t) - v_t}{b_2 - b_1}, \tag{24}$$

uma equação com a mesma estrutura da Equação 12, que se resolve pelo mesmo método. Se $\bar{y}_t$, g_t, r^*_t, y^*_t e v_t forem ruídos brancos, q_t também será — esse é o Exercício 1 da Lista 1. Um aumento de g_t ou de v_t (uma queda da propensão a poupar) **aprecia** o câmbio real, eleva u_t e, pela Equação 22, aprecia o câmbio nominal: o aumento da demanda por bens domésticos encarece a moeda doméstica.

2.6 Mais realismo na especificação

O modelo com choques ruído branco serve para expor o método, mas não descreve os dados. Três regularidades dos câmbios flutuantes pós-1973 orientam a reformulação:

1. O componente puramente aleatório das flutuações do câmbio é **muito maior** que o dos níveis de preços nacionais. Para os EUA, entre 1972 e 1991, o desvio-padrão do resíduo de uma AR(2) nas primeiras diferenças trimestrais é de cerca de 0,04 para o câmbio e 0,004 para os preços: uma variância **cem vezes** maior.
2. Os câmbios reais são **muito persistentes**, próximos de um passeio aleatório, e se movem junto com os nominais.
3. O câmbio responde **mais prontamente** que os preços à maioria dos choques — o fato estilizado em que Dornbusch (1976) baseia o *overshooting*.

O modelo da seção anterior não tem nenhuma das três: q_t é ruído branco por hipótese, e s_t e p_t respondem igualmente rápido a todos os choques. O item (d) do laboratório reproduz as regularidades 1 e 2 com dados de Brasil, Japão, Reino Unido e Suíça.

2.6.1 Passeios aleatórios e crescimento monetário persistente

Para obter a regularidade 2, supõe-se que $\bar{y}_t$, r_t^*, g_t, y_t^* e v_t são passeios aleatórios — hipótese próxima dos dados para produto e juros externos, um pouco menos para o gasto, e plausível para v_t, cujos deslocamentos devem ter um componente permanente. Então q_t também é um passeio aleatório (Exercício 2 da Lista 1). Do lado monetário, a regra passa a ser uma autorregressão no **crescimento** da moeda,

$$\Delta m_t = \mu_0 + \mu_1 \Delta m_{t-1} + e_t, \qquad |\mu_1| \leq 1, \tag{25}$$

muito mais realista para os EUA: com M1 trimestral de 1954 a 1990, McCallum (1996) estima $\hat{\mu}_1 \approx 0{,}62$ e um desvio-padrão de e_t de 0,0076. Por coerência, o choque composto u_t também passa a ser um passeio aleatório, $\Delta u_t = \xi_t$ — os deslocamentos da demanda por moeda vêm sobretudo de mudanças tecnológicas no sistema de pagamentos, que são permanentes.

Tomando a primeira diferença da Equação 12 e usando $\Delta(E_t s_{t+1} - s_t) = E_t \Delta s_{t+1} - E_{t-1}\Delta s_t$ (porque s_{t-1} é conhecido em $t-1$):

$$\Delta m_t - \Delta s_t = \alpha \left(E_t \Delta s_{t+1} - E_{t-1} \Delta s_t \right) + \xi_t. \tag{26}$$

O sistema é quase o mesmo de antes, com taxas de crescimento no lugar de níveis — "quase" por causa do operador E_{t-1} à direita. Conjecturando $\Delta s_t = \phi_0 + \phi_1 \Delta m_{t-1} + \phi_2 \xi_t + \phi_3 e_t$, tem-se $E_t \Delta s_{t+1} = \phi_0 + \phi_1(\mu_0 + \mu_1 \Delta m_{t-1} + e_t)$ e $E_{t-1}\Delta s_t = \phi_0 + \phi_1 \Delta m_{t-1}$. Igualando coeficientes:

$$\begin{aligned} \mu_1 - \phi_1 &= \alpha\phi_1\mu_1 - \alpha\phi_1, & -\phi_2 &= 1, \\ 1 - \phi_3 &= \alpha\phi_1, & \mu_0 - \phi_0 &= \alpha\phi_1\mu_0, \end{aligned}$$

donde $\phi_1 = \mu_1/D$, $\phi_2 = -1$, $\phi_3 = (1-\alpha)/D$ e $\phi_0 = \mu_0(1-\alpha)/D$:

$$\Delta s_t = \frac{\mu_0(1-\alpha)}{D} + \frac{\mu_1}{D}\Delta m_{t-1} - \xi_t + \frac{1-\alpha}{D}\, e_t. \tag{27}$$

ϕ_0 e ϕ_1 são os mesmos de antes; ϕ_2 e ϕ_3 mudam por causa do E_{t-1}. Usando a Equação 25, a solução também se escreve $\Delta s_t = -\alpha(\mu_0 + e_t)/D + \Delta m_t/D - \xi_t$.

> ⚠ Errata do livro
>
> A eq. (48) de McCallum (1996) imprime o primeiro termo como $-(\alpha + e_t)/D$. O correto é $-\alpha(\mu_0 + e_t)/D$: basta substituir $\mu_1 \Delta m_{t-1} = \Delta m_t - \mu_0 - e_t$ na Equação 27 e somar os termos.

A regularidade 1. O componente imprevisível de Δs_t é $-\xi_t + e_t(1-\alpha)/D$. Para os preços, de $p_t = s_t + p_t^* - q_t$ e da Equação 5, $\Delta p_t = \Delta s_t - c_1 \Delta \bar{y}_t - c_2 \Delta R_t^* - \Delta \varepsilon_t + \Delta u_t$, e o termo $-\xi_t$ de Δs_t **cancela** com $\Delta u_t = \xi_t$:

$$\Delta p_t = \frac{\mu_0(1-\alpha)}{D} + \frac{\mu_1}{D}\Delta m_{t-1} + \frac{1-\alpha}{D} e_t - c_1 \Delta \bar{y}_t - c_2 \Delta R_t^* - \Delta \varepsilon_t. \tag{28}$$

O choque ξ_t contém Δq_t, cuja variância é grande (o desvio-padrão trimestral do câmbio real efetivo americano é de 0,042, contra 0,005 dos resíduos de demanda por moeda). Esse componente entra no câmbio e não nos preços. Com choques reais importantes e próximos de passeios aleatórios — a visão de Stockman (1987) —, o modelo reproduz as regularidades 1 e 2.

A regularidade 3, porém, continua falhando. A Equação 28 mostra Δp_t respondendo a e_t e a $\Delta\varepsilon_t$ no mesmo período e com a mesma intensidade que Δs_t. Para que o câmbio responda mais depressa que os preços é preciso uma mudança mais radical: os **preços rígidos**.

2.7 O modelo com preços rígidos

Com preços rígidos o modelo não se dicotomiza: as variáveis reais, inclusive y_t e q_t, são determinadas junto com as monetárias. É preciso voltar ao sistema completo da Equação 1, trocando a Equação 2 por uma regra de formação de preços e supondo que o produto é determinado pela demanda.

2.7.1 A regra de preços

Não há consenso sobre como modelar o ajuste de preços. McCallum (1996) adota a hipótese de que o preço de cada período é fixado **antes** de o período começar, no valor que se espera que equilibre o mercado:

$$p_t = E_{t-1}\bar{p}_t, \tag{29}$$

em que $\bar{p}_t$ é o preço que igualaria a demanda agregada ao produto potencial — o preço de **preços flexíveis**. Quando chegam choques não antecipados, o preço pré-fixado prevalece mesmo fora do equilíbrio, e os choques de t só entram no preço de $t+1$. A vantagem da hipótese é incorporar uma rigidez **temporária** de forma simples, sem distorcer as propriedades de longo prazo. Ela é um caso particular do ajuste gradual $p_t - p_{t-1} = \vartheta(\bar{p}_{t-1} - p_{t-1}) + E_{t-1}(\bar{p}_t - \bar{p}_{t-1})$, com $\vartheta = 1$.

2.7.2 As hipóteses simplificadoras

Para deixar a álgebra administrável:

- $\mu_1 = 0$: a moeda é um passeio aleatório com drift, $\Delta m_t = \mu_0 + e_t$;
- os choques v_t e ε_t são passeios aleatórios: $v_t = v_{t-1} + \xi_t$ e $\varepsilon_t = \varepsilon_{t-1} + \zeta_t$;
- $\bar{y}_t = \bar{y}$, R_t^*, p_t^*, y_t^* e g_t são constantes, com unidades escolhidas de modo que $p^* = y^* = R^* = g = 0$.

Com isso, as Equações 1 se reduzem a

$$\begin{aligned} y_t &= b_0 + b_1\left(E_t s_{t+1} - s_t - E_t p_{t+1} + p_t\right) + b_2(s_t - p_t) + v_t, \\ m_t - p_t &= c_0 + c_1 y_t + c_2\left(E_t s_{t+1} - s_t\right) + \varepsilon_t. \end{aligned} \tag{30}$$

2.7.3 O preço de preços flexíveis e o preço pré-fixado

O preço $\bar{p}_t$ é a solução do modelo com $y_t = \bar{y}$. Essa solução é o item (a) do Exercício 3 da Lista 1, derivado em detalhe no capítulo seguinte. O resultado é

$$\bar{p}_t = -\mu_0 c_2 - c_0 - c_1 \bar{y} + m_t - \varepsilon_t, \tag{31}$$

e, como $E_{t-1} m_t = \mu_0 + m_{t-1}$ e $E_{t-1}\varepsilon_t = \varepsilon_{t-1}$, a Equação 29 dá

$$p_t = -\mu_0 c_2 - c_0 - c_1 \bar{y} + \mu_0 + m_{t-1} - \varepsilon_{t-1}. \tag{32}$$

O preço **não responde** a choques monetários (e_t) nem de demanda por moeda (ζ_t) no período em que ocorrem; responde um período depois, um por um. E não responde **nunca** a choques de poupança e investimento (v_t).

2.7.4 A solução para o câmbio

Como m_t e ε_t entram no modelo sempre como $m_t - \varepsilon_t$, pode-se **subsumir** ε_t em m_t e interpretar m_t como oferta de moeda líquida do choque de demanda por moeda. Defina $K \equiv -\mu_0 c_2 - c_0 - c_1 \bar{y}$, de modo que $p_t = K + \mu_0 + m_{t-1}$ e

$$E_t p_{t+1} - p_t = m_t - m_{t-1} = \mu_0 + e_t, \qquad m_t - p_t = e_t - K.$$

As variáveis de estado relevantes são m_{t-1}, e_t e v_t. Conjecture

$$s_t = \phi_0 + \phi_1 m_{t-1} + \phi_2 e_t + \phi_3 v_t, \tag{33}$$

de modo que, como v_t é passeio aleatório, $E_t s_{t+1} = \phi_0 + \phi_1(\mu_0 + m_{t-1} + e_t) + \phi_3 v_t$ e

$$E_t s_{t+1} - s_t = \phi_1 \mu_0 + (\phi_1 - \phi_2) e_t.$$

Da LM, o produto é o que a demanda por moeda permite:

$$y_t = \frac{e_t - K - c_0 - c_2 \left[\phi_1 \mu_0 + (\phi_1 - \phi_2) e_t\right]}{c_1}.$$

Da IS, com $s_t - p_t = \phi_0 - K - \mu_0 + (\phi_1 - 1) m_{t-1} + \phi_2 e_t + \phi_3 v_t$:

$$y_t = b_0 + b_1 \left[\phi_1 \mu_0 + (\phi_1 - \phi_2) e_t - \mu_0 - e_t\right] + b_2 \left[\phi_0 - K - \mu_0 + (\phi_1 - 1) m_{t-1} + \phi_2 e_t + \phi_3 v_t\right] + v_t.$$

Igualando os coeficientes das duas expressões para y_t:

$$
\begin{aligned}
m_{t-1}: \quad & 0 = b_2(\phi_1 - 1) && \Rightarrow \ \phi_1 = 1, \\
v_t: \quad & 0 = b_2\phi_3 + 1 && \Rightarrow \ \phi_3 = -1/b_2, \\
e_t: \quad & \frac{1 - c_2(1-\phi_2)}{c_1} = (b_2 - b_1)\phi_2 && \Rightarrow \ \phi_2 = \frac{1 - c_2}{c_1(b_2 - b_1) - c_2}, \\
\text{constante}: \quad & \bar{y} = b_0 + b_2(\phi_0 - K - \mu_0) && \Rightarrow \ \phi_0 = K + \mu_0 + \frac{\bar{y} - b_0}{b_2},
\end{aligned}
$$

em que, na equação da constante, usei $(-K - c_0 - c_2\mu_0)/c_1 = \bar{y}$. A solução é

$$
\boxed{s_t = \phi_0 + m_{t-1} + \frac{1 - c_2}{c_1(b_2 - b_1) - c_2}\, e_t - \frac{1}{b_2}\, v_t.} \tag{34}
$$

2.7.5 *Overshooting*

O coeficiente de e_t é a chave. Como $c_1 > 0$, $b_1 < 0$ e $b_2 > 0$, o termo $c_1(b_2 - b_1)$ é positivo. As estimativas da literatura sugerem $c_1 \approx 0{,}7$ e $b_2 - b_1 \approx 0{,}5$ ou menos — McCallum (1996) cita valores de 0,26 para os EUA —, de modo que $c_1(b_2 - b_1) < 1$. Com $c_2 < 0$, isso implica

$$
\phi_2 = \frac{1 - c_2}{c_1(b_2 - b_1) - c_2} > 1.
$$

Um choque monetário de 1% deprecia o câmbio **mais** que 1% no impacto. No período seguinte, s_{t+1} depende de $m_t = m_{t-1} + \mu_0 + e_t$ com coeficiente 1: o efeito de longo prazo é proporcional. Escrevendo os termos monetários como $m_{t-1} + \phi_2\,(m_t - m_{t-1} - \mu_0)$, a soma dos coeficientes é 1, mas o impacto é $\phi_2 > 1$: o câmbio **ultrapassa** seu novo nível de longo prazo e depois volta parcialmente — é o *overshooting* de Dornbusch (1976), agora num modelo estocástico com expectativas racionais.

A intuição é a da UIP. Com o preço fixo, a expansão monetária eleva os saldos reais; para que as pessoas aceitem retê-los, o juro nominal precisa cair. Pela UIP, juro doméstico menor que o externo exige que se espere **apreciação** da moeda doméstica. A única forma de esperar apreciação a partir de um câmbio que, no longo prazo, estará mais depreciado é o câmbio depreciar **além** do longo prazo hoje.

Com o modelo de preços rígidos, as três regularidades valem: o câmbio responde a todos os choques no impacto, e mais que proporcionalmente aos monetários, enquanto os preços respondem com um período de defasagem. E, com $b_2 > 0$, um choque positivo de gasto (v_t) aprecia a moeda.

2.7.6 A moeda tem efeito real

Por fim, o produto. Da Equação 34, $E_t s_{t+1} - s_t = \mu_0 + (1 - \phi_2)e_t$, e pela LM a resposta de y_t a e_t é

$$
\frac{\partial y_t}{\partial e_t} = \frac{1}{c_1}\left[1 - c_2\,(1 - \phi_2)\right] = \frac{(1 - c_2)(b_2 - b_1)}{c_1(b_2 - b_1) - c_2} > 0. \tag{35}
$$

O numerador, $(1-c_2)(b_2-b_1)$, é positivo sem ambiguidade, e o denominador também. **O produto responde positivamente a choques monetários**, como a maior parte dos economistas acredita que acontece — mas apenas por um período, até que os preços se ajustem. O Exercício 4 da Lista 1 desenvolve a intuição.

> **!** Resumo do capítulo
>
> 1. Com preços flexíveis, o modelo se dicotomiza: o câmbio real sai do bloco real e o câmbio nominal segue uma equação de Cagan.
> 2. Expectativas racionais = expectativa subjetiva igual à matemática condicional. Implicam erros com média zero e não correlacionados com a informação disponível.
> 3. Na solução *forward*, o câmbio depende de toda a trajetória esperada da moeda. Com uma regra de política, o método dos coeficientes indeterminados dá a solução em quatro passos: variáveis de estado, conjectura, expectativa implicada e identidade de coeficientes.
> 4. O efeito da moeda sobre o câmbio depende da persistência da política: crítica de Lucas.
> 5. Choques reais próximos de passeios aleatórios geram as regularidades 1 e 2. Preços rígidos geram a 3, o *overshooting* e efeitos reais transitórios da moeda.

2.8 Laboratório computacional em R e Python

O laboratório verifica numericamente as derivações do capítulo e as confronta com dados. Os parâmetros seguem as ordens de grandeza discutidas por McCallum (1996).

2.8.1 (a) Coeficientes indeterminados como sistema linear

O sistema da Equação 19 é linear nas incógnitas $(\phi_0, \phi_1, \phi_2, \phi_3)$. Em vez de resolvê-lo à mão, pode-se escrevê-lo como $A\phi = b$ e resolver numericamente, e depois comparar com as fórmulas fechadas da Equação 20.

```
coef_indet <- function(alpha, mu0, mu1, c0) {
  # linhas: constante, m_{t-1}, e_t, u_t ; colunas: phi0, phi1, phi2, phi3
  A <- rbind(c(1,  alpha * mu0,                  0,         0),
             c(0,  alpha * mu1 + (1 - alpha),    0,         0),
             c(0,  alpha,                        0, 1 - alpha),
             c(0,  0,                    1 - alpha,         0))
  b <- c(mu0 - c0, mu1, 1, -1)
  solve(A, b)
}
alpha <- -2; mu0 <- 0.01; mu1 <- 0.8; c0 <- 0.5
D <- 1 - alpha + alpha * mu1
numerico <- coef_indet(alpha, mu0, mu1, c0)
fechado  <- c(mu0 * (1 - alpha) / D - c0, mu1 / D, -1 / (1 - alpha), 1 / D)
rbind(numerico, fechado) |> round(6)
```

```
              [,1]     [,2]      [,3]     [,4]
numerico -0.478571 0.571429 -0.333333 0.714286
```

```
fechado  -0.478571 0.571429 -0.333333 0.714286
```

A primeira linha da matriz vem de juntar $\alpha\phi_0 + (1-\alpha)\phi_0 = \phi_0$.

```python
import numpy as np

def coef_indet(alpha, mu0, mu1, c0):
    A = np.array([[1, alpha * mu0,                0,         0],
                  [0, alpha * mu1 + (1 - alpha), 0,         0],
                  [0, alpha,                     0, 1 - alpha],
                  [0, 0,                 1 - alpha,         0]])
    b = np.array([mu0 - c0, mu1, 1, -1])
    return np.linalg.solve(A, b)

alpha, mu0, mu1, c0 = -2, 0.01, 0.8, 0.5
D = 1 - alpha + alpha * mu1
print(np.round(coef_indet(alpha, mu0, mu1, c0), 6))
```

```
[-0.478571  0.571429 -0.333333  0.714286]
```

```python
print(np.round([mu0 * (1 - alpha) / D - c0, mu1 / D, -1 / (1 - alpha), 1 / D], 6))
```

```
[-0.478571  0.571429 -0.333333  0.714286]
```

2.8.2 (b) Expectativas racionais *versus* adaptativas

Simulo o modelo da Equação 12 com a regra da Equação 15 e verifico duas coisas. Primeiro, que a solução satisfaz a equação do modelo **identicamente**, período a período. Segundo, que o erro de previsão racional, $s_{t+1} - E_t s_{t+1}$, tem média zero e não se correlaciona com nada conhecido em t, enquanto o erro adaptativo é sistemático quando a moeda cresce.

```r
set.seed(42)
TT <- 400; alpha <- -2; mu0 <- 0.01; mu1 <- 1; c0 <- 0; lambda <- 0.3
D  <- 1 - alpha + alpha * mu1
e  <- rnorm(TT, 0, 0.01); u <- rnorm(TT, 0, 0.02)
m  <- numeric(TT); m[1] <- mu0 + e[1]
for (t in 2:TT) m[t] <- mu0 + mu1 * m[t - 1] + e[t]
m_lag <- c(0, m[-TT])

s     <- (mu0 * (1 - alpha) / D - c0) + (mu1 / D) * m_lag - u / (1 - alpha) + e / D
Es    <- (mu0 * (1 - alpha) / D - c0) + (mu1 / D) * m            # E_t s_{t+1}
resid <- (m - s) - (c0 + alpha * (Es - s) + u)                   # equacao do modelo
erro_er <- s[-1] - Es[-TT]                                       # s_{t+1} - E_t s_{t+1}

# expectativas adaptativas: x^e_{t+1} = x^e_t + lambda (x_t - x^e_t)
```

```r
Ead <- numeric(TT); Ead[1] <- s[1]
for (t in 2:TT) Ead[t] <- Ead[t - 1] + lambda * (s[t] - Ead[t - 1])
erro_ad <- s[-1] - Ead[-TT]

c(max_residuo_modelo = max(abs(resid)),
  media_erro_racional = mean(erro_er), cor_erro_racional_s = cor(erro_er, s[-TT]),
  media_erro_adaptativo = mean(erro_ad),
  autocor_erro_adaptativo = cor(erro_ad[-1], erro_ad[-(TT - 1)])) |>
  signif(3)
```

```
     max_residuo_modelo     media_erro_racional     cor_erro_racional_s
               1.10e-15                5.27e-04                4.55e-02
  media_erro_adaptativo autocor_erro_adaptativo
               3.28e-02                4.64e-01
```

O resíduo da equação do modelo é zero até a precisão da máquina: a solução está certa. O erro racional tem média praticamente nula e não se correlaciona com s_t. O erro adaptativo, com $\lambda = 0{,}3$ e moeda crescendo 1% por período, tem média positiva — próxima de $\mu_0/\lambda \approx 0{,}033$, o valor de estado estacionário do Exercício 1 — e é **autocorrelacionado**: quem usa a regra adaptativa subestima o câmbio período após período.

```python
rng = np.random.default_rng(42)
TT, alpha, mu0, mu1, c0, lam = 400, -2, 0.01, 1.0, 0.0, 0.3
D = 1 - alpha + alpha * mu1
e = rng.normal(0, 0.01, TT); u = rng.normal(0, 0.02, TT)
m = np.zeros(TT); m[0] = mu0 + e[0]
for t in range(1, TT):
    m[t] = mu0 + mu1 * m[t - 1] + e[t]
m_lag = np.r_[0, m[:-1]]
s  = (mu0 * (1 - alpha) / D - c0) + (mu1 / D) * m_lag - u / (1 - alpha) + e / D
Es = (mu0 * (1 - alpha) / D - c0) + (mu1 / D) * m
erro_er = s[1:] - Es[:-1]
Ead = np.zeros(TT); Ead[0] = s[0]
for t in range(1, TT):
    Ead[t] = Ead[t - 1] + lam * (s[t] - Ead[t - 1])
erro_ad = s[1:] - Ead[:-1]
print(f"media erro racional = {erro_er.mean():.4f}")
```

```
media erro racional = 0.0003
```

```python
print(f"media erro adaptativo = {erro_ad.mean():.4f}")
```

```
media erro adaptativo = 0.0329
```

2.8.3 (c) A crítica de Lucas em uma regressão

Um econometrista observa s_t e m_t e estima $s_t = a + \beta m_t + \text{erro}$. Pela Equação 22, o erro é $-u_t/(1-\alpha)$, não correlacionado com m_t, e o MQO estima consistentemente $\beta = 1/(1-\alpha+\alpha\mu_1)$. A regressão é "boa" sob qualquer regra — mas o coeficiente muda com a regra.

```
simula_beta <- function(mu1, alpha = -2, TT = 2000, seed = 1) {
  set.seed(seed)
  e <- rnorm(TT, 0, 0.01); u <- rnorm(TT, 0, 0.02); m <- numeric(TT)
  for (t in 2:TT) m[t] <- mu1 * m[t - 1] + e[t]
  D <- 1 - alpha + alpha * mu1
  s <- m / D - u / (1 - alpha)
  coef(lm(s ~ m))[2]
}
regras <- c(0, 0.5, 0.8, 0.95, 1)
data.frame(mu1 = regras,
           beta_estimado = sapply(regras, simula_beta),
           beta_teorico  = 1 / (1 - (-2) + (-2) * regras)) |> round(3)
```

```
   mu1 beta_estimado beta_teorico
1 0.00         0.312        0.333
2 0.50         0.490        0.500
3 0.80         0.709        0.714
4 0.95         0.904        0.909
5 1.00         1.000        1.000
```

```
grade <- expand.grid(mu1 = seq(0, 1, by = 0.01), alpha = c(-0.5, -2, -5))
grade$beta <- 1 / (1 - grade$alpha * (1 - grade$mu1))
rotulos <- paste("alpha =", c(-0.5, -2, -5))
grade$alpha <- factor(paste("alpha =", grade$alpha), levels = rotulos)
ggplot(grade, aes(mu1, beta, colour = alpha)) + geom_line(linewidth = 0.9) +
  scale_colour_manual(values = c(az, vd, vm)) +
  labs(x = "persistência da regra monetária, mu1", y = "ds/dm")
```

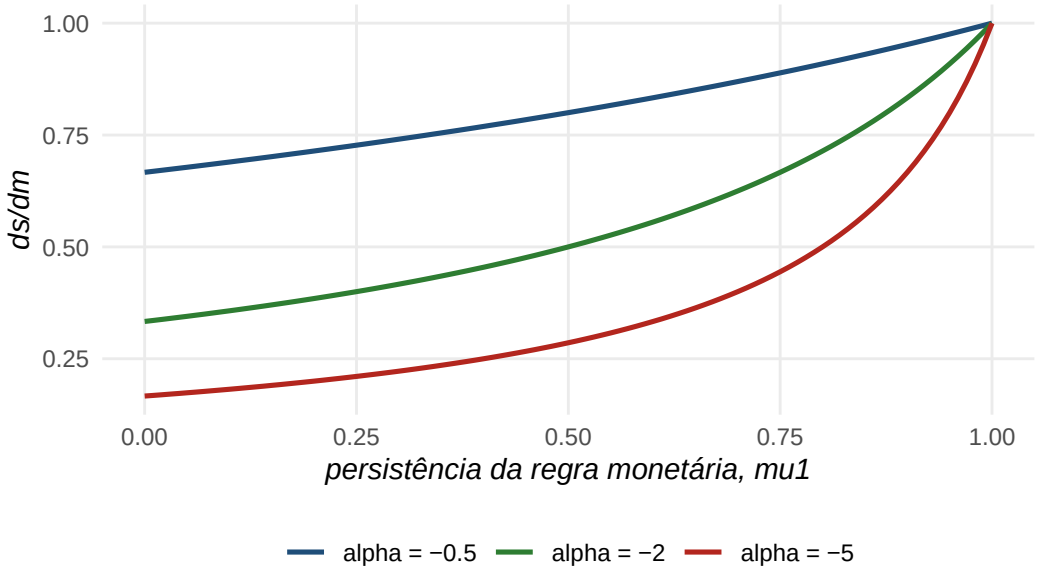


Figura 1: Crítica de Lucas: o efeito de m_t sobre s_t na Equação 22 em função da persistência da política, μ_1, para três valores da semielasticidade α.

Com $\alpha = -2$, o mesmo choque monetário move o câmbio em um terço quando a política reverte imediatamente ($\mu_1 = 0$) e um por um quando ela é permanente. Quanto mais sensível a demanda por moeda ao juro (maior $|\alpha|$), mais o efeito depende da regra.

```
def simula_beta(mu1, alpha=-2, TT=2000, seed=1):
    rng = np.random.default_rng(seed)
    e = rng.normal(0, 0.01, TT); u = rng.normal(0, 0.02, TT); m = np.zeros(TT)
    for t in range(1, TT):
        m[t] = mu1 * m[t - 1] + e[t]
    D = 1 - alpha + alpha * mu1
    s = m / D - u / (1 - alpha)
    X = np.column_stack([np.ones(TT), m])
    return np.linalg.lstsq(X, s, rcond=None)[0][1]

for mu1 in [0, 0.5, 0.8, 0.95, 1]:
    teorico = 1 / (3 - 2 * mu1)
    print(f"mu1 = {mu1:4.2f}: estimado = {simula_beta(mu1):.3f}, teorico = {teorico:.3f}")
```

```
mu1 = 0.00: estimado = 0.353, teorico = 0.333
mu1 = 0.50: estimado = 0.513, teorico = 0.500
mu1 = 0.80: estimado = 0.721, teorico = 0.714
mu1 = 0.95: estimado = 0.910, teorico = 0.909
mu1 = 1.00: estimado = 0.999, teorico = 1.000
```

2.8.4 (d) As regularidades 1 e 2 nos dados

Reproduzo o exercício de McCallum (1996) com dados mensais: o desvio-padrão do resíduo de uma AR(2) estimada nas primeiras diferenças do log do câmbio e do log dos preços ao consumidor (regularidade 1), e a correlação entre as variações dos câmbios nominal e real (regularidade 2). Uso o dólar contra o real, o iene, a libra e o franco suíço.

```r
resid_ar2 <- function(x) {
  dx <- diff(log(x)); n <- length(dx)
  y <- dx[3:n]; X <- cbind(1, dx[2:(n - 1)], dx[1:(n - 2)])
  sd(y - X %*% solve(crossprod(X), crossprod(X, y)))
}
pares <- list(Brasil      = c("EXBZUS", "BRACPIALLMINMEI"),
              Japao       = c("EXJPUS", "JPNCPIALLMINMEI"),
              Reino_Unido = c("EXUSUK", "GBRCPIALLMINMEI"),
              Suica       = c("EXSZUS", "CHECPIALLMINMEI"))
eua <- ler_fred("CPIAUCSL")
tab <- t(sapply(pares, function(p) {
  d <- Reduce(function(a, b) merge(a, b, by = "data"),
              list(ler_fred(p[1]), ler_fred(p[2]), eua))
  d <- subset(na.omit(d), data >= as.Date("1999-01-01"))     # Brasil: cambio flutuante
  if (p[1] == "EXUSUK") d[[2]] <- 1 / d[[2]]                 # FRED cota dolares por libra
  ds <- diff(log(d[[2]])); dp <- diff(log(d[[3]])) - diff(log(d$CPIAUCSL))
  c(dp_resid_cambio = resid_ar2(d[[2]]), dp_resid_precos = resid_ar2(d[[3]]),
    razao_variancias = (resid_ar2(d[[2]]) / resid_ar2(d[[3]]))^2,
    cor_dq_ds = cor(ds, ds - dp))
}))
round(tab, 3)
```

```
            dp_resid_cambio dp_resid_precos razao_variancias cor_dq_ds
Brasil                0.036           0.003          126.003     0.993
Japao                 0.022           0.003           55.626     0.987
Reino_Unido           0.020           0.003           36.762     0.983
Suica                 0.022           0.003           46.344     0.986
```

Todos os pares começam em 1999, quando o Brasil passa ao câmbio flutuante. As duas regularidades aparecem com nitidez. A variância do componente imprevisível do câmbio é dezenas a centenas de vezes a dos preços, e a variação do câmbio real é quase a do nominal (correlação acima de 0,95): no curto prazo, os preços quase não se mexem e o câmbio real herda os movimentos do nominal. A razão é maior no Brasil, cujo câmbio é bem mais volátil que o das moedas de países desenvolvidos — mesmo com uma inflação também mais volátil, o componente imprevisível do câmbio domina com folga.

```python
import pandas as pd

def ler_fred(id_):
    d = pd.read_csv(f"dados/{id_}.csv", parse_dates=[0])
```

```
    d.columns = ["data", id_]
    d[id_] = pd.to_numeric(d[id_], errors="coerce")
    return d.set_index("data")

def resid_ar2(x):
    dx = np.diff(np.log(x)); y = dx[2:]
    X = np.column_stack([np.ones(len(y)), dx[1:-1], dx[:-2]])
    return np.std(y - X @ np.linalg.lstsq(X, y, rcond=None)[0], ddof=1)

pares = {"Brasil": ("EXBZUS", "BRACPIALLMINMEI"),
         "Japao": ("EXJPUS", "JPNCPIALLMINMEI"),
         "Reino_Unido": ("EXUSUK", "GBRCPIALLMINMEI"),
         "Suica": ("EXSZUS", "CHECPIALLMINMEI")}
for pais, (cambio, cpi) in pares.items():
    d = ler_fred(cambio).join(ler_fred(cpi), how="inner").dropna()
    d = d[d.index >= "1999-01-01"]
    r = (resid_ar2(d[cambio].values) / resid_ar2(d[cpi].values)) ** 2
    print(f"{pais:12s} razao de variancias cambio/precos = {r:7.1f}")
```

```
Brasil       razao de variancias cambio/precos =   126.0
Japao        razao de variancias cambio/precos =    55.6
Reino_Unido  razao de variancias cambio/precos =    36.8
Suica        razao de variancias cambio/precos =    46.3
```

2.8.5 (e) *Overshooting* e efeito real da moeda

Por fim, as respostas ao impulso do modelo de preços rígidos a um choque monetário de 1%, com $c_1 = 0{,}7$, $b_1 = -0{,}2$, $b_2 = 0{,}3$ (logo $b_2 - b_1 = 0{,}5$) e $c_2 = -1$, comparadas com o modelo de preços flexíveis. Os desvios são medidos em relação à trajetória sem choque.

```
c1 <- 0.7; b1 <- -0.2; b2 <- 0.3; c2 <- -1
phi2 <- (1 - c2) / (c1 * (b2 - b1) - c2)
dy   <- (1 - c2) * (b2 - b1) / (c1 * (b2 - b1) - c2)
H <- 0:6
series <- c("câmbio, preços rígidos", "preço, preços rígidos",
            "câmbio e preço, preços flexíveis", "produto, preços rígidos")
irf <- data.frame(h = rep(H, 4), serie = rep(series, each = length(H)),
                  valor = c(ifelse(H == 0, phi2, 1),    # cambio: overshooting
                            ifelse(H == 0, 0, 1),       # preco: defasagem de um periodo
                            rep(1, length(H)),          # precos flexiveis
                            ifelse(H == 0, dy, 0)))     # produto
c(phi2 = phi2, efeito_produto = dy) |> round(3)
```

```
          phi2 efeito_produto
         1.481          0.741
```

```
ggplot(irf, aes(h, valor, colour = serie)) +
  geom_hline(yintercept = c(0, 1), colour = cz, linetype = "dotted") +
  geom_step(linewidth = 0.9, direction = "hv") + geom_point(size = 1.6) +
  scale_colour_manual(values = c(cz, az, vd, vm)) +
  labs(x = "períodos após o choque", y = "resposta (pontos de log)") +
  guides(colour = guide_legend(nrow = 2))
```

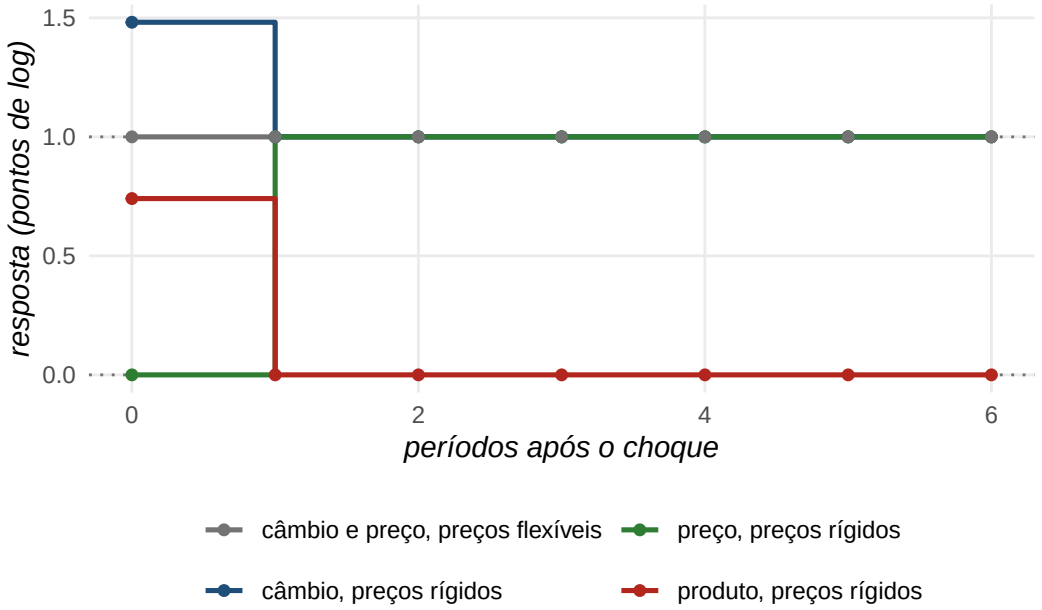


Figura 2: Resposta a um choque monetário de 1% em $t = 0$ (desvio em relação à trajetória sem choque). Com preços rígidos, o câmbio ultrapassa o novo nível de longo prazo e o produto sobe por um período.

Com esses parâmetros, o câmbio deprecia cerca de 1,48% no impacto e se acomoda em 1% a partir do período seguinte, quando o preço sobe 1%. O produto sobe 0,74% no período do choque e volta ao potencial depois. Com preços flexíveis, câmbio e preço sobem 1% juntos, e o produto não se mexe.

```
c1, b1, b2, c2 = 0.7, -0.2, 0.3, -1.0
phi2 = (1 - c2) / (c1 * (b2 - b1) - c2)
dy = (1 - c2) * (b2 - b1) / (c1 * (b2 - b1) - c2)
# conferencia: a resposta do produto pela LM, (1 - c2 (1 - phi2)) / c1
print(f"phi2 = {phi2:.3f};  dy/de = {dy:.3f};  via LM = {(1 - c2 * (1 - phi2)) / c1:.3f}")
```

```
phi2 = 1.481;  dy/de = 0.741;  via LM = 0.741
```

2.9 Exercícios

Exercício 1. (a) Mostre que a Equação 7 implica a Equação 8. (b) Suponha que $x_t = g\,t$, com $g > 0$ (crescimento constante). Mostre que, sob expectativas adaptativas, o erro de previsão $x_{t+1} - x^e_{t+1}$ converge para g/λ. (c) Qual seria o erro sob expectativas racionais? Interprete.

Exercício 2. Considere a solução *forward* da Equação 14 com u_t ruído branco e a regra $m_t = \mu_1 m_{t-1} + e_t$ (isto é, $\mu_0 = 0$). (a) Calcule $E_t m_{t+j}$. (b) Some a série e mostre que o resultado coincide com a Equação 22. (c) Mostre que $s_t = s^F_t + b_t$, com $b_{t+1} = \theta^{-1} b_t + \omega_{t+1}$ e $E_t \omega_{t+1} = 0$, também satisfaz a Equação 12. Por que essa solução é descartada?

Exercício 3. Com $\alpha = -1$, calcule o efeito de longo prazo e o efeito de impacto de um aumento permanente de 1% em m_t sobre s_t quando (a) $\mu_1 = 1$ e (b) $\mu_1 = 0{,}5$, e o efeito de um choque e_t de 1% sobre s_t, s_{t+1} e s_{t+2} no caso (b). Explique por que um banco central que mudasse de $\mu_1 = 0{,}5$ para $\mu_1 = 1$ não poderia usar uma regressão estimada no regime antigo para prever o efeito de sua política.

Exercício 4 (McCallum, Problema 1). Num mercado, a oferta é $q_t = b_0 + b_1 p_t + u_t$, com $b_1 > 0$, e a demanda é $q_t = a_0 + a_1 p_t + a_2 E_t p_{t+1} + v_t$, com $a_1 < 0$ e $a_2 > 0$; u_t e v_t são ruídos brancos. Encontre a solução de expectativas racionais para p_t.

Exercício 5 (McCallum, Problema 2). Repita o Exercício 4 com (a) $u_t = \rho u_{t-1} + \epsilon_t$, $|\rho| < 1$, e (b) $u_t = \epsilon_t + \vartheta \epsilon_{t-1}$, com ϵ_t ruído branco.

Exercício 6. No modelo de preços rígidos, use os valores de McCallum (1996) — $c_1(b_2 - b_1) = 0{,}26$ — e $c_2 = -0{,}5$. (a) Calcule o *overshooting* ϕ_2 e a resposta do produto. (b) O que acontece com ϕ_2 e com a resposta do produto quando $c_2 \to 0$? E quando $c_2 \to -\infty$? Interprete.

2.10 Gabarito dos Exercícios

> **Sobre esta seção**
>
> As resoluções seguem o método do capítulo. Sempre que a resposta é um número, ele é calculado na própria compilação. Como sempre, a recomendação é tentar cada exercício antes de consultar a resolução.

2.10.1 Exercício 1

(a) Defasando a Equação 7 um período e multiplicando por $(1-\lambda)$: $(1-\lambda)x^e_t = \lambda(1-\lambda)x_{t-1} + \lambda(1-\lambda)^2 x_{t-2} + \cdots$, que são exatamente os termos da Equação 7 a partir do segundo. Logo $x^e_{t+1} = \lambda x_t + (1-\lambda)x^e_t$, isto é, $x^e_{t+1} - x^e_t = \lambda(x_t - x^e_t)$.

(b) Com $x_t = gt$,

$$x^e_{t+1} = \lambda \sum_{j=0}^{\infty} (1-\lambda)^j g(t-j) = gt - g\lambda \sum_{j=0}^{\infty} j(1-\lambda)^j = gt - g\,\frac{1-\lambda}{\lambda},$$

usando $\sum_j j a^j = a/(1-a)^2$ com $a = 1-\lambda$. O erro é $x_{t+1} - x^e_{t+1} = g + g(1-\lambda)/\lambda = g/\lambda$: **constante e positivo**. Com $\lambda = 0{,}3$ e $g = 0{,}01$, $g/\lambda = 0{,}033$ — o número que aparece no laboratório (b).

(c) Sob expectativas racionais, um processo determinístico é previsto sem erro: $E_t x_{t+1} = g(t+1)$ e o erro é zero. O agente adaptativo comete o mesmo erro para sempre, embora a regra que gera x_t seja trivial — é exatamente o tipo de comportamento que a hipótese de expectativas racionais exclui.

2.10.2 Exercício 2

(a) Iterando a regra, $E_t m_{t+j} = \mu_1^j m_t$.

(b) Com $\theta = \alpha/(\alpha - 1)$,

$$\frac{1}{1-\alpha} \sum_{j=0}^{\infty} \theta^j \mu_1^j m_t = \frac{m_t}{(1-\alpha)(1-\theta\mu_1)}.$$

Como $\theta(1-\alpha) = -\alpha$, o denominador é $(1-\alpha) + \alpha\mu_1 = D$, e $s_t = -c_0 - u_t/(1-\alpha) + m_t/D$ — a Equação 22 com $\mu_0 = 0$. A série converge porque $0 < \theta\mu_1 < 1$.

(c) Substituindo $s_t = s_t^F + b_t$ na Equação 13, os termos de s^F se cancelam (porque s^F é solução), e sobra $b_t = -\alpha E_t b_{t+1}/(1-\alpha) = \theta E_t b_{t+1}$, que vale se $E_t b_{t+1} = \theta^{-1} b_t$. Como $\theta^{-1} > 1$, $E_t b_{t+j} = \theta^{-j} b_t$ explode: é uma **bolha** que cresce sem relação com os fundamentos (m e u). Ela viola a condição terminal $\theta^J E_t s_{t+J} \to 0$ — note que $\theta^J E_t b_{t+J} = b_t \neq 0$ — e não é a solução de estado mínimo.

2.10.3 Exercício 3

```
efeitos <- function(alpha, mu1) {
  D <- 1 - alpha + alpha * mu1
  c(impacto_mt = 1 / D, s_t = 1 / D, s_t1 = mu1 / D, s_t2 = mu1^2 / D)
}
rbind(mu1_1 = efeitos(-1, 1), mu1_0.5 = efeitos(-1, 0.5)) |> round(3)
```

```
        impacto_mt   s_t  s_t1  s_t2
mu1_1        1.000 1.000 1.000 1.000
mu1_0.5      0.667 0.667 0.333 0.167
```

(a) Com $\mu_1 = 1$, $D = 1$: um choque de 1% em m deprecia o câmbio em 1% no impacto e para sempre — impacto e longo prazo coincidem. **(b)** Com $\mu_1 = 0{,}5$, $D = 1{,}5$: o impacto é 0,667%, e o efeito do choque e_t sobre s_{t+1} e s_{t+2} é 0,333% e 0,167%, porque a moeda volta à média. Se a autoridade passasse a $\mu_1 = 1$, o coeficiente da regressão de s em m mudaria de 0,667 para 1. Quem usasse a regressão antiga **subestimaria em um terço** o efeito da nova política. A regressão não erra no regime antigo; ela só não é estrutural.

2.10.4 Exercício 4

Igualando oferta e demanda: $(b_1 - a_1)p_t = a_0 - b_0 + a_2 E_t p_{t+1} + v_t - u_t$. As variáveis de estado são u_t e v_t; conjecture $p_t = \phi_0 + \phi_1 u_t + \phi_2 v_t$, de modo que $E_t p_{t+1} = \phi_0$. Igualando coeficientes:

$$\phi_0 = \frac{a_0 - b_0}{b_1 - a_1 - a_2}, \qquad \phi_1 = -\frac{1}{b_1 - a_1}, \qquad \phi_2 = \frac{1}{b_1 - a_1}.$$

Um choque positivo de oferta reduz o preço e um de demanda o eleva, ambos na proporção $1/(b_1 - a_1)$, a inclinação relativa das curvas. Como os choques são ruído branco, nada deles se transmite ao futuro: p_t é ruído branco em torno de ϕ_0. O termo a_2 só aparece na média, porque com choques transitórios a expectativa de preço é constante.

2.10.5 Exercício 5

(a) Com u_t AR(1), o estado é (u_t, v_t) e $E_t p_{t+1} = \phi_0 + \phi_1 \rho u_t$. O coeficiente de u_t satisfaz $(b_1 - a_1)\phi_1 = a_2 \rho \phi_1 - 1$, logo

$$\phi_1 = -\frac{1}{b_1 - a_1 - a_2 \rho},$$

e ϕ_0 e ϕ_2 não mudam. Como $a_2 > 0$, a persistência **amplia** o efeito de um choque de oferta: um choque positivo hoje sinaliza oferta alta amanhã, preço esperado menor, menos demanda especulativa hoje e preço corrente ainda mais baixo. Com $\rho = 0$ volta-se ao Exercício 4.

(b) Com $u_t = \epsilon_t + \vartheta \epsilon_{t-1}$, o estado é $(\epsilon_t, \epsilon_{t-1}, v_t)$. Conjecture $p_t = \phi_0 + \phi_1 \epsilon_t + \phi_2 \epsilon_{t-1} + \phi_3 v_t$, de modo que $E_t p_{t+1} = \phi_0 + \phi_2 \epsilon_t$. Igualando os coeficientes de ϵ_{t-1} e de ϵ_t:

$$(b_1 - a_1)\phi_2 = -\vartheta \;\Rightarrow\; \phi_2 = -\frac{\vartheta}{b_1 - a_1}, \qquad (b_1 - a_1)\phi_1 = a_2 \phi_2 - 1 \;\Rightarrow\; \phi_1 = -\frac{1}{b_1 - a_1}\left(1 + \frac{a_2 \vartheta}{b_1 - a_1}\right).$$

O efeito de impacto do choque é ampliado pelo fato de que os agentes sabem que ele ainda deprimirá o preço no período seguinte; a partir de $t + 2$, o choque desaparece.

2.10.6 Exercício 6

```
k <- 0.26                                   # c1 (b2 - b1)
phi2 <- function(c2) (1 - c2) / (k - c2)
c(c2 = -0.5, phi2 = phi2(-0.5)) |> round(3)
```

```
    c2   phi2
-0.500  1.974
```

```r
# limites: c2 -> 0 e c2 -> -infinito
c(c2_zero = phi2(-1e-9), c2_menos_infinito = phi2(-1e9), um_sobre_k = 1 / k) |> round(3)
```

```
      c2_zero c2_menos_infinito        um_sobre_k
        3.846             1.000             3.846
```

(a) Com $c_1(b_2 - b_1) = 0{,}26$ e $c_2 = -0{,}5$, $\phi_2 = 1{,}5/0{,}76 \approx 1{,}97$: o câmbio deprecia quase o dobro do choque no impacto. A resposta do produto é $(1 - c_2)(b_2 - b_1)/(c_1(b_2 - b_1) - c_2) = \phi_2(b_2 - b_1)$, isto é, 1,97 vezes $(b_2 - b_1)$.

(b) Quando $c_2 \to 0$ (demanda por moeda insensível ao juro), $\phi_2 \to 1/[c_1(b_2 - b_1)]$ e a resposta do produto vai a $1/c_1$: o juro não pode absorver nada do aumento dos saldos reais, e todo o ajuste da LM vem do produto, como na teoria quantitativa de curto prazo. Quando $c_2 \to -\infty$ (armadilha da liquidez), $\phi_2 \to 1$ e a resposta do produto vai a $b_2 - b_1$: o juro nominal praticamente não se mexe, o câmbio não precisa ultrapassar o longo prazo, e o efeito real vem apenas da depreciação real (com o preço fixo, s sobe 1%) e da queda do juro real causada pela inflação esperada.

3 Lista de Exercícios 1 — Resolução

Este capítulo resolve a **1ª Lista de Exercícios** do curso (professor Fernando Veloso, monitor Pedro Henrique Grillo). Os quatro primeiros exercícios vêm do Capítulo 8 de McCallum (1996) e usam o modelo da Seção 2; o quinto é um modelo IS-LM fechado com oferta de Lucas, que antecipa o item 1.3 do programa. A numeração das equações nos enunciados é a da lista; nas resoluções, as equações são numeradas pelo documento.

O roteiro de sempre

Todos os exercícios seguem o mesmo roteiro do método dos coeficientes indeterminados:

1. **Reduzir o modelo** a uma equação (ou sistema) com expectativas, eliminando por substituição as variáveis que não interessam.
2. **Identificar as variáveis de estado**: as que já estão determinadas no período (variáveis defasadas, choques correntes) e que carregam informação sobre o futuro.
3. **Conjecturar** uma solução linear nesses estados, com coeficientes desconhecidos.
4. **Calcular a expectativa implicada** pela conjectura, usando o processo de cada estado (ruído branco: $E_t x_{t+1} = 0$; passeio aleatório: $E_t x_{t+1} = x_t$; passeio com drift: $E_t x_{t+1} = x_t + \mu$).
5. **Substituir e igualar coeficientes**: a equação precisa valer para **qualquer** realização dos choques, o que só acontece se o coeficiente de cada estado for o mesmo dos dois lados. Cada estado dá uma equação; a constante dá mais uma.

Ao final, cada solução é verificada: confiro à mão que a equação original vale e, nos Exercícios 3 e 5, simulo o modelo e confiro que as equações valem período a período.

Confronto com o gabarito oficial

O monitor divulgou o gabarito em 24/10/2026. **Todos os resultados coincidem** com os deste capítulo. As diferenças são de caminho e de profundidade:

- **Exercícios 1 e 2.** O gabarito escreve a equação como $q_t = \beta_1 E_t q_{t+1} + \beta_2 \bar{y}_t + ...$, com $\beta_1 = -b_1/(b_2 - b_1)$, que é o a da Equação 36. As soluções são as mesmas.
- **Exercício 3(a).** O gabarito segue outra rota, a da seção 8.9 de McCallum: troca p_t por $s_t - q_t$ na LM, junta $-q_t + c_1\bar{y} + \varepsilon_t$ num choque composto (um passeio aleatório), resolve primeiro o **câmbio nominal** por coeficientes indeterminados e só depois recupera $\bar{p}_t = \bar{s}_t - q_t$. Aqui resolvi primeiro o preço, pela equação de Cagan. Os dois caminhos chegam à Equação 43.
- **Exercício 3(b).** O gabarito compara a defasagem do preço com o câmbio do item (a). Aqui derivo também o câmbio **com preços rígidos**, o que mostra, além da velocidade, o *overshooting* ($\phi_2 > 1$).
- **Exercício 4.** O gabarito dá a intuição em uma frase (o preço rígido não acompanha o choque monetário). A resolução daqui decompõe o efeito pelos lados da LM e da IS.
- **Exercício 5.** O gabarito junta os dois choques transitórios num só, $w_t = -c\,u_t/a + \nu_t$, e escreve os coeficientes com $1 + c$ em evidência. Abrindo w_t, chega-se exatamente às Equações 50 e 51.

3.1 Exercício 1

(McCallum, cap. 8, Problema 3.) Considere o modelo básico com preços flexíveis. Suponha que $\bar{y}_t$, g_t, r_t^*, y_t^* e ν_t são ruídos brancos. Calcule a taxa de câmbio real de equilíbrio a partir de

$$q_t = \frac{-b_1 q_{t+1}^e + (\bar{y}_t - b_0 - b_1 r_t^* - b_3 g_t - b_4 y_t^*) - \nu_t}{b_2 - b_1}.$$

Neste caso, a taxa de câmbio real também é um ruído branco? Explique.

De onde vem a equação. É a Equação 4 da Seção 2, com ν_t no lugar de v_t. Com preços flexíveis, $y_t = \bar{y}_t$, e a UIP real dá $r_t = r_t^* + q_{t+1}^e - q_t$. Levando as duas à IS:

$$\bar{y}_t = b_0 + b_1\left(r_t^* + q_{t+1}^e - q_t\right) + b_2 q_t + b_3 g_t + b_4 y_t^* + \nu_t.$$

Passando os termos em q_t para a esquerda, $(b_2 - b_1)q_t = -b_1 q_{t+1}^e + \bar{y}_t - b_0 - b_1 r_t^* - b_3 g_t - b_4 y_t^* - \nu_t$, que é a equação do enunciado. Como $b_1 < 0 < b_2$, o denominador $b_2 - b_1$ é positivo.

É útil escrever a equação de forma compacta. Defina os **fundamentos**

$$z_t \equiv \bar{y}_t - b_0 - b_1 r_t^* - b_3 g_t - b_4 y_t^* - \nu_t \qquad \text{e} \qquad a \equiv \frac{-b_1}{b_2 - b_1} \in (0,1).$$

Com expectativas racionais, $q_{t+1}^e = E_t q_{t+1}$, e a equação fica

$$q_t = a\, E_t q_{t+1} + \frac{z_t}{b_2 - b_1}. \tag{36}$$

O câmbio real de hoje é uma combinação dos fundamentos de hoje e do câmbio real esperado para amanhã. O peso a vem do canal do juro real: quanto mais a IS responde ao juro ($|b_1|$ grande), mais o câmbio esperado pesa.

Passo 1: estados. A equação não tem nenhuma variável defasada. O que está determinado em t e afeta q_t são os cinco choques correntes: $\bar{y}_t$, g_t, r_t^*, y_t^* e ν_t.

Passo 2: conjectura. Uma constante mais uma combinação linear dos estados:

$$q_t = \phi_0 + \phi_1 \bar{y}_t + \phi_2 g_t + \phi_3 r_t^* + \phi_4 y_t^* + \phi_5 \nu_t. \tag{37}$$

Passo 3: expectativa implicada. Avançando a conjectura um período, $q_{t+1} = \phi_0 + \phi_1 \bar{y}_{t+1} + \cdots + \phi_5 \nu_{t+1}$. Como os cinco processos são ruídos brancos (com média zero), o valor de amanhã é imprevisível com a informação de hoje: $E_t \bar{y}_{t+1} = E_t g_{t+1} = \cdots = E_t \nu_{t+1} = 0$. Sobra só a constante:

$$E_t q_{t+1} = \phi_0.$$

Passo 4: substituir. Multiplicando a equação do enunciado por $(b_2 - b_1)$ e trocando q_t pela conjectura e $E_t q_{t+1}$ por ϕ_0:

$$(b_2 - b_1)\left(\phi_0 + \phi_1 \bar{y}_t + \phi_2 g_t + \phi_3 r_t^* + \phi_4 y_t^* + \phi_5 \nu_t\right) = -b_1\phi_0 - b_0 + \bar{y}_t - b_1 r_t^* - b_3 g_t - b_4 y_t^* - \nu_t.$$

Passo 5: igualar coeficientes. A igualdade precisa valer para quaisquer valores dos choques. Termo a termo:

Tabela 2: Coeficientes do Exercício 1.

termo	lado esquerdo	lado direito	coeficiente
constante	$(b_2 - b_1)\phi_0$	$-b_1\phi_0 - b_0$	$\phi_0 = -b_0/b_2$
$\bar{y}_t$	$(b_2 - b_1)\phi_1$	1	$\phi_1 = 1/(b_2 - b_1)$
g_t	$(b_2 - b_1)\phi_2$	$-b_3$	$\phi_2 = -b_3/(b_2 - b_1)$
r_t^*	$(b_2 - b_1)\phi_3$	$-b_1$	$\phi_3 = -b_1/(b_2 - b_1)$
y_t^*	$(b_2 - b_1)\phi_4$	$-b_4$	$\phi_4 = -b_4/(b_2 - b_1)$
ν_t	$(b_2 - b_1)\phi_5$	-1	$\phi_5 = -1/(b_2 - b_1)$

A equação da constante é a única em que a expectativa aparece: $(b_2 - b_1)\phi_0 = -b_1\phi_0 - b_0$, isto é, $b_2\phi_0 = -b_0$. Nas demais, a expectativa não contribui, porque nenhum choque corrente ajuda a prever o câmbio de amanhã. A solução é

$$\boxed{q_t = -\frac{b_0}{b_2} + \frac{\bar{y}_t - b_1 r_t^* - b_3 g_t - b_4 y_t^* - \nu_t}{b_2 - b_1}.} \tag{38}$$

Conferência. Com a Equação 38, $E_t q_{t+1} = -b_0/b_2$. Do lado direito da equação do enunciado, a constante fica $[-b_1(-b_0/b_2) - b_0]/(b_2 - b_1) = -b_0(b_2 - b_1)/[b_2(b_2 - b_1)] = -b_0/b_2$, e os choques entram divididos por $(b_2 - b_1)$. Os dois lados coincidem.

Outra forma de ver: a solução *forward*. Iterando a Equação 36 para a frente, $q_t = \frac{z_t}{b_2 - b_1} + a\,E_t\left[\frac{z_{t+1}}{b_2 - b_1} + a\,E_{t+1} q_{t+2}\right] = \ldots$, e, pela lei das expectativas iteradas,

$$q_t = \frac{1}{b_2 - b_1} \sum_{j=0}^{\infty} a^j E_t z_{t+j} \;+\; \lim_{T \to \infty} a^T E_t q_{t+T}. \tag{39}$$

Excluindo bolhas (o limite é zero, porque $0 < a < 1$ e q não explode), o câmbio real é a **média ponderada dos fundamentos esperados**. Com ruídos brancos, $E_t z_{t+j} = -b_0$ para $j \geq 1$, e a soma dá $\frac{1}{b_2 - b_1}\left[z_t - b_0 \frac{a}{1-a}\right]$. Como $a/(1-a) = -b_1/b_2$, a constante é $\frac{-b_0 + b_0 b_1/b_2}{b_2 - b_1}$, que vale $-b_0/b_2$ — e reaparece a Equação 38. A solução por coeficientes indeterminados é exatamente a solução *forward* sem bolhas: a conjectura linear só escolhe a forma, e as equações de coeficientes a encontram.

É ruído branco? Sim. Um processo é ruído branco se tem média constante, variância constante e autocovariância nula em todas as defasagens. Pela Equação 38, q_t é uma constante mais uma combinação linear de variáveis **contemporâneas**:

- **média**: $E(q_t) = -b_0/b_2$, constante, porque os choques têm média zero;

- **variância**, supondo os choques não correlacionados entre si,

$$\mathrm{Var}(q_t) = \frac{\sigma^2_{\bar{y}} + b_1^2\sigma^2_{r^*} + b_3^2\sigma^2_g + b_4^2\sigma^2_{y^*} + \sigma^2_\nu}{(b_2 - b_1)^2},$$

  constante;
- **autocovariância**: para $j \neq 0$, $\mathrm{Cov}(q_t, q_{t+j})$ é uma soma de termos como $\phi_1^2\mathrm{Cov}(\bar{y}_t, \bar{y}_{t+j})$ e $\phi_1\phi_2\mathrm{Cov}(\bar{y}_t, g_{t+j})$, e todos são nulos, porque cada choque é não correlacionado no tempo (e com os valores passados e futuros dos outros).

Se os choques forem correlacionados entre si **no mesmo período**, aparecem covariâncias na variância, mas a autocovariância continua nula: q_t continua ruído branco.

Por quê, economicamente. O modelo não tem **nenhum mecanismo de propagação**: não há estoque, preço rígido ou variável defasada que leve o efeito de um choque para o período seguinte. Com choques transitórios, os agentes esperam que o câmbio real volte à média já no próximo período, $E_t q_{t+1} = -b_0/b_2$, e a depreciação real esperada não carrega informação sobre os choques correntes. Nesse modelo, a persistência de q_t só pode vir da persistência dos choques — e é por isso que, para reproduzir a persistência do câmbio real nos dados, McCallum (1996) passa a supor passeios aleatórios (Exercício 2).

Três observações finais.

1. **Sinais.** $b_2 - b_1 > 0$, e os sinais fazem sentido: um aumento do produto potencial ($\phi_1 > 0$) exige depreciação real para gerar a demanda adicional que absorva a produção; um aumento do gasto, da renda externa ou da demanda privada ($\phi_2, \phi_4, \phi_5 < 0$) cria excesso de demanda e aprecia o câmbio real; um aumento do juro real externo ($\phi_3 > 0$, porque $b_1 < 0$) reduz a demanda, via juro real doméstico, e deprecia.
2. **Médias não nulas.** Se os choques forem ruídos brancos **em torno de médias** não nulas, $x_t = \bar{x} + \eta_t$, a única mudança está na constante: $E_t q_{t+1}$ continua constante e os coeficientes dos choques não mudam.
3. O resultado é o Problema 3 de McCallum, que o livro enuncia sem prova na nota 13.

3.2 Exercício 2

> *(McCallum, cap. 8, Problema 4.)* Suponha agora que $\bar{y}_t$, g_t, r_t^*, y_t^* e ν_t são passeios aleatórios. Calcule a taxa de câmbio real de equilíbrio.

Passos 1 e 2: estados e conjectura. Um passeio aleatório $x_t = x_{t-1} + \eta_t$ resume todo o seu passado no valor corrente: para prever x_{t+1}, basta saber x_t. Os estados continuam sendo os valores correntes dos cinco processos, e a conjectura da Equação 37 continua válida.

Passo 3: expectativa implicada. O que muda é a expectativa. Para um passeio aleatório, $E_t x_{t+1} = x_t + E_t\eta_{t+1} = x_t$. Então

$$E_t q_{t+1} = \phi_0 + \phi_1\bar{y}_t + \phi_2 g_t + \phi_3 r_t^* + \phi_4 y_t^* + \phi_5\nu_t = q_t.$$

O câmbio real esperado para amanhã é o de hoje: a **depreciação real esperada é nula**.

Passos 4 e 5: substituir e igualar. Com $E_t q_{t+1} = q_t$, a equação do enunciado fica

$$(b_2-b_1)q_t = -b_1 q_t + \bar{y}_t - b_0 - b_1 r_t^* - b_3 g_t - b_4 y_t^* - \nu_t \quad \Longrightarrow \quad b_2 q_t = \bar{y}_t - b_0 - b_1 r_t^* - b_3 g_t - b_4 y_t^* - \nu_t.$$

Coeficiente a coeficiente, o lado esquerdo agora é $b_2\phi_i$ (e não $(b_2-b_1)\phi_i$), porque o termo $-b_1\phi_i$ que vem da expectativa passa para a esquerda: $\phi_0 = -b_0/b_2$, $\phi_1 = 1/b_2$, $\phi_2 = -b_3/b_2$, $\phi_3 = -b_1/b_2$, $\phi_4 = -b_4/b_2$ e $\phi_5 = -1/b_2$. A solução é

$$\boxed{q_t = \frac{\bar{y}_t - b_0 - b_1 r_t^* - b_3 g_t - b_4 y_t^* - \nu_t}{b_2}.} \tag{40}$$

Conferência pela solução *forward*. Com passeios aleatórios, $E_t z_{t+j} = z_t$ para todo j (a constante $-b_0$ também se repete). A Equação 39 dá $q_t = \frac{z_t}{b_2-b_1}\sum_j a^j = \frac{z_t}{(b_2-b_1)(1-a)}$, e como $(b_2-b_1)(1-a) = b_2 - b_1 + b_1 = b_2$, chega-se a $q_t = z_t/b_2$, a Equação 40.

Propriedades. Tomando a primeira diferença,

$$\Delta q_t = \frac{\Delta\bar{y}_t - b_1\Delta r_t^* - b_3\Delta g_t - b_4\Delta y_t^* - \Delta\nu_t}{b_2},$$

e cada Δx_t é a inovação de um passeio aleatório, um ruído branco. Logo Δq_t é ruído branco e q_t **é um passeio aleatório**. Os choques aos fundamentos são permanentes e se transmitem integralmente — e para sempre — ao câmbio real.

Intuição: por que o multiplicador é maior. Com choques permanentes, os agentes esperam que o câmbio real de amanhã seja o de hoje, a depreciação real esperada é nula e, pela Equação 3, $r_t = r_t^*$: o canal do juro real **desaparece**, e o câmbio real precisa fazer sozinho todo o ajuste da IS. Por isso o multiplicador é $1/b_2$, maior que o $1/(b_2-b_1)$ do Exercício 1. Com choques transitórios, uma apreciação real hoje gera expectativa de depreciação, eleva o juro real doméstico ($r_t = r_t^* + E_t q_{t+1} - q_t$ sobe quando q_t cai) e ajuda a conter a demanda — parte do ajuste é feita pelo juro, e o câmbio precisa se mover menos. Com $b_1 = -0{,}2$ e $b_2 = 0{,}3$, um choque de 1% em ν_t aprecia o câmbio real em 2% se for transitório e em 3,3% se for permanente.

Caso intermediário. Se cada fundamento seguir um AR(1), $x_t = \rho x_{t-1} + \eta_t$, a Equação 39 dá $E_t z_{t+j} = \rho^j z_t$ (para a parte aleatória) e o multiplicador $\frac{1}{(b_2-b_1)(1-a\rho)} = \frac{1}{b_2-b_1+b_1\rho}$, que vai de $1/(b_2-b_1)$ com $\rho = 0$ (Exercício 1) a $1/b_2$ com $\rho = 1$ (Exercício 2), crescendo com a persistência.

A comparação ilustra um ponto geral: **a resposta de uma variável endógena a um choque depende do processo que gera o choque**. É a mesma lógica da crítica de Lucas, aplicada aqui a choques exógenos em vez de à regra de política.

3.3 Exercício 3

(McCallum, cap. 8, Problema 5.) Considere o modelo com preços rígidos

$$y_t = b_0 + b_1(E_t s_{t+1} - s_t - E_t p_{t+1} + p_t) + b_2(s_t - p_t) + \nu_t,$$

$$m_t - p_t = c_0 + c_1 y_t + c_2(E_t s_{t+1} - s_t) + \varepsilon_t,$$

com $\Delta m_t = \mu_0 + e_t$, $\nu_t = \nu_{t-1} + \xi_t$ e $\varepsilon_t = \varepsilon_{t-1} + \zeta_t$, em que e_t, ξ_t e ζ_t são ruídos brancos. **(a)** Encontre a solução para p_t que prevaleceria se a flexibilidade de preços resultasse em $y_t = \bar{y}$ para todo t. **(b)** McCallum afirma que o modelo com preço rígido ilustra a evidência de que o câmbio responde mais rapidamente a choques do que o nível de preços. Confirme essa afirmativa com base nas equações encontradas no item anterior.

Antes de começar, a leitura das equações. São a IS e a LM da Equação 30, com os preços externos, o juro externo, o gasto e a renda externa normalizados em zero. Na IS, o termo entre parênteses é o juro real ($R_t - $ inflação esperada, com $R_t = E_t s_{t+1} - s_t$ pela UIP) e $s_t - p_t$ é o câmbio real. Na LM, $E_t s_{t+1} - s_t$ é o juro nominal. A moeda é um passeio aleatório com drift μ_0; os choques de IS (ν_t) e de demanda por moeda (ε_t) são passeios aleatórios sem drift.

3.3.1 Item (a)

A ideia: o modelo se separa em dois. Com preços flexíveis, o produto fica fixo em $y_t = \bar{y}$. Defina o câmbio real $q_t \equiv s_t - p_t$. Então:

- a **IS** passa a envolver só variáveis **reais** — o câmbio real e a depreciação real esperada — e determina q_t sozinha;
- com q_t conhecido, a **LM** determina o **nível de preços**.

É a dicotomia clássica da Seção 2.2: primeiro o lado real, depois o nominal. Chamo de $\bar{p}_t$ o preço resultante, para distingui-lo do preço rígido do item (b).

Passo 1: a IS determina o câmbio real. O termo multiplicado por b_1 é a depreciação nominal esperada menos a inflação esperada, que é a depreciação **real** esperada:

$$(E_t s_{t+1} - s_t) - (E_t p_{t+1} - p_t) = E_t\left(s_{t+1} - p_{t+1}\right) - (s_t - p_t) = E_t q_{t+1} - q_t.$$

Como, além disso, $s_t - p_t = q_t$, a IS com $y_t = \bar{y}$ fica

$$\bar{y} = b_0 + b_1\left(E_t q_{t+1} - q_t\right) + b_2 q_t + \nu_t.$$

O único choque que sobra é ν_t, e ele é um passeio aleatório. É o Exercício 2 com um único fundamento. Conjecture $q_t = \kappa_0 + \kappa_1 \nu_t$. Como $E_t \nu_{t+1} = \nu_t$,

$$E_t q_{t+1} = \kappa_0 + \kappa_1 \nu_t = q_t \quad \Longrightarrow \quad E_t q_{t+1} - q_t = 0.$$

O termo de b_1 desaparece e sobra $\bar{y} = b_0 + b_2(\kappa_0 + \kappa_1 \nu_t) + \nu_t$. Igualando coeficientes, ν_t: $0 = b_2\kappa_1 + 1$, logo $\kappa_1 = -1/b_2$; constante: $\bar{y} = b_0 + b_2\kappa_0$, logo $\kappa_0 = (\bar{y} - b_0)/b_2$. Portanto

$$q_t = \frac{\bar{y} - b_0 - \nu_t}{b_2}, \qquad E_t q_{t+1} - q_t = 0. \tag{41}$$

A intuição: o choque de IS é permanente, então ninguém espera que o câmbio real mude. Um aumento da demanda privada aprecia o câmbio real em $1/b_2$, o suficiente para que a perda de exportações líquidas compense o excesso de demanda e o produto continue em $\bar{y}$.

Passo 2: levar o resultado à LM. Se a depreciação real esperada é zero, a depreciação nominal esperada é igual à inflação esperada:

$$E_t s_{t+1} - s_t = E_t p_{t+1} - p_t.$$

Trocando isso na LM e usando $y_t = \bar{y}$:

$$m_t - p_t = c_0 + c_1 \bar{y} + c_2 \left(E_t p_{t+1} - p_t\right) + \varepsilon_t. \tag{42}$$

O câmbio sumiu. Sobrou uma equação só em p_t: a **equação de Cagan** de demanda por moeda, em que os saldos reais dependem da inflação esperada. Note que ν_t também sumiu: o choque de IS afeta só o câmbio real, e como o câmbio real esperado não muda, ele não entra na LM.

Passo 3: estados e conjectura. Na Equação 42 aparecem m_t e ε_t, ambos conhecidos em t — com preços flexíveis, o preço reage aos choques do próprio período. Os dois são passeios aleatórios (a moeda, com drift). Conjecture

$$p_t = \pi_0 + \pi_1 m_t + \pi_2 \varepsilon_t.$$

Não é preciso incluir ν_t: se fosse incluído, a equação do seu coeficiente daria zero, pela razão do Passo 2.

Passo 4: expectativa implicada. Dois fatos:

- $m_{t+1} = m_t + \mu_0 + e_{t+1}$ e $E_t e_{t+1} = 0$, logo $E_t m_{t+1} = m_t + \mu_0$: a moeda cresce μ_0 por período, em média;
- $\varepsilon_{t+1} = \varepsilon_t + \zeta_{t+1}$, logo $E_t \varepsilon_{t+1} = \varepsilon_t$.

Daí

$$E_t p_{t+1} = \pi_0 + \pi_1 (m_t + \mu_0) + \pi_2 \varepsilon_t \quad \Longrightarrow \quad E_t p_{t+1} - p_t = \pi_1 \mu_0.$$

A inflação esperada é uma **constante**: os choques correntes mudam o nível de preços de hoje e o esperado para amanhã na mesma quantidade, porque são permanentes.

Passo 5: substituir e igualar coeficientes. Levando a conjectura e a inflação esperada à Equação 42:

$$m_t - \pi_0 - \pi_1 m_t - \pi_2 \varepsilon_t = c_0 + c_1 \bar{y} + c_2 \pi_1 \mu_0 + \varepsilon_t.$$

Tabela 3: Coeficientes do item (a).

termo	lado esquerdo	lado direito	coeficiente
m_t	$1 - \pi_1$	0	$\pi_1 = 1$
ε_t	$-\pi_2$	1	$\pi_2 = -1$

termo	lado esquerdo	lado direito	coeficiente
constante	$-\pi_0$	$c_0 + c_1\bar{y} + c_2\pi_1\mu_0$	$\pi_0 = -c_0 - c_1\bar{y} - c_2\mu_0$

Na linha da constante, usei $\pi_1 = 1$, obtido na primeira linha. A solução de preços flexíveis é

$$\boxed{\bar{p}_t = -\mu_0 c_2 - c_0 - c_1\bar{y} + m_t - \varepsilon_t,} \tag{43}$$

a eq. (56) de McCallum.

Conferência. Com a Equação 43, $m_t - \bar{p}_t = c_0 + c_1\bar{y} + c_2\mu_0 + \varepsilon_t$. A inflação esperada é μ_0, então o lado direito da Equação 42 vale $c_0 + c_1\bar{y} + c_2\mu_0 + \varepsilon_t$. Os dois lados coincidem.

O câmbio nominal. Somando o câmbio real (Equação 41) e o preço:

$$\bar{s}_t = q_t + \bar{p}_t = \frac{\bar{y} - b_0 - \nu_t}{b_2} - \mu_0 c_2 - c_0 - c_1\bar{y} + m_t - \varepsilon_t. \tag{44}$$

A depreciação nominal esperada é $E_t\bar{s}_{t+1} - \bar{s}_t = 0 + \mu_0$: com $R^* = 0$, o juro nominal doméstico é igual à inflação esperada, e o juro real é igual ao externo, zero.

Como ler o resultado.

- $\pi_1 = 1$: a moeda sobe 1%, os preços sobem 1% **no mesmo período**. É a teoria quantitativa.
- $\pi_2 = -1$: se a demanda por moeda aumenta (ε_t sobe), os preços caem na mesma proporção, para que os saldos reais $m_t - p_t$ cresçam o que o público deseja.
- $-\mu_0 c_2 > 0$ (porque $c_2 < 0$): com inflação esperada μ_0, reter moeda custa mais. O público quer menos saldos reais e, para o mesmo estoque de moeda, o nível de preços é mais alto.
- ν_t **não aparece**: choques de IS mudam o câmbio real, não o nível de preços. Eles se transmitem ao câmbio nominal (Equação 44), mas não aos preços.

3.3.2 Item (b)

Passo 1: o preço rígido. Com preços rígidos, o preço de t é fixado em $t-1$ no valor que se espera que equilibre o mercado (Equação 29): $p_t = E_{t-1}\bar{p}_t$. Aplicando E_{t-1} à Equação 43, com $E_{t-1}m_t = m_{t-1} + \mu_0$ (porque $E_{t-1}e_t = 0$) e $E_{t-1}\varepsilon_t = \varepsilon_{t-1}$ (porque $E_{t-1}\zeta_t = 0$):

$$p_t = -\mu_0 c_2 - c_0 - c_1\bar{y} + \mu_0 + m_{t-1} - \varepsilon_{t-1}. \tag{45}$$

O preço de t só depende de variáveis de $t-1$. Os choques de t — e_t, ζ_t, ξ_t — não entram.

Passo 2: simplificar a notação. A moeda e o choque de demanda por moeda entram no modelo sempre como $m_t - \varepsilon_t$ (na LM, $m_t - p_t - \varepsilon_t$; no preço, $m_{t-1} - \varepsilon_{t-1}$). Defina a **moeda líquida da demanda** $n_t \equiv m_t - \varepsilon_t$, cuja variação é

$$\Delta n_t = \mu_0 + \eta_t, \qquad \eta_t \equiv e_t - \zeta_t,$$

um passeio aleatório com drift. Um choque monetário positivo e uma queda da demanda por moeda têm o mesmo efeito: ambos aumentam a moeda disponível em relação à desejada. Com $K \equiv -\mu_0 c_2 - c_0 - c_1 \bar{y}$, a Equação 45 fica $p_t = K + \mu_0 + n_{t-1}$, e daí:

$$E_t p_{t+1} - p_t = n_t - n_{t-1} = \mu_0 + \eta_t, \qquad n_t - p_t = \eta_t - K.$$

A inflação esperada **sobe** com o choque: o preço de amanhã vai incorporá-lo, o de hoje não.

Passo 3: conjectura para o câmbio. Os estados relevantes para s_t são n_{t-1} (predeterminado), o choque nominal corrente η_t e o choque de IS ν_t (que, sendo passeio aleatório, resume o seu passado). Conjecture

$$s_t = \phi_0 + \phi_1 n_{t-1} + \phi_2 \eta_t + \phi_3 \nu_t.$$

Então $E_t s_{t+1} = \phi_0 + \phi_1 n_t + \phi_3 \nu_t$, com $n_t = n_{t-1} + \mu_0 + \eta_t$, e

$$E_t s_{t+1} - s_t = \phi_1 \mu_0 + (\phi_1 - \phi_2)\eta_t.$$

Passo 4: duas expressões para o produto. O produto agora é endógeno e aparece nas duas equações. Da LM, isolando y_t:

$$y_t = \frac{\eta_t - K - c_0 - c_2\left[\phi_1 \mu_0 + (\phi_1 - \phi_2)\eta_t\right]}{c_1}.$$

Da IS, com o juro real $E_t s_{t+1} - s_t - (E_t p_{t+1} - p_t) = \phi_1 \mu_0 + (\phi_1 - \phi_2)\eta_t - \mu_0 - \eta_t$ e o câmbio real $s_t - p_t = \phi_0 - K - \mu_0 + (\phi_1 - 1)n_{t-1} + \phi_2 \eta_t + \phi_3 \nu_t$:

$$y_t = b_0 + b_1\left[(\phi_1 - 1)\mu_0 + (\phi_1 - \phi_2 - 1)\eta_t\right] + b_2\left[\phi_0 - K - \mu_0 + (\phi_1 - 1)n_{t-1} + \phi_2 \eta_t + \phi_3 \nu_t\right] + \nu_t.$$

Passo 5: igualar coeficientes. As duas expressões são o mesmo y_t, para qualquer valor dos estados:

- n_{t-1}: a LM dá 0 e a IS, $b_2(\phi_1 - 1)$. Logo $\phi_1 = 1$: no longo prazo, o câmbio acompanha a moeda um por um.
- ν_t: a LM dá 0 e a IS, $b_2\phi_3 + 1$. Logo $\phi_3 = -1/b_2$, o mesmo efeito do caso flexível.
- η_t, já com $\phi_1 = 1$: a LM dá $[1 - c_2(1 - \phi_2)]/c_1$ e a IS, $b_1(-\phi_2) + b_2\phi_2 = (b_2 - b_1)\phi_2$. Igualando, $1 - c_2 + c_2\phi_2 = c_1(b_2 - b_1)\phi_2$, ou

$$\phi_2 = \frac{1 - c_2}{c_1(b_2 - b_1) - c_2}.$$

- constante: na LM, $(-K - c_0 - c_2\mu_0)/c_1 = c_1\bar{y}/c_1 = \bar{y}$ (pela definição de K); na IS, $b_0 + b_2(\phi_0 - K - \mu_0)$ (o termo de b_1 some com $\phi_1 = 1$). Logo $\phi_0 = K + \mu_0 + (\bar{y} - b_0)/b_2$.

A solução para o câmbio, voltando à notação original, é

$$s_t = \phi_0 + \underbrace{m_{t-1} - \varepsilon_{t-1}}_{n_{t-1}} + \phi_2 \left(e_t - \zeta_t\right) - \frac{1}{b_2}\,\nu_t, \qquad \phi_2 = \frac{1 - c_2}{c_1(b_2 - b_1) - c_2}, \tag{46}$$

a mesma da Equação 34 da Seção 2.7.

Passo 6: o câmbio reage mais que um por um no impacto. Como $c_2 < 0$, o denominador de ϕ_2 é positivo, e

$$\phi_2 > 1 \iff 1 - c_2 > c_1(b_2 - b_1) - c_2 \iff c_1(b_2 - b_1) < 1,$$

o caso empiricamente relevante ($c_1 \approx 0{,}7$ e $b_2 - b_1 \approx 0{,}5$ dão 0,35). Com $c_2 = -1$, $\phi_2 = 2/1{,}35 \approx 1{,}48$.

Passo 7: comparar as respostas. A comparação das Equações 45 e 46 confirma a afirmação de McCallum choque a choque. Para um choque unitário em t (e nenhum outro), as respostas, medidas em relação à trajetória sem choque, são:

Tabela 4: Respostas de preço e câmbio no modelo com preços rígidos.

Choque em t	p_t	$p_{t+1}, p_{t+2}, \ldots$	s_t	$s_{t+1}, s_{t+2}, \ldots$
Monetário, $e_t = 1$	0	1	$\phi_2 > 1$	1
Demanda por moeda, $\zeta_t = 1$	0	-1	$-\phi_2 < -1$	-1
IS (poupança-investimento), $\xi_t = 1$	0	0	$-1/b_2$	$-1/b_2$

Como ler a primeira linha: em t, $e_t = 1$ entra no câmbio com peso ϕ_2 e não entra no preço. Em $t+1$, o choque já está em n_t, que entra no preço e no câmbio com peso 1; o termo $\phi_2 \eta_{t+1}$ é zero, porque não há choque novo. O mesmo raciocínio dá as demais linhas.

- **Choques monetários e de demanda por moeda** (e_t, ζ_t): o preço não reage no período do choque — ele foi fixado em $t-1$ — e só se ajusta, um por um, no período seguinte. O câmbio reage **no impacto**, e mais que proporcionalmente ($\phi_2 > 1$). A partir de $t+1$, câmbio e preço estão no novo nível de longo prazo, igual ao de preços flexíveis: o câmbio *ultrapassou* esse nível e voltou (*overshooting*).
- **Choques de IS** (ξ_t): o preço não reage **nunca** — pela Equação 43, o preço de equilíbrio não depende de ν_t —, enquanto o câmbio nominal se aprecia imediatamente em $1/b_2$ e permanentemente, ajustando o câmbio real como na Equação 41. Para esse choque, os modelos rígido e flexível dão a mesma resposta.

Em todos os casos, o câmbio responde **no mesmo período** e os preços **com defasagem** (ou não respondem). Compare com o modelo de preços flexíveis do item (a), em que $\partial \bar{p}_t/\partial e_t = \partial \bar{s}_t/\partial e_t = 1$: lá, câmbio e preços se movem juntos, no mesmo período e na mesma magnitude, e a regularidade 3 falha. O que gera a diferença de velocidade não é a política nem as expectativas, mas a rigidez nominal. E é a rigidez que obriga o câmbio a ultrapassar o longo prazo, como mostra o Exercício 4.

3.3.3 Verificação numérica

Simulo o modelo de preços rígidos com choques aleatórios, construo p_t, s_t e y_t pelas soluções e confiro que a IS e a LM valem identicamente. As expectativas usadas são as implicadas pelas próprias soluções: $E_t p_{t+1} = K + \mu_0 + n_t$ e $E_t s_{t+1} = \phi_0 + n_t - \nu_t/b_2$, com $n_t = m_t - \varepsilon_t$ (no código, `mn`).

```r
set.seed(7)
TT <- 300; b0 <- 0.1; b1 <- -0.2; b2 <- 0.3; c0 <- 0.2; c1 <- 0.7; c2 <- -1
mu0 <- 0.005; ybar <- 1
e <- rnorm(TT, 0, 0.01); xi <- rnorm(TT, 0, 0.01); zeta <- rnorm(TT, 0, 0.005)
m <- cumsum(mu0 + e); nu <- cumsum(xi); eps <- cumsum(zeta)
mn <- m - eps                                          # moeda liquida do choque de demanda
mn_lag <- c(0, mn[-TT])
K <- -mu0 * c2 - c0 - c1 * ybar
phi2 <- (1 - c2) / (c1 * (b2 - b1) - c2); phi0 <- K + mu0 + (ybar - b0) / b2
p  <- K + mu0 + mn_lag
s  <- phi0 + mn_lag + phi2 * (mn - mn_lag - mu0) - nu / b2   # e_t - zeta_t
Ep <- K + mu0 + mn                                     # E_t p_{t+1}
Es <- phi0 + mn - nu / b2                              # E_t s_{t+1}
y  <- (mn - p - c0 - c2 * (Es - s)) / c1               # produto pela LM
residuo_is <- y - (b0 + b1 * (Es - s - Ep + p) + b2 * (s - p) + nu)
c(max_residuo_IS = max(abs(residuo_is)), phi2 = phi2,
  dp_s_sobre_dp_p = sd(diff(s)) / sd(diff(p))) |> signif(3)
```

```
 max_residuo_IS            phi2 dp_s_sobre_dp_p
       2.00e-15        1.48e+00        3.25e+00
```

O resíduo da IS é zero até a precisão da máquina, o que confirma a solução. A última linha mostra a regularidade 1 aparecendo no modelo: as variações do câmbio são várias vezes mais voláteis que as dos preços.

```python
import numpy as np
rng = np.random.default_rng(7)
TT, b0, b1, b2, c0, c1, c2, mu0, ybar = 300, 0.1, -0.2, 0.3, 0.2, 0.7, -1.0, 0.005, 1.0
e = rng.normal(0, 0.01, TT); xi = rng.normal(0, 0.01, TT); zeta = rng.normal(0, 0.005, TT)
mn = np.cumsum(mu0 + e) - np.cumsum(zeta); nu = np.cumsum(xi)
mn_lag = np.r_[0, mn[:-1]]
K = -mu0 * c2 - c0 - c1 * ybar
phi2 = (1 - c2) / (c1 * (b2 - b1) - c2); phi0 = K + mu0 + (ybar - b0) / b2
```

```
p = K + mu0 + mn_lag
s = phi0 + mn_lag + phi2 * (mn - mn_lag - mu0) - nu / b2
Ep, Es = K + mu0 + mn, phi0 + mn - nu / b2
y = (mn - p - c0 - c2 * (Es - s)) / c1
res = y - (b0 + b1 * (Es - s - Ep + p) + b2 * (s - p) + nu)
print(f"max |residuo IS| = {np.abs(res).max():.1e};  phi2 = {phi2:.3f}")
```

```
max |residuo IS| = 1.9e-15;  phi2 = 1.481
```

3.4 Exercício 4

> Considere o modelo de preços rígidos da seção 8.9 de McCallum. O produto de equilíbrio é
>
> $$y_t = \bar{y} + \frac{1}{c_1}\left\{1 - c_2\left[1 - \left(\frac{1 - c_2}{c_1(b_2 - b_1) - c_2}\right)\right]\right\} e_t.$$
>
> Apresente uma intuição econômica para o resultado.

O termo entre parênteses é o ϕ_2 do Exercício 3. Uso a notação de lá, ignorando o choque de demanda por moeda ($\zeta_t = 0$, de modo que $\eta_t = e_t$).

3.4.1 De onde vem a fórmula

A LM em desvios. Com o preço pré-fixado, $m_t - p_t = e_t - K$: o choque monetário eleva os **saldos reais** um por um. Pela UIP (com $R^* = 0$), o juro nominal é $R_t = E_t s_{t+1} - s_t$, e a solução do câmbio dá

$$R_t = \mu_0 + (1 - \phi_2) e_t.$$

Como $\phi_2 > 1$, **o juro nominal cai** com o choque. Levando à LM, $e_t - K = c_0 + c_1 y_t + c_2[\mu_0 + (1 - \phi_2)e_t]$. Usando $-K - c_0 - c_2\mu_0 = c_1\bar{y}$ (a definição de K), sobra uma equação em desvios:

$$\underbrace{e_t}_{\text{aumento dos saldos reais}} = \underbrace{c_1(y_t - \bar{y})}_{\text{absorvido pelo produto}} + \underbrace{c_2(1 - \phi_2)e_t}_{\text{absorvido pelo juro}} \quad \Longrightarrow \quad y_t - \bar{y} = \frac{1 - c_2(1 - \phi_2)}{c_1}\, e_t,$$

que é a expressão do enunciado. O aumento dos saldos reais tem de ser retido pelo público, e só há duas formas: mais produto ($c_1 > 0$) ou juro nominal mais baixo ($c_2 < 0$ e $1 - \phi_2 < 0$, então $c_2(1 - \phi_2) > 0$).

Simplificação. A equação que determinou ϕ_2 no Exercício 3 foi $1 - c_2(1 - \phi_2) = c_1(b_2 - b_1)\phi_2$. Substituindo:

$$\frac{\partial y_t}{\partial e_t} = \frac{1 - c_2(1 - \phi_2)}{c_1} = \phi_2\,(b_2 - b_1) = \frac{(1 - c_2)(b_2 - b_1)}{c_1(b_2 - b_1) - c_2} > 0. \tag{47}$$

As duas formas da Equação 47 contam a mesma história por lados diferentes: a primeira pelo mercado de moeda (LM), a segunda pelo mercado de bens (IS).

Pelo lado da IS. O choque move os dois argumentos da IS:

- **câmbio real**: s_t sobe $\phi_2 e_t$ e p_t não se move, então q_t sobe $\phi_2 e_t$; o efeito na demanda é $b_2\phi_2 e_t$;
- **juro real**: o nominal cai $(\phi_2 - 1)e_t$ e a inflação esperada sobe e_t (o preço de $t+1$ vai incorporar o choque), então o juro real cai $(\phi_2 - 1)e_t + e_t = \phi_2 e_t$; o efeito na demanda é $b_1(-\phi_2 e_t) = -b_1\phi_2 e_t > 0$.

A soma é $(b_2 - b_1)\phi_2 e_t$, a Equação 47. O produto, determinado pela demanda porque o preço está fixo, sobe nessa quantidade.

Em números. Com $c_1 = 0{,}7$, $b_2 - b_1 = 0{,}5$ e $c_2 = -1$ (os valores do laboratório da Seção 2), $\phi_2 \approx 1{,}48$. Um choque monetário de 1%:

Tabela 5: Respostas a um choque monetário de 1% no modelo com preços rígidos.

Variável	Resposta em t	Em $t+1$
câmbio nominal s_t	+1,48%	+1%
preço p_t	0	+1%
câmbio real q_t	+1,48%	0
juro nominal R_t	−0,48 p.p.	0
juro real	−1,48 p.p.	0
produto $y_t - \bar{y}$	+0,74%	0

E a LM fecha: dos 1% a mais de saldos reais, $c_1 \times 0{,}74 \approx 0{,}52$ é retido por causa do produto maior e $-c_2 \times 0{,}48 \approx 0{,}48$ por causa do juro menor.

3.4.2 A intuição, em quatro passos

1. **Rigidez nominal transforma moeda em saldos reais.** Como p_t foi fixado antes do choque, a expansão monetária não é absorvida por preços: os saldos reais sobem 1%. Com preços flexíveis, p_t subiria 1% e nada de real aconteceria.
2. **O juro cai, e o câmbio ultrapassa o longo prazo.** Para que o público aceite reter mais moeda, o custo de oportunidade — o juro nominal — tem de cair. Pela UIP, juro doméstico abaixo do externo exige **apreciação esperada**. Como no longo prazo o câmbio estará 1% mais depreciado, a única forma de esperar apreciação é depreciar hoje **mais** que 1%: é o *overshooting*, $\phi_2 > 1$. O termo $-c_2(1 - \phi_2)$ na chave do enunciado é negativo: é a parte do aumento dos saldos reais absorvida pela **queda do juro**, que por isso não precisa ser absorvida pelo produto. Daí a resposta ficar abaixo de $1/c_1$.
3. **A demanda agregada sobe por dois canais.** Com p_t fixo, a depreciação nominal é depreciação **real** de ϕ_2, que torna os bens domésticos mais competitivos (canal b_2). E a inflação esperada para $t+1$ sobe, enquanto o juro nominal cai: o **juro real cai**, estimulando a demanda (canal $-b_1 > 0$). A soma dá $\phi_2(b_2 - b_1)$.

4. **O efeito dura um período.** Em $t+1$ o preço incorpora e_t, os saldos reais e o câmbio real voltam ao normal e $y_{t+1} = \bar{y}$. A moeda é **neutra no longo prazo e não neutra no curto**. Além disso, só a parte **não antecipada** da moeda (e_t) tem efeito real: o crescimento esperado μ_0 já está embutido no preço fixado em $t-1$ e não aparece na fórmula. É a mesma mensagem da curva de oferta de Lucas, que aparece no Exercício 5.

3.4.3 Casos-limite

- **Demanda por moeda insensível ao juro** ($c_2 \to 0$): o juro não absorve nada, $\phi_2 \to 1/[c_1(b_2 - b_1)]$ e a resposta do produto vai a $(b_2 - b_1)/[c_1(b_2 - b_1)] = 1/c_1$. Todo o aumento dos saldos reais tem de ser retido por mais produto — a teoria quantitativa no curto prazo.
- **Armadilha da liquidez** ($c_2 \to -\infty$): a demanda por moeda absorve qualquer quantidade com uma variação infinitesimal do juro. O juro nominal praticamente não se mexe, não há *overshooting* ($\phi_2 \to 1$) e a resposta do produto vai a $b_2 - b_1$: só sobra o efeito da depreciação real de 1% e da queda de 1 p.p. no juro real, que vem da inflação esperada.

3.5 Exercício 5

Considere o modelo IS-LM de economia fechada e sem governo:

$$\begin{aligned} \text{IS:} \quad & y_t = -a r_t + u_t \\ \text{LM:} \quad & m_t - p_t = b y_t - c\, i_t + \nu_t \\ \text{Juros:} \quad & r_t = i_t - (E_t p_{t+1} - p_t) \\ \text{Oferta:} \quad & y_t = y^p + \alpha(p_t - E_{t-1} p_t) \\ \text{Regra monetária:} \quad & m_t = m_{t-1} + \varepsilon_t \end{aligned}$$

com ν_t, u_t e ε_t ruídos brancos i.i.d. Utilizando o método dos coeficientes indeterminados, encontre o produto e o preço de equilíbrio em expectativas racionais.

Suponho $a, b, c, \alpha > 0$ e os três choques mutuamente independentes. Na equação dos juros, a lista escreve $E[p_{t+1}]$; leio como $E_t p_{t+1}$, a expectativa formada com a informação de t, como no restante do enunciado.

Leitura do modelo. São cinco equações e cinco endógenas: y_t, r_t, i_t, p_t e m_t (esta determinada sozinha pela regra). A IS é a demanda por bens; a LM, a demanda por moeda; a terceira é a equação de Fisher; a quarta é a **oferta de Lucas**: o produto só se afasta do potencial quando o preço surpreende os agentes, isto é, quando difere do que se esperava em $t-1$. Há **duas** expectativas no modelo: $E_t p_{t+1}$, que entra no juro real (olha para a frente), e $E_{t-1} p_t$, que entra na oferta (foi formada no passado).

Passo 1: reduzir o modelo. O objetivo é eliminar r_t e i_t. Da IS, $r_t = (u_t - y_t)/a$. Da equação dos juros, $i_t = r_t + (E_t p_{t+1} - p_t) = (u_t - y_t)/a + (E_t p_{t+1} - p_t)$. Levando à LM:

$$m_t - p_t = b y_t - \frac{c}{a}(u_t - y_t) - c\,(E_t p_{t+1} - p_t) + \nu_t = \left(b + \frac{c}{a}\right) y_t - \frac{c}{a} u_t - c\,(E_t p_{t+1} - p_t) + \nu_t. \quad (48)$$

Defina $B \equiv b + c/a > 0$. O produto entra na LM por dois caminhos: diretamente (demanda transacional, b) e via juro (mais produto exige juro real mais alto na IS, o que reduz a demanda por moeda, c/a). Junto com a curva de oferta, a Equação 48 forma um sistema de duas equações em p_t e y_t.

Passo 2: estados e conjectura. O que está determinado em t:

- m_{t-1}, predeterminado, que resume todo o passado da moeda (passeio aleatório);
- os choques correntes ε_t, u_t e ν_t.

Não é preciso incluir m_t: como $m_t = m_{t-1} + \varepsilon_t$, ele já está coberto. E u_{t-1}, ν_{t-1} não ajudam a prever nada (ruídos brancos). Conjecture

$$p_t = \pi_0 + \pi_1 m_{t-1} + \pi_2 \varepsilon_t + \pi_3 u_t + \pi_4 \nu_t. \tag{49}$$

Passo 3: expectativas implicadas. Há duas.

- $E_{t-1}p_t$: em $t-1$, conhece-se m_{t-1}, mas não os choques de t, que têm média zero. Logo $E_{t-1}p_t = \pi_0 + \pi_1 m_{t-1}$.
- $E_t p_{t+1}$: avançando a conjectura, $p_{t+1} = \pi_0 + \pi_1 m_t + \pi_2 \varepsilon_{t+1} + \pi_3 u_{t+1} + \pi_4 \nu_{t+1}$. Em t, conhece-se m_t e os choques de $t+1$ têm média zero: $E_t p_{t+1} = \pi_0 + \pi_1 m_t = \pi_0 + \pi_1(m_{t-1} + \varepsilon_t)$.

Com elas, as duas combinações que entram no modelo são:

$$\begin{aligned} p_t - E_{t-1}p_t &= \pi_2 \varepsilon_t + \pi_3 u_t + \pi_4 \nu_t && \text{(surpresa de preços)}, \\ E_t p_{t+1} - p_t &= (\pi_1 - \pi_2)\varepsilon_t - \pi_3 u_t - \pi_4 \nu_t && \text{(inflação esperada)}. \end{aligned}$$

Pela oferta, o produto é

$$y_t = y^p + \alpha\left(\pi_2 \varepsilon_t + \pi_3 u_t + \pi_4 \nu_t\right).$$

Passo 4: substituir. Levando p_t, y_t e a inflação esperada à Equação 48, com $m_t = m_{t-1} + \varepsilon_t$ do lado esquerdo:

$$\begin{aligned} &\underbrace{(1-\pi_1)m_{t-1} + (1-\pi_2)\varepsilon_t - \pi_3 u_t - \pi_4 \nu_t - \pi_0}_{m_t - p_t} \\ &\quad = \underbrace{By^p + B\alpha\left(\pi_2 \varepsilon_t + \pi_3 u_t + \pi_4 \nu_t\right)}_{By_t} - \frac{c}{a} u_t - c\,\underbrace{\left[(\pi_1 - \pi_2)\varepsilon_t - \pi_3 u_t - \pi_4 \nu_t\right]}_{E_t p_{t+1} - p_t} + \nu_t. \end{aligned}$$

Passo 5: igualar coeficientes. Cinco termos, cinco equações:

$$
\begin{aligned}
m_{t-1}: \quad & 1-\pi_1 = 0 && \Rightarrow\ \pi_1 = 1, \\
\text{constante}: \quad & -\pi_0 = By^p && \Rightarrow\ \pi_0 = -\left(b + \tfrac{c}{a}\right) y^p, \\
\varepsilon_t: \quad & 1-\pi_2 = B\alpha\pi_2 - c(1-\pi_2) && \Rightarrow\ \pi_2 = \frac{1+c}{1+c+\alpha B}, \\
u_t: \quad & -\pi_3 = B\alpha\pi_3 - \tfrac{c}{a} + c\pi_3 && \Rightarrow\ \pi_3 = \frac{c/a}{1+c+\alpha B}, \\
\nu_t: \quad & -\pi_4 = B\alpha\pi_4 + c\pi_4 + 1 && \Rightarrow\ \pi_4 = -\frac{1}{1+c+\alpha B}.
\end{aligned}
$$

As contas, uma a uma. Em ε_t, com $\pi_1 = 1$: $1-\pi_2 = B\alpha\pi_2 - c + c\pi_2$, ou $1+c = \pi_2(1+c+B\alpha)$. Em u_t: passando os termos em π_3 para a direita, $c/a = \pi_3(1+c+B\alpha)$. Em ν_t: $-1 = \pi_4(1+c+B\alpha)$. As três têm o mesmo denominador.

Solução. Com $\Delta \equiv 1 + c + \alpha\,(b + c/a)$:

$$
\boxed{p_t = -\left(b + \frac{c}{a}\right) y^p + m_{t-1} + \frac{(1+c)\,\varepsilon_t + (c/a)\,u_t - \nu_t}{\Delta}} \tag{50}
$$

$$
\boxed{y_t = y^p + \frac{\alpha\,[(1+c)\,\varepsilon_t + (c/a)\,u_t - \nu_t]}{\Delta}} \tag{51}
$$

Conferência (choque de demanda por moeda). Com só $\nu_t = 1$: p_t cai $1/\Delta$ e y_t cai α/Δ; como $E_t p_{t+1}$ não muda, a inflação esperada sobe $1/\Delta$. Na Equação 48, o lado esquerdo varia $+1/\Delta$ e o direito $-B\alpha/\Delta - c/\Delta + 1 = (\Delta - \alpha B - c)/\Delta = 1/\Delta$. Os dois lados coincidem.

Interpretação.

- **Sinais.** Um choque monetário positivo eleva preço e produto; um choque de IS positivo também (desloca a demanda para cima); um aumento da demanda por moeda reduz os dois. Os três são choques de **demanda**, e o modelo não tem choque de oferta. Como a oferta diz $y_t - y^p = \alpha(p_t - E_{t-1}p_t)$, preço e produto sempre andam juntos: é uma demanda agregada que se desloca contra uma oferta positivamente inclinada no curto prazo.
- **O denominador comum.** $\Delta = 1 + c + \alpha B$ mostra por onde o choque é absorvido: pelo preço (o 1), pelo produto (αB: a surpresa de preço gera produto, que eleva a demanda por moeda) e pela inflação esperada (c: como o preço esperado para $t+1$ não depende dos choques transitórios de t, cada 1% a mais de preço hoje gera 1 p.p. a menos de inflação esperada, o que reduz o juro e eleva a demanda por moeda).
- **Por que $1+c$ no choque monetário?** Diferentemente de u_t e ν_t, o choque ε_t é permanente (a moeda é passeio aleatório): ele eleva $E_t p_{t+1}$ em um por um, mais que o preço de hoje. A inflação esperada **sobe**, o que reduz a demanda por moeda (via $-c\,i_t$) e amplifica o efeito sobre o preço corrente. Esse canal adicional é o c do numerador.
- **Só a moeda não antecipada importa.** O produto depende apenas das surpresas ε_t, u_t, ν_t; m_{t-1}, a parte da moeda prevista em $t-1$, entra **só no preço**, um por um. É a **proposição de ineficácia da política** de Sargent e Wallace (1975): uma regra monetária sistemática, conhecida pelos agentes, não afeta o produto, porque é incorporada nas expectativas que entram na oferta de Lucas.

- **Neutralidade de longo prazo.** Escrevendo em termos de m_t, $p_t = \pi_0 + m_t - (1-\pi_2)\varepsilon_t + \pi_3 u_t + \pi_4 \nu_t$, com $1-\pi_2 = \alpha B/\Delta$: no impacto, o preço sobe **menos** que a moeda, e os saldos reais aumentam. Pela Equação 48, esse aumento é retido por mais produto e pela inflação esperada mais alta: $(1-\pi_2)(1+c) = B\,\alpha\pi_2$. Em $t+1$, o preço incorpora todo o choque ($\pi_1 = 1$) e o produto volta a y^p.
- **O papel de α.** Se $\alpha \to 0$, a oferta é vertical: $y_t = y^p$ e o preço absorve todo choque — o caso clássico. Quanto maior α (oferta mais plana, preços menos sensíveis a surpresas), maior a parcela dos choques de demanda que vai para o produto.

3.5.1 Verificação numérica

Resolvo o sistema de coeficientes como um sistema linear, comparo com as fórmulas fechadas e simulo o modelo, conferindo que as cinco equações valem período a período.

```r
a <- 0.5; b <- 0.8; cc <- 2; alpha <- 1.5; yp <- 0
B <- b + cc / a; Dlt <- 1 + cc + alpha * B
fechado <- c(pi2 = (1 + cc) / Dlt, pi3 = (cc / a) / Dlt, pi4 = -1 / Dlt)
# sistema linear das equacoes de eps, u, nu (pi1 = 1 ja imposto)
A <- diag(3) * (1 + cc + alpha * B); rhs <- c(1 + cc, cc / a, -1)
numerico <- solve(A, rhs)
rbind(fechado, numerico) |> round(5)
```

```
             pi2     pi3      pi4
fechado  0.29412 0.39216 -0.09804
numerico 0.29412 0.39216 -0.09804
```

```r
set.seed(3); TT <- 500
eps <- rnorm(TT, 0, 0.01); u <- rnorm(TT, 0, 0.01); nu <- rnorm(TT, 0, 0.01)
m <- cumsum(eps); m_lag <- c(0, m[-TT])
p   <- -B * yp + m_lag + fechado["pi2"] * eps + fechado["pi3"] * u + fechado["pi4"] * nu
y   <- yp + alpha * (fechado["pi2"] * eps + fechado["pi3"] * u + fechado["pi4"] * nu)
Ep1 <- -B * yp + m                          # E_t p_{t+1}
Ep0 <- -B * yp + m_lag                      # E_{t-1} p_t
r   <- (u - y) / a                          # IS
i   <- r + (Ep1 - p)                        # juros
c(residuo_LM = max(abs((m - p) - (b * y - cc * i + nu))),
  residuo_oferta = max(abs(y - (yp + alpha * (p - Ep0))))) |> signif(3)
```

```
    residuo_LM residuo_oferta
      2.45e-16       9.37e-17
```

```python
a, b, c, alpha, yp = 0.5, 0.8, 2.0, 1.5, 0.0
B = b + c / a; Dlt = 1 + c + alpha * B
pi2, pi3, pi4 = (1 + c) / Dlt, (c / a) / Dlt, -1 / Dlt
rng = np.random.default_rng(3); TT = 500
```

```
eps, u, nu = (rng.normal(0, 0.01, TT) for _ in range(3))
m = np.cumsum(eps); m_lag = np.r_[0, m[:-1]]
p = -B * yp + m_lag + pi2 * eps + pi3 * u + pi4 * nu
y = yp + alpha * (pi2 * eps + pi3 * u + pi4 * nu)
i = (u - y) / a + (-B * yp + m - p)
print(f"max |residuo LM| = {np.abs((m - p) - (b * y - c * i + nu)).max():.1e}")
```

```
max |residuo LM| = 1.8e-16
```

```
print(f"efeito de 1% de moeda: preco {pi2:.3f}%, produto {alpha * pi2:.3f}%")
```

```
efeito de 1% de moeda: preco 0.294%, produto 0.441%
```

Com esses parâmetros, um choque monetário de 1% eleva o preço em 0,29% e o produto em 0,44% no impacto; no período seguinte, o preço completa o ajuste e o produto volta ao potencial.

4 Oferta e demanda agregada com expectativas racionais

Este capítulo segue a segunda nota de aula do professor, que reproduz a seção 10.3 de Blanchard e Fischer (1989). O modelo é o mais simples possível com **rigidez nominal de salários** e expectativas racionais: uma demanda agregada, um mercado de trabalho e um salário nominal fixado um período antes. Mesmo assim, ele responde a três perguntas que marcaram a macroeconomia dos anos 1970 e continuam no centro da política monetária:

1. Por que só a parte **não antecipada** da moeda afeta o produto?
2. A rigidez de salários **amplia ou atenua** o efeito de um choque de oferta, como um choque do petróleo?
3. Como o **Banco Central** deve reagir a um choque de oferta, se combater a inflação agrava a recessão e combater a recessão agrava a inflação?

A curva de oferta que sai do modelo é a mesma **curva de oferta de Lucas** do Exercício 5 da Seção 3 e do Exemplo 3 do Seção A. Lá ela foi postulada; aqui ela é **derivada** do mercado de trabalho, com outro mecanismo: não é informação imperfeita, é um contrato salarial.

4.1 Motivação: o choque do petróleo

O primeiro choque do petróleo, em 1973, criou um problema para economistas acostumados a pensar que os choques vinham da demanda. Um choque de demanda move preço e produto **na mesma direção**: mais demanda, mais produto e mais inflação. O que se viu foi o contrário: **inflação alta e recessão ao mesmo tempo**, a estagflação. O modelo deste capítulo dá a resposta mais simples possível: um choque **adverso de oferta** desloca a oferta agregada para a esquerda, e o novo equilíbrio tem preço mais alto e produto mais baixo.

O mesmo diagrama deixa claro o **dilema** do Banco Central. Contrair a moeda para conter a alta de preços aprofunda a recessão; expandir para sustentar o produto eleva ainda mais os preços. A pergunta que o modelo permite responder com precisão é qual das duas direções é a certa, e quanto.

4.2 O modelo

Todas as variáveis estão em logaritmos, e as constantes são omitidas:

$$\begin{aligned}
y_t^d &= m_t - p_t + v_t && \text{(demanda agregada)},\\
y_t^s &= \beta\,(p_t - w_t + u_t), \quad \beta > 0 && \text{(oferta de produto)},\\
n_t^d &= \gamma\,(p_t - w_t + \alpha u_t), \quad \gamma > 0,\ 0 \le \alpha \le 1 && \text{(demanda por trabalho)},\\
n_t^s &= \delta\,(w_t - p_t), \quad \delta \ge 0 && \text{(oferta de trabalho)},
\end{aligned} \tag{52}$$

em que y é o produto, m a moeda, p o nível de preços, w o salário nominal, n o emprego, v_t um choque de demanda e u_t um choque de oferta, que pode ser lido como **produtividade**.

Lendo cada equação.

- **Demanda agregada.** É a teoria quantitativa com velocidade exógena: $m - p + v$ são os saldos reais, mais um choque de velocidade ou de gasto. Ela é **negativamente inclinada** no plano (y, p): com m dado, um preço mais alto reduz os saldos reais e a demanda.
- **Oferta de produto e demanda por trabalho.** As duas dependem do **salário real** $w - p$: com salário real mais baixo, as firmas contratam mais e produzem mais. Um aumento de produtividade ($u_t > 0$) eleva as duas. O parâmetro α mede quanto a produtividade desloca a **demanda por trabalho**, em relação ao seu efeito sobre o produto. Segundo Blanchard e Fischer (1989), as duas equações podem ser derivadas da maximização de lucro em concorrência perfeita, e β, γ e α dependem da tecnologia.
- **Oferta de trabalho.** Cresce com o salário real, com elasticidade δ. Com $\delta = 0$, a oferta é inelástica (vertical); com $\delta \to \infty$, perfeitamente elástica (os trabalhadores aceitam qualquer emprego a um salário real fixo).

Informação. $E_{t-1}x_t$ é a expectativa de x_t com a informação de $t-1$: os valores passados dos choques, mas não os correntes. Para aliviar a notação, as fórmulas mais longas escrevem só Ex.

O modelo é resolvido duas vezes: com salário **flexível** (modelo clássico) e com salário **pré-fixado** (modelo keynesiano). A diferença entre os dois resultados mede o efeito da rigidez.

4.3 O modelo clássico

No modelo clássico, o salário nominal se ajusta dentro do período para equilibrar o mercado de trabalho: $n_t^d = n_t^s$.

Passo 1: o salário real de equilíbrio. Igualando demanda e oferta de trabalho,

$$\gamma\,(p_t - w_t + \alpha u_t) = \delta\,(w_t - p_t).$$

Passando os termos em $w_t - p_t$ para a direita: $\gamma\alpha u_t = \gamma(w_t - p_t) + \delta(w_t - p_t) = (\gamma + \delta)(w_t - p_t)$. Logo

$$w_t - p_t = \underbrace{\frac{\alpha\gamma}{\delta + \gamma}}_{\equiv\, a}\, u_t = a\, u_t, \qquad 0 \le a \le \alpha \le 1. \tag{53}$$

O salário real sobe com a produtividade. O coeficiente a é central no capítulo: ele mede **quanto do choque de produtividade vai para o salário real**. Dois casos extremos:

- $\delta \to \infty$ (oferta de trabalho perfeitamente elástica): $a = 0$. O salário real não se mexe, e todo o choque vai para o emprego.
- $\delta = 0$ (oferta inelástica) e $\alpha = 1$: $a = 1$. O emprego não se mexe, e todo o choque vai para o salário real.

Passo 2: a oferta agregada clássica. Levando a Equação 53 à oferta de produto, $y_t^s = \beta(u_t - a u_t)$:

$$y_t^s = \bar{y}_t = \beta\,(1 - a)\,u_t = \frac{\beta\,[\delta + \gamma(1 - \alpha)]}{\delta + \gamma}\,u_t. \tag{54}$$

As duas formas são iguais, porque $1-a=[\delta+\gamma-\alpha\gamma]/(\delta+\gamma)$. Este é o **produto potencial**. O preço **não aparece**: a oferta agregada clássica é **vertical**. A intuição: se o preço sobe 1%, o salário nominal sobe 1% para manter o mercado de trabalho em equilíbrio, o salário real fica onde estava e o emprego e a produção também.

Passo 3: o preço. Com o produto no potencial, a demanda agregada determina o preço: $p_t = m_t+v_t-\bar{y}_t$. É a dicotomia clássica da Seção 2.2: o lado real ($\bar{y}$, salário real, emprego) não depende da moeda, e a moeda só determina o nível de preços. **No modelo clássico, o produto de equilíbrio é sempre igual ao potencial.**

4.4 O modelo keynesiano

O modelo keynesiano supõe que o salário nominal é **fixo no curto prazo**. Mais precisamente: o salário de t é fixado em $t-1$, no nível que trabalhadores e firmas esperam que vá equilibrar o mercado de trabalho em t:

$$E_{t-1}n_t^d = E_{t-1}n_t^s, \tag{55}$$

e, uma vez fixado o salário, o emprego é determinado pela **demanda** por trabalho, $n_t = n_t^d$: as firmas contratam o que querem ao salário combinado. A hipótese é a contrapartida, para salários, da regra de preços pré-fixados de McCallum na Seção 2.7.

Passo 1: o salário nominal do contrato. Aplicando E_{t-1} às equações do mercado de trabalho na Equação 55, e usando que w_t **é conhecido em** $t-1$, de modo que $E_{t-1}w_t = w_t$:

$$\gamma\left(E_{t-1}p_t - w_t + \alpha E_{t-1}u_t\right) = \delta\left(w_t - E_{t-1}p_t\right).$$

É a mesma conta do Passo 1 clássico, com p_t e u_t trocados pelas expectativas. Logo

$$w_t = E_{t-1}p_t + a\,E_{t-1}u_t. \tag{56}$$

O salário nominal é o **preço esperado** mais a parte esperada do choque de produtividade que deve ir para o salário real. Inflação esperada vai integralmente para o salário; inflação **não esperada** não vai.

Passo 2: a curva de oferta de Lucas. Levando a Equação 56 à oferta de produto:

$$p_t - w_t + u_t = (p_t - E_{t-1}p_t) + (u_t - a\,E_{t-1}u_t),$$

e portanto

$$\boxed{y_t^s = \beta\left(p_t - E_{t-1}p_t\right) + \beta\left(u_t - a\,E_{t-1}u_t\right).} \tag{57}$$

É a **curva de oferta de Lucas**. Só a **surpresa** de preços, $p_t - E_{t-1}p_t$, afeta a oferta. A intuição: um aumento **não antecipado** do preço, com o salário nominal fixo, reduz o salário real; as firmas

contratam mais e produzem mais. Um aumento **antecipado** já foi incorporado ao salário e não muda nada.

> **i** Dois mecanismos, a mesma equação
>
> Em Lucas (1972) a mesma curva sai de **informação imperfeita**: cada produtor vê o seu preço, mas não o nível geral, e confunde parte de uma alta geral com uma alta relativa. Aqui ela sai de um **contrato salarial**: todos sabem o preço, mas o salário foi fixado antes. Os mecanismos são diferentes e as equações são as mesmas, como observam Blanchard e Fischer (1989). A diferença aparece na política: um contrato tem duração observável e pode ser **indexado**, como se vê na Seção 4.7.

4.4.1 O equilíbrio

O mercado de bens está em equilíbrio quando $y_t^d = y_t^s = y_t$.

Passo 3: preço e produto, ainda com $E_{t-1}p_t$. Igualando a demanda agregada e a Equação 57:

$$m_t - p_t + v_t = \beta\,(p_t - E_{t-1}p_t) + \beta\,(u_t - a\,E_{t-1}u_t).$$

Isolando p_t (os termos em p_t somam $(1+\beta)p_t$):

$$p_t = \frac{m_t + v_t + \beta E_{t-1}p_t - \beta\,(u_t - a\,E_{t-1}u_t)}{1+\beta}. \tag{58}$$

E, pela demanda, $y_t = m_t + v_t - p_t$:

$$y_t = \frac{\beta}{1+\beta}\left[m_t + v_t - E_{t-1}p_t + u_t - a\,E_{t-1}u_t\right]. \tag{59}$$

As duas ainda **não são soluções**: $E_{t-1}p_t$ é endógeno.

Passo 4: calcular $E_{t-1}p_t$. Aqui não é preciso conjecturar nada. Basta aplicar o operador E_{t-1} à própria Equação 58, usando duas regras do Seção A: o que é conhecido em $t-1$ sai da expectativa ($E_{t-1}E_{t-1}p_t = E_{t-1}p_t$ e $E_{t-1}E_{t-1}u_t = E_{t-1}u_t$) e a expectativa é linear:

$$E_{t-1}p_t = \frac{E_{t-1}m_t + E_{t-1}v_t + \beta E_{t-1}p_t - \beta(1-a)E_{t-1}u_t}{1+\beta}.$$

Multiplicando por $1+\beta$ e cancelando $\beta E_{t-1}p_t$ dos dois lados:

$$\boxed{E_{t-1}p_t = E_{t-1}m_t + E_{t-1}v_t - \beta\,(1-a)\,E_{t-1}u_t.} \tag{60}$$

O preço esperado é o preço **clássico esperado**: $E_{t-1}(m_t + v_t - \bar{y}_t)$. Faz sentido: na média, o contrato acerta, e a economia espera estar no equilíbrio clássico.

O atalho funciona porque o modelo é **estático**: só aparece $E_{t-1}p_t$, não $E_t p_{t+1}$, e a equação de p_t não envolve o futuro. Num modelo com $E_t p_{t+1}$, como os da Seção 3, aplicar o operador geraria $E_{t-1}p_{t+1}$, e seria preciso o método dos coeficientes indeterminados.

Passo 5: a solução. Levando a Equação 60 à Equação 59 e agrupando cada variável com a sua expectativa:

$$\boxed{y_t = \frac{\beta}{1+\beta}\left[(m_t - E_{t-1}m_t) + (v_t - E_{t-1}v_t) + (u_t - E_{t-1}u_t)\right] + \beta\,(1-a)\,E_{t-1}u_t.} \tag{61}$$

A conta: dentro dos colchetes da Equação 59, $-E_{t-1}p_t$ vira $-E_{t-1}m_t - E_{t-1}v_t + \beta(1-a)E_{t-1}u_t$. Os termos em u ficam $u_t - aE_{t-1}u_t + \beta(1-a)E_{t-1}u_t$. Somando e subtraindo $E_{t-1}u_t$, eles viram $(u_t - E_{t-1}u_t) + (1-a)E_{t-1}u_t + \beta(1-a)E_{t-1}u_t = (u_t - E_{t-1}u_t) + (1+\beta)(1-a)E_{t-1}u_t$. Multiplicado por $\beta/(1+\beta)$, o último pedaço dá $\beta(1-a)E_{t-1}u_t$.

Para o preço, subtraindo a Equação 60 da Equação 58:

$$p_t = E_{t-1}p_t + \frac{(m_t - E_{t-1}m_t) + (v_t - E_{t-1}v_t) - \beta\,(u_t - E_{t-1}u_t)}{1+\beta}. \tag{62}$$

O preço é o esperado mais uma fração $1/(1+\beta)$ das surpresas de demanda, menos uma fração $\beta/(1+\beta)$ da surpresa de oferta.

O que a solução diz.

- **Só a moeda não antecipada importa para o produto.** m_t entra na Equação 61 apenas como $m_t - E_{t-1}m_t$. A parte antecipada vai para o salário nominal (Equação 56) e para o preço. É a proposição de ineficácia de Sargent e Wallace (1975), agora com fundamento no mercado de trabalho.
- **Choques antecipados de oferta têm o mesmo efeito nos dois modelos.** O termo $\beta(1-a)E_{t-1}u_t$ é o efeito clássico da Equação 54: o que é esperado foi incorporado ao contrato.
- **Choques não antecipados se dividem entre preço e produto.** A fração $\beta/(1+\beta)$ vai para o produto. Quanto maior β (oferta mais elástica ao salário real), mais o choque move o produto e menos o preço.

Ferramenta — conferindo pelo método dos coeficientes indeterminados

Suponha m_t, v_t e u_t ruídos brancos, de modo que todas as expectativas de $t-1$ são zero. Conjecture $p_t = \pi_1 m_t + \pi_2 v_t + \pi_3 u_t$. Então $E_{t-1}p_t = 0$, e o equilíbrio fica $m_t - p_t + v_t = \beta p_t + \beta u_t$. Substituindo a conjectura e igualando coeficientes: m_t: $1 - \pi_1 = \beta\pi_1$; v_t: $1 - \pi_2 = \beta\pi_2$; u_t: $-\pi_3 = \beta\pi_3 + \beta$. Logo $\pi_1 = \pi_2 = 1/(1+\beta)$ e $\pi_3 = -\beta/(1+\beta)$, exatamente a Equação 62. Os dois caminhos dão o mesmo resultado; o atalho do Passo 4 é só mais curto.

4.4.2 A oferta agregada keynesiana

Para desenhar o modelo no plano (y, p), leve a Equação 60 à curva de Lucas. Com E_{t-1} escrito como E:

$$y_t^s = \beta p_t + \beta\left[u_t - Eu_t - Em_t - Ev_t\right] + \beta(1+\beta)(1-a)\,Eu_t. \tag{63}$$

A conta: $\beta(p_t - Ep_t) = \beta p_t - \beta Em_t - \beta Ev_t + \beta^2(1-a)Eu_t$, e $\beta(u_t - aEu_t) = \beta(u_t - Eu_t) + \beta(1-a)Eu_t$. Somando, os termos em Eu_t dão $\beta(1-a)(1+\beta)Eu_t$.

Dadas as expectativas, a oferta agregada keynesiana é **positivamente inclinada**: com inclinação β no eixo do produto (ou $1/\beta$ no eixo do preço). A intuição: dado o salário nominal do contrato, um preço mais alto reduz o salário real, eleva o emprego e o produto. O equilíbrio é o cruzamento com a demanda agregada.

4.5 Choques de oferta

Suponha um **choque adverso não antecipado de oferta**, como os choques do petróleo: u_t cai e $E_{t-1}u_t$ fica constante (os contratos já estavam assinados). Os dois modelos respondem assim:

- **Clássico** (Equação 54): a oferta vertical se desloca para a esquerda, de $\beta(1-a)$ por unidade de choque. O preço sobe ao longo da demanda agregada.
- **Keynesiano** (Equação 63): a oferta positivamente inclinada se desloca para a esquerda, de β por unidade de choque. O novo equilíbrio tem preço mais alto e produto mais baixo.

```
beta <- 1; a <- 0.7
y <- seq(-1, 0.6, by = 0.01)
curvas <- rbind(
  data.frame(modelo = "Clássico", curva = "demanda", y = y, p = -y),
  data.frame(modelo = "Clássico", curva = "oferta antes", y = 0, p = c(-0.6, 1.1)),
  data.frame(modelo = "Clássico", curva = "oferta depois", y = -beta * (1 - a), p = c(-0.6, 1.1
  data.frame(modelo = "Keynesiano", curva = "demanda", y = y, p = -y),
  data.frame(modelo = "Keynesiano", curva = "oferta antes", y = y, p = y / beta),
  data.frame(modelo = "Keynesiano", curva = "oferta depois", y = y, p = y / beta + 1)
)
curvas <- subset(curvas, p >= -0.6 & p <= 1.1)
pontos <- data.frame(modelo = c("Clássico", "Clássico", "Keynesiano", "Keynesiano"),
                     y = c(0, -beta * (1 - a), 0, -beta / (1 + beta)),
                     p = c(0, beta * (1 - a), 0, beta / (1 + beta)),
                     rotulo = c("A", "B", "A", "B"))
ggplot(curvas, aes(y, p, colour = curva, group = curva)) +
  geom_line(linewidth = 0.9) +
  geom_point(data = pontos, aes(y, p), inherit.aes = FALSE, size = 2) +
  geom_text(data = pontos, aes(y, p, label = rotulo), inherit.aes = FALSE,
            nudge_x = 0.07, nudge_y = 0.07) +
  facet_wrap(~ modelo) +
  scale_colour_manual(values = c(demanda = cz, `oferta antes` = az, `oferta depois` = vm)) +
  labs(x = "produto, y", y = "preço, p")
```

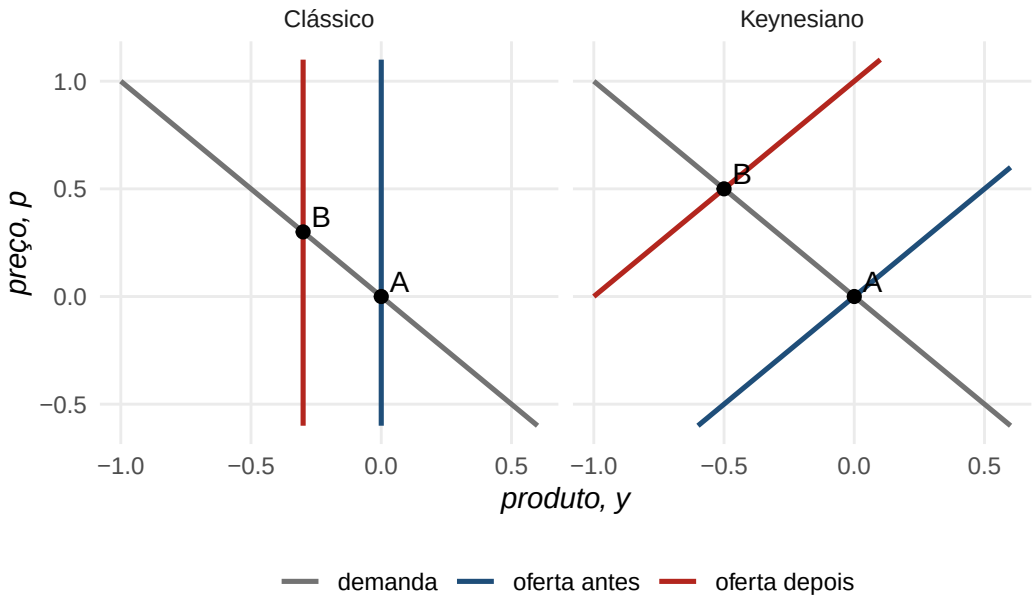


Figura 3: Choque adverso de oferta não antecipado (u cai uma unidade), com $\beta = 1$ e $a = 0{,}7$. A demanda agregada é a mesma nos dois painéis. Com esses parâmetros, o produto cai mais no modelo keynesiano (de 0 para $-0{,}5$) que no clássico (de 0 para $-0{,}3$).

4.5.1 A rigidez amplia ou atenua o choque?

O impacto nos dois modelos. Pela Equação 54, no modelo clássico

$$\frac{dy_t}{du_t} = \beta\,(1-a). \tag{64}$$

Pela Equação 61, no keynesiano, com $E_{t-1}u_t$ constante,

$$\frac{\partial y_t}{\partial u_t} = \frac{\beta}{1+\beta}. \tag{65}$$

A condição. A rigidez **amplia** o impacto de um choque de oferta não antecipado se $\beta/(1+\beta) > \beta(1-a)$, isto é,

$$\boxed{\frac{1}{1+\beta} > 1-a, \qquad a \equiv \frac{\alpha\gamma}{\delta+\gamma}.} \tag{66}$$

A intuição pelo salário real. O produto responde ao choque de produtividade **menos** o que o salário real absorve: $y = \beta(u - (w-p))$. Para uma queda unitária de u:

Tabela 6: Como o salário real absorve um choque adverso de oferta.

	Salário real cai	Produto cai
Clássico	a (o salário nominal se ajusta)	$\beta\,(1-a)$
Keynesiano	$\beta/(1+\beta)$ (o preço sobe, o salário nominal fica)	$\beta\,[1-\beta/(1+\beta)] = \beta/(1+\beta)$

A comparação é só sobre **quanto o salário real cai** em cada caso. No clássico, cai a, porque o mercado de trabalho se reequilibra. No keynesiano, o salário nominal não se mexe, mas o **preço sobe** $\beta/(1+\beta)$, e o salário real cai por essa via. A rigidez amplia o choque quando o salário real cai menos com ela: $\beta/(1+\beta) < a$, que é a Equação 66.

Blanchard e Fischer (1989) descrevem os dois efeitos em jogo:

- **Desestabilizador**: o salário nominal não pode responder ao **choque**. Se pudesse, cairia e amorteceria a queda do produto.
- **Estabilizador**: o salário nominal também não pode responder ao **preço**. O choque eleva o preço, o que reduz automaticamente o salário real.

Qual domina depende dos parâmetros. Os casos extremos ajudam:

- $a = 0$ (oferta de trabalho perfeitamente elástica, ou um salário real desejado fixo): no clássico, o salário real não cai e o produto cai β; com rigidez, cai só $\beta/(1+\beta)$. **A rigidez atenua.**
- $a = 1$ (oferta de trabalho inelástica e $\alpha = 1$): no clássico, o salário real absorve tudo e o produto **não cai**; com rigidez, cai $\beta/(1+\beta)$. **A rigidez amplia.**

Com $\beta = 1$, a fronteira é $a = 1/2$. Quanto mais inelástica a oferta de trabalho (maior a), menor a variabilidade do produto **sem** rigidez, e maior a chance de a rigidez desestabilizar o produto diante de choques de oferta.

E o preço? Ao longo da demanda agregada, com m e v dados, $\Delta p = -\Delta y$. Logo, sempre que a rigidez amplia a queda do produto, ela também amplia a alta de preços. No exemplo da Figura 3, o preço sobe 0,5 no keynesiano e 0,3 no clássico.

4.6 A reação do Banco Central

Diante de um choque adverso de oferta, o Banco Central enfrenta o dilema da motivação: contrair agrava a recessão, expandir agrava a inflação. O professor propõe um critério para escolher.

O critério. Sob certas hipóteses (concorrência e ausência de outras distorções), a economia com preços e salários flexíveis é **eficiente**: é o primeiro teorema do bem-estar. Então o Banco Central deve minimizar o desvio do produto em relação ao **equilíbrio clássico**, o produto potencial $\bar{y}_t$, isto é, minimizar o **hiato do produto**. Em outras palavras: quando há rigidez, a política monetária deve **levar a economia ao equilíbrio que ela teria sem rigidez**.

A regra. Diante de um choque adverso de oferta:

- se a queda do produto com rigidez é **maior** que no modelo clássico ($1/(1+\beta) > 1-a$), o Banco Central deve **expandir** a moeda (reduzir os juros);
- caso contrário, deve **contrair** (elevar os juros).

A conta. O resultado pode ser obtido explicitamente. Suponha que o Banco Central observe u_t e v_t **depois** de os salários terem sido fixados e responda com $m_t = E_{t-1}m_t + \kappa\,(u_t - E_{t-1}u_t) + \theta\,(v_t - E_{t-1}v_t)$. Subtraindo a Equação 54, escrita como $\bar{y}_t = \beta(1-a)(u_t - E_{t-1}u_t) + \beta(1-a)E_{t-1}u_t$, da Equação 61, o hiato é

$$y_t - \bar{y}_t = \frac{\beta}{1+\beta}\,(1+\theta)(v_t - E_{t-1}v_t) + \beta\left[\frac{1+\kappa}{1+\beta} - (1-a)\right](u_t - E_{t-1}u_t).$$

O hiato é zero para qualquer choque com

$$\theta = -1, \qquad \kappa = (1+\beta)(1-a) - 1. \tag{67}$$

Os choques de demanda devem ser **neutralizados** inteiramente ($\theta = -1$). Para um choque adverso de oferta ($u_t - E_{t-1}u_t < 0$), a surpresa monetária é $\kappa(u_t - E_{t-1}u_t)$, **positiva** quando $\kappa < 0$, isto é, quando $1/(1+\beta) > 1-a$. É exatamente a regra do professor: expandir quando a rigidez amplia o choque.

> **i** Isso não contradiz a ineficácia da política?
>
> Pela Equação 61, só a moeda não antecipada afeta o produto. A regra da Equação 67 é sistemática e conhecida, mas funciona porque responde a choques que o Banco Central observa **depois** de os contratos terem sido assinados: do ponto de vista de quem fixou o salário em $t-1$, a reação a u_t é uma surpresa. A política estabiliza não por enganar os agentes, mas por **agir com informação que os contratos não puderam usar**. Esse é o argumento de Fischer (1977) contra a proposição de Sargent e Wallace (1975): com contratos fixados antes, há espaço para política de estabilização mesmo com expectativas racionais.

Blanchard e Fischer (1989) acrescentam uma ressalva. O critério só vale se a rigidez nominal for a **única** distorção. Com salários de eficiência, por exemplo, não há razão para dar muito peso normativo ao equilíbrio sem rigidez. E se o "choque de oferta" for, na verdade, uma pressão salarial vinda do poder de barganha dos sindicatos, a melhor política pode ser anular seu efeito sobre o emprego com expansão monetária. Uma análise normativa completa exige modelos com microfundamentos, que são o tema do Bloco 2 do curso.

4.7 Extensão: indexação salarial

A seção 10.3 de Blanchard e Fischer (1989) continua com um tema que a nota do professor não cobre, mas que usa o mesmo modelo e tem história no Brasil: a **indexação dos salários** ao nível de preços. A indexação parecia boa ideia nos anos 1970, porque protege o salário real contra inflação não esperada e reduz o efeito real dos choques nominais. Os grandes choques de oferta da década puseram essa conclusão em xeque, com as análises de Gray (1976) e Fischer (1977). No Brasil, a indexação generalizada foi peça central da inflação inercial até o Plano Real, tema de Dornbusch e Simonsen (1983).

O modelo. O salário passa a responder em parte à surpresa de preços, com grau de indexação $\lambda \in [0,1]$:

$$w_t = [E_{t-1}p_t + a\,E_{t-1}u_t] + \lambda\,(p_t - E_{t-1}p_t).$$

Levando à oferta de produto, como no Passo 2:

$$y_t^s = \beta(1-\lambda)(p_t - E_{t-1}p_t) + \beta\,(u_t - a\,E_{t-1}u_t).$$

Com indexação plena ($\lambda = 1$), surpresas de preço não afetam o produto: a oferta volta a ser vertical **para choques nominais**.

A solução. Com $v_t \equiv 0$ e m_t, u_t ruídos brancos (todas as expectativas zero), o equilíbrio é $m_t - p_t = \beta(1-\lambda)p_t + \beta u_t$. Com $D \equiv 1 + \beta(1-\lambda)$:

$$p_t = \frac{m_t - \beta u_t}{D}, \qquad y_t = m_t - p_t = \frac{\beta(1-\lambda)\,m_t + \beta u_t}{D}. \tag{68}$$

Mais indexação (λ maior, D menor):

- **eleva a variância do preço**, que responde mais a moeda e a choques de oferta;
- **reduz** o efeito da moeda sobre o produto, $\beta(1-\lambda)/D$;
- **aumenta** o efeito do choque de oferta sobre o produto, β/D, porque impede que o salário real caia via preço.

O grau ótimo. Com o objetivo de minimizar a variância do hiato $y_t - \bar{y}_t$, com $\bar{y}_t = \beta(1-a)u_t$:

$$y_t - \bar{y}_t = \frac{\beta(1-\lambda)}{D}\,m_t + \beta\left[\frac{1}{D} - (1-a)\right]u_t.$$

Defina $z \equiv 1/D$, de modo que $\beta(1-\lambda)/D = 1 - z$. Com choques independentes, a variância do hiato é

$$V(z) = (1-z)^2\,\sigma_m^2 + \beta^2\,\left[z - (1-a)\right]^2\,\sigma_u^2.$$

A condição de primeira ordem, $-(1-z)\sigma_m^2 + \beta^2[z-(1-a)]\sigma_u^2 = 0$, dá

$$z^* = \frac{\sigma_m^2 + \beta^2(1-a)\,\sigma_u^2}{\sigma_m^2 + \beta^2\sigma_u^2}, \qquad \lambda^* = 1 - \frac{1}{\beta}\left(\frac{1}{z^*} - 1\right). \tag{69}$$

Os dois casos de Blanchard e Fischer (1989) saem direto:

- **só choques nominais** ($\sigma_u^2 = 0$): $z^* = 1$ e $\lambda^* = 1$. Indexação plena.
- **só choques de oferta** ($\sigma_m^2 = 0$): $z^* = 1 - a$ e $\lambda^* = 1 - a/[(1-a)\beta] < 1$. Convém deixar o salário real cair com o choque, e a indexação deve ser parcial (se a fórmula der negativo, o ótimo restrito é $\lambda = 0$).

No caso geral, λ^* **cai** com a importância relativa dos choques de oferta, σ_u^2/σ_m^2. Na medida em que os anos 1970 foram um período de grandes choques de oferta, a indexação plena foi uma má ideia.

4.8 Laboratório computacional em R e Python

4.8.1 (a) Simulação e conferência da solução

Simulo o modelo keynesiano com choques ruído branco, construo preço e produto pela Equação 62 e pela Equação 61, confiro que demanda e oferta de Lucas valem período a período e recupero os coeficientes por regressão.

```
set.seed(10); TT <- 5000; beta <- 1; a <- 0.7
m <- rnorm(TT, 0, 0.01); v <- rnorm(TT, 0, 0.01); u <- rnorm(TT, 0, 0.01)
p <- (m + v - beta * u) / (1 + beta)          # E_{t-1} p_t = 0
y <- beta / (1 + beta) * (m + v + u)
c(residuo_demanda = max(abs(y - (m - p + v))),
  residuo_oferta  = max(abs(y - (beta * p + beta * u)))) |> signif(3)
```

```
residuo_demanda  residuo_oferta
       6.94e-18        3.47e-18
```

```
coef(lm(y ~ m + v + u)) |> round(3)
```

```
(Intercept)           m           v           u
        0.0         0.5         0.5         0.5
```

Os três coeficientes são $\beta/(1+\beta) = 0{,}5$: com $\beta = 1$, metade de cada surpresa vai para o produto. No modelo clássico, o coeficiente de u seria $\beta(1-a) = 0{,}3$, e os de m e v, zero.

4.8.2 (b) Quando a rigidez amplia o choque

A razão entre o impacto keynesiano e o clássico é $\frac{\beta/(1+\beta)}{\beta(1-a)} = \frac{1}{(1+\beta)(1-a)}$. Acima de 1, a rigidez amplia o choque.

```
grade <- expand.grid(a = seq(0, 0.9, by = 0.01), beta = c(0.5, 1, 2))
grade$razao <- 1 / ((1 + grade$beta) * (1 - grade$a))
grade$beta <- factor(paste("beta =", grade$beta), levels = paste("beta =", c(0.5, 1, 2)))
ggplot(grade, aes(a, razao, colour = beta)) +
  geom_hline(yintercept = 1, colour = cz, linetype = "dotted") +
  geom_line(linewidth = 0.9) +
  scale_colour_manual(values = c(az, vd, vm)) +
  coord_cartesian(ylim = c(0, 3)) +
  labs(x = "a: parcela do choque que vai para o salário real", y = "queda com rigidez / sem rig
```

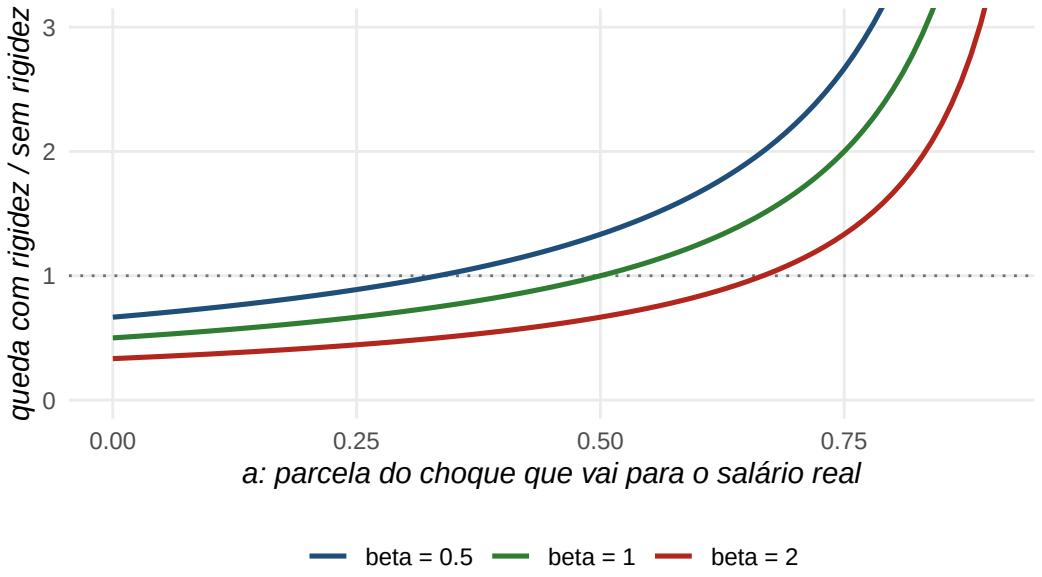


Figura 4: Razão entre a queda do produto com e sem rigidez salarial, após um choque adverso de oferta não antecipado, em função de a. Acima da linha pontilhada, a rigidez amplia o choque.

A fronteira é $a = \beta/(1+\beta)$: 0,33 com $\beta = 0{,}5$; 0,5 com $\beta = 1$; 0,67 com $\beta = 2$. Quanto mais elástica a oferta de produto, maior precisa ser a para que a rigidez desestabilize.

4.8.3 (c) A política que fecha o hiato

Comparo o hiato com a moeda passiva ($m_t = 0$) e com a regra da Equação 67, usando os mesmos choques de oferta e de demanda da simulação anterior.

```
kappa <- (1 + beta) * (1 - a) - 1; theta <- -1
hiato <- function(m) beta / (1 + beta) * (m + v + u) - beta * (1 - a) * u
c(kappa = kappa,
  dp_hiato_moeda_passiva = sd(hiato(0 * u)),
  dp_hiato_com_regra = sd(hiato(kappa * u + theta * v))) |> signif(3)
```

```
                kappa dp_hiato_moeda_passiva     dp_hiato_com_regra
          -4.00e-01               5.35e-03               3.23e-19
```

Com $\beta = 1$ e $a = 0{,}7$, $\kappa = -0{,}4$: uma queda de 1% em u pede uma expansão monetária surpresa de 0,4%. Com a regra, o hiato desaparece.

4.8.4 (d) Indexação ótima

Na versão Python, confiro a Equação 69 por busca numérica: calculo a variância do hiato numa grade de λ e comparo o mínimo com a fórmula fechada.

```
import numpy as np
def lambda_otimo(beta, a, sm2, su2):
    z = (sm2 + beta**2 * (1 - a) * su2) / (sm2 + beta**2 * su2)
    return 1 - (1 / z - 1) / beta
def var_hiato(lam, beta, a, sm2, su2):
    D = 1 + beta * (1 - lam)
    return (beta * (1 - lam) / D)**2 * sm2 + beta**2 * (1 / D - (1 - a))**2 * su2
beta, a = 1.0, 0.3
grade = np.linspace(-1, 1, 200001)
for razao in (0.0, 0.5, 1.0, 4.0):                # sigma_u^2 / sigma_m^2
    sm2, su2 = 1.0, razao
    num = grade[np.argmin(var_hiato(grade, beta, a, sm2, su2))]
    print(f"su2/sm2 = {razao:3.1f}: lambda* formula = {lambda_otimo(beta, a, sm2, su2):.4f}, "
          f"busca = {num:.4f}")
```

```
su2/sm2 = 0.0: lambda* formula = 1.0000, busca = 1.0000
su2/sm2 = 0.5: lambda* formula = 0.8889, busca = 0.8889
su2/sm2 = 1.0: lambda* formula = 0.8235, busca = 0.8235
su2/sm2 = 4.0: lambda* formula = 0.6842, busca = 0.6842
```

A fórmula e a busca coincidem. Com $\beta = 1$ e $a = 0{,}3$, o grau ótimo de indexação cai de 1, sem choques de oferta, para $1 - 0{,}3/0{,}7 \approx 0{,}57$ quando só há choques de oferta.

! Resumo do capítulo

1. Com salário flexível, a oferta agregada é vertical no potencial $\bar{y}_t = \beta(1-a)u_t$, e a moeda só afeta preços.
2. Com salário fixado em $t-1$ para equilibrar o mercado de trabalho esperado, sai a curva de oferta de Lucas: só surpresas de preço afetam o produto, e só a moeda não antecipada tem efeito real.
3. O equilíbrio se resolve aplicando E_{t-1} à equação do preço: o preço esperado é o clássico esperado, e as surpresas se dividem entre preço e produto na proporção $1 : \beta$.
4. A rigidez amplia o efeito de um choque adverso de oferta se e só se $1/(1+\beta) > 1-a$, isto é, se o salário real cai menos com rigidez do que cairia sem ela.
5. Se a rigidez é a única distorção, o Banco Central deve fechar o hiato: neutralizar choques de demanda e, diante de um choque adverso de oferta, expandir quando a rigidez amplia o choque e contrair quando o atenua.
6. Indexação protege contra choques nominais e expõe a choques de oferta; o grau ótimo cai com o peso relativo dos choques de oferta.

4.9 Exercícios

1. Mostre que, com $a = 0$, a rigidez salarial sempre atenua o efeito de um choque de oferta não antecipado. Qual é a hipótese econômica por trás de $a = 0$?
2. Suponha um choque de oferta **antecipado**: $E_{t-1}u_t$ cai uma unidade e u_t cai junto, de modo que $u_t - E_{t-1}u_t = 0$. Compare a resposta do produto nos dois modelos.
3. No modelo com indexação, calcule $\partial y_t/\partial u_t$ e mostre que ele cresce com λ. Interprete.
4. Por que, neste modelo, sempre que a rigidez amplia a queda do produto diante de um choque de oferta ela também amplia a alta de preços?
5. Com $\beta = 2$ e $a = 0{,}5$, o Banco Central deve expandir ou contrair diante de um choque adverso de oferta? De quanto deve ser a surpresa monetária para uma queda de 1% em u_t?

4.10 Gabarito dos Exercícios

1. Com $a = 0$, o impacto clássico é β e o keynesiano, $\beta/(1+\beta) < \beta$. A condição da Equação 66, $1/(1+\beta) > 1$, nunca vale. $a = 0$ significa que o salário real de equilíbrio não responde à produtividade: oferta de trabalho perfeitamente elástica ($\delta \to \infty$), ou trabalhadores que desejam um salário real constante, qualquer que seja o emprego. Sem rigidez, o salário real não cai e o produto absorve o choque inteiro; com rigidez, a alta de preços reduz o salário real e amortece o choque.
2. Pela Equação 61, com $u_t - E_{t-1}u_t = 0$, só sobra $\beta(1-a)E_{t-1}u_t$: o produto cai $\beta(1-a)$, o mesmo que no modelo clássico. O choque antecipado foi incorporado ao contrato, via $aE_{t-1}u_t$ na Equação 56, e a rigidez não importa.
3. Pela Equação 68, $\partial y_t/\partial u_t = \beta/[1+\beta(1-\lambda)]$, crescente em λ: vai de $\beta/(1+\beta)$ sem indexação a β com indexação plena. Com indexação, o salário nominal acompanha a alta de preços provocada pelo choque, o salário real não cai e o produto absorve todo o choque.
4. Com m_t e v_t dados, a demanda agregada impõe $p_t = m_t + v_t - y_t$, então $\Delta p_t = -\Delta y_t$ nos dois modelos. Como os dois equilíbrios estão sobre a mesma demanda, uma queda maior do produto implica uma alta maior do preço.
5. $1/(1+\beta) = 1/3$ e $1-a = 0{,}5$: a condição não vale, a rigidez **atenua** o choque, e o Banco Central deve **contrair**. $\kappa = (1+\beta)(1-a) - 1 = 3 \times 0{,}5 - 1 = 0{,}5$: para $u_t - E_{t-1}u_t = -1\%$, a surpresa monetária é $\kappa \times (-1\%) = -0{,}5\%$. Conferência: sem política, o produto cai $\beta/(1+\beta) = 0{,}667$ e o potencial cai $\beta(1-a) = 1$; a contração reduz o produto em mais $\frac{\beta}{1+\beta} \times 0{,}5 = 0{,}333$, e a queda total, 1, iguala a do potencial.

A O método dos coeficientes indeterminados

O método apareceu na Seção 2.4.2 e foi usado em todos os exercícios da Seção 3. Este apêndice o trata como ferramenta: por que ele funciona, quais regras de expectativa ele usa, o que fazer quando a conjectura está errada e como ele escolhe entre soluções múltiplas. Cada ideia vem com um exemplo resolvido passo a passo, do mais simples ao mais completo.

> **A ideia central**
>
> Num modelo linear com expectativas racionais, a solução é uma função linear das **variáveis de estado**. Em vez de calcular todas as expectativas futuras (a solução *forward*), **chuta-se a forma** da solução com coeficientes desconhecidos, calcula-se a expectativa que esse chute implica e exige-se que o modelo valha para qualquer realização dos choques. Isso dá um sistema de equações nos coeficientes. Se o sistema tem solução, o chute estava certo.

A.1 Por que igualar coeficientes funciona

Depois de substituir a conjectura no modelo, chega-se sempre a uma equação do tipo

$$A_0 + A_1 w_{1t} + A_2 w_{2t} + \cdots + A_k w_{kt} = 0, \tag{70}$$

em que os w_{it} são as variáveis de estado e os A_i dependem dos parâmetros do modelo e dos coeficientes desconhecidos. A Equação 70 não é uma equação a ser resolvida para os w: ela tem de valer **em todo período e para qualquer valor** que os estados possam assumir, porque a solução tem de valer em qualquer história de choques.

O argumento é simples. Se os estados podem variar livremente uns em relação aos outros:

- escolha a realização em que todos os w_{it} são zero: a equação vira $A_0 = 0$;
- escolha $w_{1t} = 1$ e os demais zero: a equação vira $A_0 + A_1 = 0$, logo $A_1 = 0$;
- e assim por diante para cada estado.

Portanto, **cada coeficiente tem de ser zero**. Cada estado gera uma equação, e a constante, mais uma. É por isso que se "igualam os coeficientes dos dois lados".

O argumento exige que os estados **não sejam combinações lineares uns dos outros**. Se a conjectura incluir m_t, m_{t-1} e e_t juntos, com $m_t = \mu_0 + m_{t-1} + e_t$, não é possível mover m_t sem mover m_{t-1} ou e_t, e os coeficientes deixam de ser identificados: o sistema tem infinitas soluções, todas descrevendo a mesma trajetória. A regra prática é usar **ou** m_t, **ou** o par (m_{t-1}, e_t), nunca os três. Foi o que se fez na Seção 2.4.2, que escreveu a mesma solução das duas formas (Equações 21 e 22).

Uma segunda exigência: os coeficientes são **constantes**, não dependem de t. É isso que permite tirar os coeficientes de dentro das expectativas, $E_t(\phi_1 x_{t+1}) = \phi_1 E_t x_{t+1}$, e avançar a conjectura um período usando os **mesmos** ϕ.

A.2 As regras de expectativa

O passo que mais gera erros é o cálculo da expectativa implicada. Ele usa sempre as mesmas regras.

Tabela 7: Regras de expectativa, com η_t ruído branco de média zero.

Processo	$E_t x_{t+1}$	$E_t x_{t+j}$	$E_{t-1} x_t$
ruído branco, $x_t = \eta_t$	0	0	0
passeio aleatório, $x_t = x_{t-1} + \eta_t$	x_t	x_t	x_{t-1}
passeio com drift, $x_t = \mu + x_{t-1} + \eta_t$	$x_t + \mu$	$x_t + j\mu$	$x_{t-1} + \mu$
AR(1), $x_t = \rho x_{t-1} + \eta_t$	ρx_t	$\rho^j x_t$	ρx_{t-1}

Mais três regras completam o ferramental:

1. **O que já é conhecido sai da expectativa.** $E_t x_t = x_t$ e $E_t x_{t-1} = x_{t-1}$. Em particular, E_{t-1} de uma variável predeterminada em t (m_{t-1}, y_{t-1}) é ela mesma.
2. **Linearidade.** $E_t(a + b\,x_{t+1} + c\,z_{t+1}) = a + b\,E_t x_{t+1} + c\,E_t z_{t+1}$.
3. **Expectativas iteradas.** $E_t\left(E_{t+1} x_{t+2}\right) = E_t x_{t+2}$: o que se espera hoje sobre a previsão de amanhã é a previsão de hoje. É essa regra que permite iterar uma equação para a frente.

Atenção ao índice da expectativa. E_t usa a informação de t, inclusive os choques de t; E_{t-1} não os conhece. No Exercício 5 da Seção 3 aparecem as duas, e a diferença entre elas é exatamente a **surpresa**: $p_t - E_{t-1} p_t$ só contém os choques de t.

A.3 Exemplo 1: uma equação *forward* com choque AR(1)

Considere a equação mais simples com expectativas:

$$x_t = a\,E_t x_{t+1} + z_t, \qquad 0 < a < 1, \qquad z_t = \rho z_{t-1} + \eta_t, \quad |\rho| < 1. \tag{71}$$

É a forma compacta da Equação 36 (câmbio real) e da equação de Cagan (câmbio nominal): a variável de hoje depende de um fundamento e da expectativa sobre ela mesma amanhã.

Passo 1: estados. A equação não tem variável defasada de x. O único determinante é z_t, e ele resume todo o passado relevante, porque é AR(1): para prever z_{t+1}, basta z_t. O estado é z_t.

Passo 2: conjectura. Como z_t tem média zero e a equação não tem constante, não é preciso constante:

$$x_t = \phi\, z_t.$$

Passo 3: expectativa implicada. Avançando um período, $x_{t+1} = \phi\, z_{t+1}$. Pela Tabela 7, $E_t z_{t+1} = \rho z_t$, então

$$E_t x_{t+1} = \phi\rho\, z_t.$$

Passo 4: substituir. Levando conjectura e expectativa à Equação 71:

$$\phi\, z_t = a\,\phi\rho\, z_t + z_t.$$

Passo 5: igualar coeficientes. Há um só estado. Coeficiente de z_t: $\phi = a\rho\phi + 1$, logo

$$\boxed{\phi = \frac{1}{1-a\rho}, \qquad x_t = \frac{z_t}{1-a\rho}.} \tag{72}$$

Conferência. Com $a = 0{,}5$ e $\rho = 0{,}8$: $\phi = 1/0{,}6 \approx 1{,}667$. Se $z_t = 1$, $x_t = 1{,}667$ e $E_t x_{t+1} = 1{,}667 \times 0{,}8 = 1{,}333$. O lado direito da Equação 71 dá $0{,}5 \times 1{,}333 + 1 = 1{,}667$. Confere.

Conferência pela solução *forward*. Iterando a Equação 71, $x_t = \sum_{j\geq 0} a^j E_t z_{t+j} = \sum_{j\geq 0} a^j \rho^j z_t = z_t/(1-a\rho)$. A mesma resposta, sem precisar somar a série.

O que o resultado ensina. O multiplicador $1/(1-a\rho)$ cresce com a persistência ρ: com $\rho = 0$, é 1 (só o choque de hoje importa); com $\rho \to 1$, vai a $1/(1-a)$ (o choque de hoje vale para sempre, e todos os períodos futuros contribuem). É o que separou os Exercícios 1 e 2 da lista, e é a crítica de Lucas em miniatura: o coeficiente da solução depende do processo do choque, não só dos parâmetros "estruturais" a.

A.3.1 E se a conjectura estiver errada?

O método é tolerante, e ensina algo nos dois tipos de erro.

Estado a mais: o coeficiente sai zero. Suponha que, por precaução, se inclua z_{t-1}: $x_t = \phi_1 z_t + \phi_2 z_{t-1}$. Então $x_{t+1} = \phi_1 z_{t+1} + \phi_2 z_t$ e $E_t x_{t+1} = \phi_1\rho z_t + \phi_2 z_t$. Substituindo:

$$\phi_1 z_t + \phi_2 z_{t-1} = a(\phi_1\rho + \phi_2) z_t + z_t.$$

Coeficiente de z_{t-1}: $\phi_2 = 0$. O método descarta sozinho o estado supérfluo. Com $\phi_2 = 0$, o coeficiente de z_t volta a dar a 1.

Estado a menos: o sistema não tem solução. Suponha agora que z_t tenha média não nula, $z_t = \bar{z} + \eta_t$ com η_t ruído branco, e que se esqueça a constante: $x_t = \phi z_t$. Então $E_t x_{t+1} = \phi\bar{z}$ e

$$\phi\bar{z} + \phi\eta_t = a\phi\bar{z} + \bar{z} + \eta_t.$$

Coeficiente de η_t: $\phi = 1$. Constante: $\bar{z} = a\bar{z} + \bar{z}$, isto é, $a\bar{z} = 0$, o que é falso. Mais equações que incógnitas e nenhuma solução: **é o sinal de que falta um estado** (aqui, a constante). Com $x_t = \phi_0 + \phi_1\eta_t$, sai $\phi_1 = 1$ e $\phi_0 = \bar{z}/(1-a)$.

A regra prática: na dúvida, **inclua** o estado. Se ele sobrar, o coeficiente sai zero; se faltar, o sistema avisa.

A.4 Exemplo 2: com variável defasada, duas raízes

Quando a variável endógena defasada entra no modelo, o método fica mais interessante. É o caso de modelos com persistência (hábito, indexação, custos de ajuste) e da curva de Phillips híbrida:

$$x_t = a\,E_t x_{t+1} + b\,x_{t-1} + z_t, \qquad z_t = \rho z_{t-1} + \eta_t. \tag{73}$$

Passo 1: estados. Agora há dois: x_{t-1}, predeterminado, e z_t.

Passo 2: conjectura.

$$x_t = \lambda\,x_{t-1} + \phi\,z_t.$$

Passo 3: expectativa implicada. Avançando um período, $x_{t+1} = \lambda x_t + \phi z_{t+1}$. Aqui está o cuidado: x_t é conhecido em t, mas ainda está escrito em termos da conjectura. Então

$$E_t x_{t+1} = \lambda x_t + \phi\rho z_t = \lambda\,(\lambda x_{t-1} + \phi z_t) + \phi\rho z_t = \lambda^2 x_{t-1} + \phi(\lambda+\rho) z_t.$$

Passo 4: substituir.

$$\lambda x_{t-1} + \phi z_t = a\lambda^2 x_{t-1} + a\phi(\lambda+\rho) z_t + b\,x_{t-1} + z_t.$$

Passo 5: igualar coeficientes.

$$\begin{aligned} x_{t-1}: \quad & \lambda = a\lambda^2 + b && \Longrightarrow\ a\lambda^2 - \lambda + b = 0, \\ z_t: \quad & \phi = a\phi(\lambda+\rho) + 1 && \Longrightarrow\ \phi = \frac{1}{1 - a(\lambda+\rho)}. \end{aligned}$$

A equação de λ é **quadrática**, com duas raízes:

$$\lambda_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4ab}}{2a}.$$

Com $a = 0{,}5$ e $b = 0{,}3$: $\sqrt{1 - 0{,}6} = 0{,}632$, e as raízes são $\lambda_- = 0{,}368$ e $\lambda_+ = 1{,}632$. **As duas satisfazem o modelo.** Qual escolher?

Critério 1: estabilidade. Com $\lambda_+ > 1$, qualquer desvio de x cresce explosivamente, mesmo sem novos choques. A solução não explosiva é $\lambda_- = 0{,}368$. A condição geral para que exista exatamente uma solução estável é o critério de Blanchard e Kahn (1980): o número de raízes instáveis tem de ser igual ao número de variáveis *forward-looking* (aqui, uma: x_t, que depende de $E_t x_{t+1}$).

Critério 2: estado mínimo (MSV). McCallum (1983) propõe outra pergunta: qual raiz continua fazendo sentido quando a defasagem some? Se $b \to 0$, o modelo vira o Exemplo 1, cuja solução não

tem x_{t-1}, isto é, $\lambda = 0$. Nesse limite, $\lambda_- = [1 - \sqrt{1-4ab}]/(2a) \to 0$, enquanto $\lambda_+ \to 1/a$. A solução MSV é a que varia **continuamente** com os parâmetros até o caso sem defasagem: λ_-. Na maioria dos modelos usados em política monetária, os dois critérios escolhem a mesma raiz.

Com $\lambda = 0{,}368$ e $\rho = 0{,}5$, $\phi = 1/[1 - 0{,}5 \times 0{,}868] = 1/0{,}566 \approx 1{,}766$. A solução é

$$x_t = 0{,}368\, x_{t-1} + 1{,}766\, z_t.$$

A dinâmica. Agora a persistência tem duas fontes: a do choque (ρ) e a do próprio modelo (λ). Mesmo com choque ruído branco ($\rho = 0$), x_t é persistente: $x_t, x_{t+1}, x_{t+2}, \cdots = \phi,\ \lambda\phi,\ \lambda^2\phi, \ldots$ Esse é o **mecanismo de propagação** que faltava no Exercício 1 da lista.

A.4.1 A ligação com as bolhas

O Exemplo 2 explica a caixa sobre bolhas da Seção 2.4.1. Volte ao Exemplo 1 ($b = 0$) e, por excesso de zelo, inclua x_{t-1} na conjectura. A equação de λ vira $\lambda = a\lambda^2$, com raízes $\lambda = 0$ e $\lambda = 1/a > 1$. A primeira é a solução de fundamentos, a 1. A segunda é uma solução explosiva que nada tem a ver com z_t: é uma **bolha**. Incluir estados que o modelo não pede abre espaço para soluções espúrias; o critério MSV — usar só os estados necessários — as elimina. É isso que significa dizer que o método, aplicado com o menor conjunto de estados, "seleciona automaticamente" a solução de fundamentos.

A.5 Exemplo 3: duas expectativas e a ineficácia da política

O último exemplo é o esqueleto do Exercício 5 da lista, com a LM reduzida à teoria quantitativa para deixar a álgebra mínima:

$$\begin{aligned} m_t - p_t &= y_t && \text{(demanda por moeda)},\\ y_t &= \alpha\,(p_t - E_{t-1}p_t)\,, \quad \alpha > 0 && \text{(oferta de Lucas)},\\ m_t &= m_{t-1} + \gamma\, y_{t-1} + \varepsilon_t && \text{(regra monetária)}, \end{aligned} \tag{74}$$

com ε_t ruído branco e o produto potencial normalizado em zero. A regra tem uma parte **sistemática**, que responde ao produto passado com intensidade γ (com $\gamma < 0$, o Banco Central contrai a moeda quando o produto está alto), e uma parte **aleatória**, ε_t.

Passo 1: estados. Predeterminados em t: m_{t-1} e y_{t-1}. Choque corrente: ε_t. Não uso m_t, que é combinação dos três.

Passo 2: conjectura.

$$p_t = \pi_0 + \pi_1 m_{t-1} + \pi_2 y_{t-1} + \pi_3 \varepsilon_t.$$

Passo 3: expectativa implicada. Só aparece $E_{t-1}p_t$. Em $t-1$, conhecem-se m_{t-1} e y_{t-1} (regra 1 da seção anterior), e $E_{t-1}\varepsilon_t = 0$:

$$E_{t-1}p_t = \pi_0 + \pi_1 m_{t-1} + \pi_2 y_{t-1} \quad \Longrightarrow \quad p_t - E_{t-1}p_t = \pi_3 \varepsilon_t.$$

A surpresa de preços só contém o choque não antecipado. Pela oferta, $y_t = \alpha\pi_3\varepsilon_t$.

Passo 4: substituir na demanda por moeda. Com $m_t = m_{t-1} + \gamma y_{t-1} + \varepsilon_t$:

$$m_{t-1} + \gamma y_{t-1} + \varepsilon_t - \pi_0 - \pi_1 m_{t-1} - \pi_2 y_{t-1} - \pi_3\varepsilon_t = \alpha\pi_3\varepsilon_t.$$

Passo 5: igualar coeficientes.

Tabela 8: Coeficientes do Exemplo 3.

termo	equação	coeficiente
constante	$-\pi_0 = 0$	$\pi_0 = 0$
m_{t-1}	$1 - \pi_1 = 0$	$\pi_1 = 1$
y_{t-1}	$\gamma - \pi_2 = 0$	$\pi_2 = \gamma$
ε_t	$1 - \pi_3 = \alpha\pi_3$	$\pi_3 = 1/(1+\alpha)$

A solução é

$$\boxed{p_t = m_{t-1} + \gamma\, y_{t-1} + \frac{\varepsilon_t}{1+\alpha}, \qquad y_t = \frac{\alpha}{1+\alpha}\,\varepsilon_t.} \tag{75}$$

O que o resultado ensina. O parâmetro da regra, γ, aparece no **preço** — que incorpora um por um a moeda prevista, $m_{t-1} + \gamma y_{t-1}$ — mas **não no produto**. Qualquer que seja a regra sistemática, o produto só responde à parte não antecipada da moeda. É a proposição de ineficácia de Sargent e Wallace (1975), obtida aqui em cinco linhas. O método deixa claro de onde ela vem: a parte sistemática da política está em $E_{t-1}p_t$ e se cancela na surpresa $p_t - E_{t-1}p_t$.

O resultado depende de a regra usar informação que os agentes **também** têm em $t-1$. Se os preços fossem fixados antes de o Banco Central reagir (preços rígidos por mais de um período), ou se ele tivesse informação melhor que o público, γ passaria a afetar o produto. É esse o ponto de partida dos modelos de rigidez nominal que vêm adiante no curso.

A.6 Roteiro e erros comuns

Ferramenta — roteiro do método

1. Reduza o modelo a uma equação (ou sistema) nas endógenas de interesse.
2. Liste os estados: defasagens que aparecem no modelo, choques correntes e processos exógenos persistentes. Não use estados linearmente dependentes.
3. Conjecture uma função linear dos estados, com constante se houver termos constantes.
4. Avance a conjectura um período, aplique as regras da Tabela 7 e escreva a expectativa **só em termos dos estados de** t (substitua x_t pela conjectura, se preciso).
5. Substitua, agrupe por estado e iguale cada coeficiente a zero.
6. Resolva de trás para a frente: primeiro os coeficientes dos estados, por último a constante.
7. Se aparecerem raízes múltiplas, escolha a estável / MSV.

8. Confira: escolha valores para os estados e verifique a equação original à mão.

Os erros mais frequentes:

- **Esquecer de substituir x_t dentro da expectativa.** No Exemplo 2, $E_t x_{t+1} = \lambda x_t + ...$ ainda contém x_t, que tem de virar $\lambda x_{t-1} + \phi z_t$ antes de igualar.
- **Confundir E_t com E_{t-1}.** $E_t \varepsilon_t = \varepsilon_t$, mas $E_{t-1}\varepsilon_t = 0$.
- **Esquecer o drift.** Para $\Delta m_t = \mu_0 + e_t$, $E_t m_{t+1} = m_t + \mu_0$, e o μ_0 vai parar na constante (como o $-\mu_0 c_2$ do Exercício 3 da lista).
- **Usar estados colineares**, como m_t, m_{t-1} e e_t juntos: o sistema fica com infinitas soluções.
- **Resolver a constante primeiro.** A equação da constante costuma conter os outros coeficientes (no Exercício 3, $c_2 \pi_1 \mu_0$). Resolva-a por último.

A.7 Verificação numérica

Resolvo o Exemplo 2 para as duas raízes, simulo o modelo e confiro que a Equação 73 vale período a período nas duas — o que mostra que ambas são soluções e só a estabilidade as separa. Depois, traço a resposta a um choque para três valores de ρ.

```
a <- 0.5; b <- 0.3; rho <- 0.5
raizes <- (1 + c(-1, 1) * sqrt(1 - 4 * a * b)) / (2 * a)
simula <- function(lam, TT = 60) {
  phi <- 1 / (1 - a * (lam + rho))
  set.seed(11); eta <- rnorm(TT, 0, 0.01)
  z <- as.numeric(stats::filter(eta, rho, method = "recursive"))
  x <- numeric(TT); x[1] <- phi * z[1]
  for (t in 2:TT) x[t] <- lam * x[t - 1] + phi * z[t]
  Ex <- lam * x + phi * rho * z                    # E_t x_{t+1}
  x_lag <- c(0, x[-TT])
  c(lambda = lam, phi = phi,
    residuo_relativo = max(abs(x - (a * Ex + b * x_lag + z))) / max(abs(x)),
    max_abs_x = max(abs(x)))
}
rbind(estavel = simula(raizes[1]), explosiva = simula(raizes[2])) |> signif(3)
```

```
          lambda    phi residuo_relativo max_abs_x
estavel    0.368   1.77         1.37e-16  5.05e-02
explosiva  1.630 -15.10         1.19e-16  1.03e+12
```

Os resíduos, medidos em relação ao tamanho de x, são zero até a precisão da máquina nas duas raízes: ambas resolvem o modelo. Mas, com a raiz explosiva, x atinge valores astronômicos em 60 períodos, partindo de choques de 1%.

```r
irf <- do.call(rbind, lapply(c(0, 0.5, 0.9), function(r) {
  lam <- raizes[1]; phi <- 1 / (1 - a * (lam + r)); H <- 0:12
  x <- numeric(length(H)); x[1] <- phi
  for (h in 2:length(H)) x[h] <- lam * x[h - 1] + phi * r^(h - 1)
  data.frame(h = H, x = x, rho = paste("rho =", r))
}))
ggplot(irf, aes(h, x, colour = rho)) +
  geom_hline(yintercept = 0, colour = cz, linetype = "dotted") +
  geom_line(linewidth = 0.9) + geom_point(size = 1.4) +
  scale_colour_manual(values = c(az, vd, vm)) +
  labs(x = "períodos após o choque", y = "resposta de x")
```

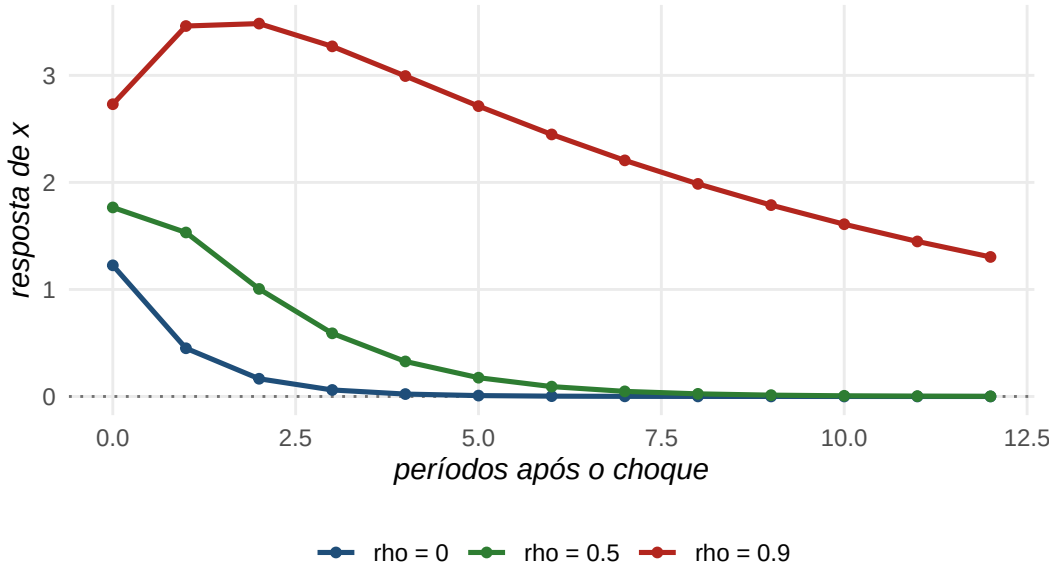


Figura 5: Exemplo 2: resposta de x_t a um choque unitário em z no período 0, com a raiz estável $\lambda = 0{,}368$, para três graus de persistência do choque.

Com $\rho = 0$, toda a persistência vem do próprio modelo e a resposta decai à taxa λ. Quanto mais persistente o choque, maior o impacto (porque ϕ cresce com ρ) e mais lenta a volta. Com $\rho = 0{,}9$, a resposta chega a **subir** antes de cair, em forma de corcova: nos primeiros períodos, o choque, que ainda está quase inteiro, soma-se à inércia do próprio x (λx_{t-1}). As duas fontes de persistência juntas geram dinâmicas que nenhuma delas gera sozinha.

```python
import numpy as np
a, b, rho = 0.5, 0.3, 0.5
lam_est, lam_exp = (1 + np.array([-1, 1]) * np.sqrt(1 - 4 * a * b)) / (2 * a)
# coeficientes como raizes do polinomio a*lam^2 - lam + b
print("raizes numericas:", np.sort(np.roots([a, -1, b])).round(4),
      "| formula:", np.round([lam_est, lam_exp], 4))
```

```
raizes numericas: [0.3675 1.6325] | formula: [0.3675 1.6325]
```

```
phi = 1 / (1 - a * (lam_est + rho))
# Exemplo 3: a regra gamma nao muda a resposta do produto
alpha = 2.0
for gamma in (-0.5, 0.0, 0.5):
    rng = np.random.default_rng(5); TT = 200
    eps = rng.normal(0, 0.01, TT)
    m = np.zeros(TT); y = np.zeros(TT); p = np.zeros(TT)
    for t in range(1, TT):
        m[t] = m[t - 1] + gamma * y[t - 1] + eps[t]
        p[t] = m[t - 1] + gamma * y[t - 1] + eps[t] / (1 + alpha)
        y[t] = m[t] - p[t]
    Ep = m[:-1] + gamma * y[:-1]                    # E_{t-1} p_t
    res = y[1:] - alpha * (p[1:] - Ep)
    print(f"gamma = {gamma:+.1f}: dp(y) = {y.std():.5f}, dp(p) = {p.std():.4f}, "
          f"max |residuo oferta| = {np.abs(res).max():.1e}")
```

```
gamma = -0.5: dp(y) = 0.00640, dp(p) = 0.0424, max |residuo oferta| = 5.6e-17
gamma = +0.0: dp(y) = 0.00640, dp(p) = 0.0637, max |residuo oferta| = 5.6e-17
gamma = +0.5: dp(y) = 0.00640, dp(p) = 0.0850, max |residuo oferta| = 1.1e-16
```

No Exemplo 3, o desvio-padrão do produto é o mesmo para as três regras, enquanto o do preço muda: a regra sistemática só afeta variáveis nominais.

A.8 Onde estudar

Em ordem sugerida:

1. **McCallum (1996), cap. 8.** É a fonte da lista e do roteiro usado aqui. Faça os problemas do fim do capítulo.
2. **McCallum (1989)**, capítulo sobre expectativas racionais. O mesmo método em economia fechada, com mais exemplos.
3. **Blanchard e Fischer (1989), cap. 5.** A melhor referência para entender por que o método funciona: relação com a solução *forward*, bolhas e escolha entre soluções múltiplas.
4. **Romer (2019)**, no modelo de Lucas com informação imperfeita, resolvido por "chutar e verificar", e **Walsh (2017)**, que usa o método em todos os modelos de política monetária, inclusive os novo-keynesianos.
5. **Os fundamentos.** McCallum (1983) introduz a solução de estado mínimo (MSV); Blanchard e Kahn (1980) dão as condições de unicidade para sistemas lineares; Sargent e Wallace (1975) usam o método para chegar à ineficácia da política.
6. **Para modelos grandes.** Uhlig (1999) e Christiano (2002) mostram que o mesmo método, em forma matricial, resolve qualquer modelo DSGE linearizado — o mesmo problema que programas como o Dynare resolvem por métodos matriciais.

A.9 Exercícios

1. Resolva $x_t = a\,E_t x_{t+1} + z_t$ com $z_t = \mu + \rho z_{t-1} + \eta_t$ (AR(1) com constante). Que conjectura é necessária?
2. No Exemplo 3, acrescente um choque de demanda por moeda: $m_t - p_t = y_t + v_t$, com v_t ruído branco. Encontre p_t e y_t. A regra γ continua sem efeito sobre o produto?
3. No Exemplo 2 com $\rho = 0$, encontre ϕ e a trajetória de x após um choque unitário em z_0, com $a = 0{,}5$ e $b = 0{,}3$.
4. No Exemplo 2, mostre que, se $b \to 0$, a solução com λ_- converge para a

    1.

A.10 Gabarito

1. Conjecture $x_t = \phi_0 + \phi_1 z_t$ (agora a constante é necessária). Então $E_t x_{t+1} = \phi_0 + \phi_1(\mu + \rho z_t)$ e $\phi_0 + \phi_1 z_t = a\phi_0 + a\phi_1\mu + a\phi_1\rho z_t + z_t$. Coeficiente de z_t: $\phi_1 = 1/(1 - a\rho)$, como antes. Constante: $\phi_0(1-a) = a\phi_1\mu$, logo $\phi_0 = a\mu/[(1-a)(1-a\rho)]$.
2. Conjecture $p_t = \pi_0 + \pi_1 m_{t-1} + \pi_2 y_{t-1} + \pi_3\varepsilon_t + \pi_4 v_t$. A surpresa é $\pi_3\varepsilon_t + \pi_4 v_t$, e $y_t = \alpha(\pi_3\varepsilon_t + \pi_4 v_t)$. Na demanda por moeda, os coeficientes de m_{t-1} e y_{t-1} dão de novo $\pi_1 = 1$ e $\pi_2 = \gamma$; o de ε_t dá $\pi_3 = 1/(1+\alpha)$; o de v_t, $-\pi_4 = \alpha\pi_4 + 1$, dá $\pi_4 = -1/(1+\alpha)$. Logo $y_t = \alpha(\varepsilon_t - v_t)/(1+\alpha)$: γ continua sem efeito sobre o produto.
3. Com $\rho = 0$, $\phi = 1/(1 - a\lambda) = 1/(1 - 0{,}5 \times 0{,}368) \approx 1{,}225$. A trajetória é $x_0 = 1{,}225$, $x_1 = \lambda x_0 \approx 0{,}450$, $x_2 \approx 0{,}166$, $x_3 \approx 0{,}061$, …, decaindo à taxa $\lambda = 0{,}368$.
4. Com $b \to 0$, $\sqrt{1 - 4ab} \approx 1 - 2ab$, logo $\lambda_- \approx b \to 0$ e $\phi \to 1/(1 - a\rho)$, que é a 1. Já $\lambda_+ \to 1/a$, a raiz da bolha.

Referências

Blanchard, Olivier J., e Stanley Fischer. 1989. *Lectures on Macroeconomics*. The MIT Press.

Blanchard, Olivier J., e Charles M. Kahn. 1980. "The Solution of Linear Difference Models under Rational Expectations". *Econometrica* 48 (5): 1305–11.

Cagan, Phillip. 1956. "The Monetary Dynamics of Hyperinflation". Em *Studies in the Quantity Theory of Money*, organizado por Milton Friedman. University of Chicago Press.

Christiano, Lawrence J. 2002. "Solving Dynamic Equilibrium Models by a Method of Undetermined Coefficients". *Computational Economics* 20 (1–2): 21–55.

Dornbusch, Rudiger. 1976. "Expectations and Exchange Rate Dynamics". *Journal of Political Economy* 84 (6): 1161–76.

Dornbusch, Rudiger, e Mario Henrique Simonsen. 1983. *Inflation, Debt, and Indexation*. MIT Press.

Fischer, Stanley. 1977. "Long-Term Contracts, Rational Expectations, and the Optimal Money Supply Rule". *Journal of Political Economy* 85 (1): 191–205.

Galí, Jordi. 2008. *Monetary Policy, Inflation, and the Business Cycle: An Introduction to the New Keynesian Framework*. Princeton University Press.

Gray, Jo Anna. 1976. "Wage Indexation: A Macroeconomic Approach". *Journal of Monetary Economics* 2 (2): 221–35.

Hall, Robert E. 1978. "Stochastic Implications of the Life Cycle-Permanent Income Hypothesis: Theory and Evidence". *Journal of Political Economy* 86 (6): 971–87.

Kydland, Finn E., e Edward C. Prescott. 1977. "Rules Rather than Discretion: The Inconsistency of Optimal Plans". *Journal of Political Economy* 85 (3): 473–92.

Lucas, Jr., Robert E. 1972. "Expectations and the Neutrality of Money". *Journal of Economic Theory* 4 (2): 103–24.

Lucas, Jr., Robert E. 1976. "Econometric Policy Evaluation: A Critique". *Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy* 1: 19–46.

McCallum, Bennett T. 1983. "On Non-Uniqueness in Rational Expectations Models: An Attempt at Perspective". *Journal of Monetary Economics* 11 (2): 139–68.

McCallum, Bennett T. 1989. *Monetary Economics: Theory and Policy*. Macmillan.

McCallum, Bennett T. 1996. *International Monetary Economics*. Oxford University Press.

Muth, John F. 1961. "Rational Expectations and the Theory of Price Movements". *Econometrica*

29 (3): 315–35.

Romer, David. 2019. *Advanced Macroeconomics*. 5º ed. McGraw-Hill.

Sargent, Thomas J., e Neil Wallace. 1975. "'Rational' Expectations, the Optimal Monetary Instrument, and the Optimal Money Supply Rule". *Journal of Political Economy* 83 (2): 241–54.

Stockman, Alan C. 1987. "The Equilibrium Approach to Exchange Rates". *Federal Reserve Bank of Richmond Economic Review* 73 (2): 12–30.

Taylor, John B. 1980. "Aggregate Dynamics and Staggered Contracts". *Journal of Political Economy* 88 (1): 1–23.

Uhlig, Harald. 1999. "A Toolkit for Analysing Nonlinear Dynamic Stochastic Models Easily". Em *Computational Methods for the Study of Dynamic Economies*, organizado por Ramon Marimon e Andrew Scott. Oxford University Press.

Walsh, Carl E. 2017. *Monetary Theory and Policy*. 4º ed. MIT Press.

Woodford, Michael. 2003. *Interest and Prices: Foundations of a Theory of Monetary Policy*. Princeton University Press.