FGV EPGE
ESCOLA BRASILEIRA DE ECONOMIA E FINANÇAS

Notas de Aula de Microeconomia para o Mestrado e Doutorado em Economia

MFEE/FGV — Professor Carlos Eugênio Ellery Lustosa da Costa

Vitor Wilher[1]

Versão preliminar — compilada ao longo do curso. Baseada nos slides da disciplina (Prof. Carlos Eugênio da Costa), em Jehle e Reny (2011) e em Varian (2015).

[1]Bacharel e Mestre em Economia pela UFF, Candidato ao PhD em Economia pela EPGE/FGV. É Especialista em Ciências de Dados e Inteligência Artificial Generativa pela PUC-Rio. Atualmente, exerce a função de Data Tech Lead na Análise Macro (http://analisemacro.com.br). Saiba mais em https://github.com/vitorwilher.

Índice

1 Introdução **5**
- 1.1 O programa do curso: três perguntas, uma arquitetura . . . 5
- 1.2 O mapa das aulas . . . 6
- 1.3 O kit matemático que usaremos o tempo todo . . . 7
  - 1.3.1 Otimização com restrição: o Lagrangeano . . . 7
  - 1.3.2 O teorema do envelope: por que funções-valor são fáceis de derivar . . . 8
  - 1.3.3 Convexidade, concavidade e o sinal das segundas ordens . . . 8
- 1.4 Como usar estas notas . . . 8

2 A Escolha Individual **9**
- 2.1 Os quatro elementos da abordagem das preferências . . . 9
  - 2.1.1 O conjunto de consumo . . . 9
  - 2.1.2 O conjunto orçamentário . . . 10
  - 2.1.3 Implicações da restrição linear: a demanda marshalliana . . . 10
- 2.2 A relação de preferências e seus axiomas . . . 11
  - 2.2.1 Os dois axiomas de racionalidade . . . 11
  - 2.2.2 Os axiomas de regularidade . . . 12
- 2.3 A hipótese comportamental e a existência de solução . . . 13
- 2.4 A representação por uma função utilidade . . . 13
  - 2.4.1 De u para a racionalidade (fácil) . . . 13
  - 2.4.2 Da racionalidade para u (o teorema de existência) . . . 14
- 2.5 A taxa marginal de substituição . . . 15
- 2.6 Laboratório computacional em R . . . 15
- 2.7 Exercícios . . . 16

3 O Problema do Consumidor **17**
- 3.1 O problema de maximização da utilidade . . . 17
  - 3.1.1 Existência e unicidade . . . 17
  - 3.1.2 As condições de Kuhn-Tucker . . . 18
- 3.2 Demanda marshalliana e utilidade indireta . . . 19
  - 3.2.1 Propriedades da utilidade indireta . . . 19
  - 3.2.2 Propriedades da demanda marshalliana . . . 20
- 3.3 O problema dual: minimização de despesa . . . 20
  - 3.3.1 Propriedades da função despesa . . . 20
  - 3.3.2 Propriedades da demanda hicksiana . . . 21
- 3.4 Dualidade . . . 21
- 3.5 A equação de Slutsky . . . 22
  - 3.5.1 Em elasticidades, e a simetria de Slutsky . . . 23
- 3.6 Bem-estar: medindo a perda de uma mudança de preço . . . 23
- 3.7 Laboratório computacional em R . . . 23
- 3.8 Exercícios . . . 25

4 Equilíbrio Parcial **26**
- 4.1 Da demanda individual à demanda de mercado . . . 26
  - 4.1.1 O problema da agregação . . . 26
  - 4.1.2 Preferências quase-lineares . . . 27
- 4.2 A oferta de mercado . . . 28
- 4.3 Equilíbrio de mercado . . . 28
- 4.4 Bem-estar: excedentes e eficiência . . . 29
  - 4.4.1 Excedentes como estatísticas suficientes . . . 29
  - 4.4.2 O Primeiro Teorema do Bem-Estar (versão parcial) . . . 30
- 4.5 Estática comparativa . . . 31

4.6 Impostos . . . 32
4.6.1 Irrelevância da incidência legal . . . 32
4.6.2 Repasse e incidência econômica . . . 32
4.6.3 Peso morto . . . 33
4.7 O longo prazo: entrada e saída . . . 34
4.8 Monopólio . . . 34
4.8.1 Receita marginal e elasticidade . . . 35
4.8.2 O problema do monopolista . . . 35
4.9 Laboratório computacional em R . . . 36
4.10 Exercícios . . . 37

5 Equilíbrio Geral **38**
5.1 A economia de trocas . . . 38
5.1.1 O ambiente . . . 38
5.1.2 A caixa de Edgeworth . . . 38
5.1.3 O problema do agente: renda endógena . . . 38
5.2 O equilíbrio walrasiano . . . 39
5.2.1 A demanda excedente agregada . . . 40
5.2.2 A Lei de Walras . . . 40
5.3 Existência de equilíbrio . . . 41
5.4 Equilíbrio e eficiência . . . 42
5.4.1 O Primeiro Teorema do Bem-Estar . . . 43
5.4.2 O Segundo Teorema do Bem-Estar . . . 43
5.5 A economia com produção . . . 44
5.6 Laboratório computacional em R . . . 45
5.7 Exercícios . . . 46

6 A Teoria da Firma **48**
6.1 A tecnologia de produto único . . . 48
6.2 Minimização de custos . . . 49
6.2.1 Propriedades da função custo . . . 49
6.2.2 Custos como função de y . . . 50
6.3 Maximização de lucro . . . 51
6.3.1 Oferta e a condição de encerramento . . . 51
6.3.2 O excedente do produtor . . . 51
6.3.3 Demanda de insumos: condicional × não-condicional . . . 52
6.3.4 Existência: retornos crescentes . . . 52
6.4 Curto e longo prazos . . . 53
6.5 Sobre os objetivos da firma . . . 53
6.6 Laboratório computacional em R . . . 54
6.7 Exercícios . . . 55

7 A Escolha sob Incerteza e Finanças **57**
7.1 Loterias e os axiomas de von Neumann–Morgenstern . . . 57
7.1.1 O teorema da utilidade esperada . . . 58
7.2 Loterias monetárias e aversão ao risco . . . 59
7.2.1 Equivalente de certeza e prêmios . . . 60
7.3 Medidas de tolerância ao risco: Arrow–Pratt . . . 61
7.3.1 A aproximação de Arrow–Pratt . . . 62
7.3.2 Renda e aversão ao risco . . . 62
7.3.3 As famílias CARA, CRRA e HARA . . . 63
7.3.4 Preferências sobre renda ou sobre cestas? . . . 63
7.4 Dominância estocástica . . . 63
7.5 Aplicação — o problema de portfólio . . . 65

7.6 Críticas: Rabin e Allais . . . 65
7.6.1 O paradoxo de calibração de Rabin . . . 65
7.6.2 O paradoxo de Allais . . . 66
7.7 Laboratório computacional em R . . . 66
7.8 Exercícios . . . 68

8 Produção **69**
8.1 Tecnologia . . . 69
8.2 Maximização de lucro . . . 70
8.2.1 Propriedades da função lucro . . . 70
8.2.2 Propriedades da função oferta . . . 71
8.3 Agregação . . . 72
8.4 Eficiência . . . 73
8.5 Sobre os objetivos da firma, de novo . . . 73
8.6 Laboratório computacional em R . . . 74
8.7 Exercícios . . . 75

9 Tópicos em Teoria da Escolha **76**
9.1 Utilidade e bem-estar . . . 76
9.2 Comprando e vendendo . . . 77
9.2.1 Oferta de trabalho . . . 77
9.2.2 Escolha intertemporal . . . 78
9.3 Restrições orçamentárias não-lineares . . . 78
9.4 Demanda condicional e a segunda lei da demanda . . . 79
9.5 Demanda Frisch e variações transitórias dos preços . . . 80
9.6 Separabilidade . . . 80
9.6.1 O teorema do bem composto . . . 81
9.6.2 Separabilidade fraca . . . 81
9.6.3 Two-stage budgeting . . . 82
9.6.4 Separabilidade forte (ou aditiva) . . . 82
9.7 Laboratório computacional em R . . . 82
9.8 Exercícios . . . 83

10 Gabaritos das Listas de Exercícios **85**
10.1 Lista 1 — Restrição, preferências e demanda . . . 85
10.1.1 Questão 1 — A reta orçamentária . . . 85
10.1.2 Questão 2 — Por que curvas de indiferença não se cruzam . . . 86
10.1.3 Questão 3 — Racionalidade e a condição de tangência . . . 86
10.1.4 Questão 4 — Complementares perfeitos (Leontief) . . . 87
10.1.5 Questão 5 — Cobb-Douglas . . . 87
10.1.6 Questão 6 — Utilidade CES . . . 88
10.1.7 Questão 7 — Transformação monótona . . . 89
10.2 Lista 2 — Dualidade, Slutsky e formas funcionais . . . 89
10.2.1 Questão 1 — Utilidade Stone-Geary (o sistema de gasto linear) . . . 89
10.2.2 Questão 2 — Demanda marshalliana, hicksiana e a função dispêndio . . . 90
10.2.3 Questão 3 — CES: homogeneidade e simetria de Slutsky ($\rho = \frac{3}{2}$) . . . 91
10.2.4 Questão 4 — Utilidade indireta da Cobb-Douglas e identidade de Roy . . . 92
10.3 Verificação numérica em R . . . 93

11 Referências **95**

1 Introdução

Microeconomia é o estudo das **decisões individuais** — de consumidores e de firmas — e de como essas decisões, postas em contato umas com as outras nos mercados, produzem um resultado coletivo: preços, quantidades trocadas, alocação de recursos. O curso adota integralmente o método que organiza a teoria econômica moderna, o **individualismo metodológico**: toda explicação de um fenômeno agregado parte da compreensão das motivações individuais, impõe **consistência recíproca** entre essas motivações por meio do conceito de **equilíbrio**, e retorna ao indivíduo para avaliar o impacto das interações sociais (Jehle e Reny 2011; Varian 2015).

O objetivo destas notas é **organizar o curso em torno desse método**, mostrando, a cada passo, três coisas: (i) a **motivação econômica** — que pergunta o modelo responde; (ii) a **estrutura axiomática e a derivação matemática** — quais hipóteses (axiomas) impomos sobre o comportamento e que teoremas delas decorrem; e (iii) a **estática comparativa** — o que acontece com a escolha de equilíbrio quando um preço, a renda ou um parâmetro muda, lido sempre em diagramas e em equações.

A referência central é Jehle e Reny (2011), complementada por Varian (2015) (e, para resultados clássicos, por Mas-Colell et al. (1995), Debreu (1959) e Starr (2009)). Ao longo do texto indicamos as fontes originais — Samuelson (1938) sobre preferências reveladas, Slutsky (1915) sobre a decomposição do efeito-preço, Roy (1947) sobre a identidade que leva seu nome, Neumann e Morgenstern (1944) sobre utilidade esperada e Arrow e Debreu (1954) sobre a existência de equilíbrio geral.

1.1 O programa do curso: três perguntas, uma arquitetura

A teoria microeconômica competitiva é construída em **três movimentos**, e o curso inteiro é a repetição deste mesmo esqueleto em ambientes cada vez mais ricos. Vale a pena enxergar a arquitetura antes de entrar nos detalhes.

1. **O indivíduo otimiza.** Dado um ambiente (preços, renda, tecnologia), cada agente escolhe a **melhor** alternativa factível. Para o consumidor, isso é maximizar uma relação de preferências sujeita à restrição orçamentária; para a firma, maximizar lucro (ou minimizar custo) sujeita à restrição tecnológica. Deste primeiro movimento saem as **funções de demanda** e de **oferta** individuais.

2. **Os planos são tornados compatíveis: equilíbrio.** As escolhas individuais são feitas isoladamente, mas não podem ser todas realizadas simultaneamente se forem incompatíveis. O conceito de **equilíbrio** — competitivo, neste curso — é a exigência de que os preços se ajustem até que a soma das decisões individuais "feche": a oferta agregada iguala a demanda agregada em cada mercado.

3. **Avalia-se o resultado: bem-estar.** De volta ao indivíduo, perguntamos se a alocação de equilíbrio é **eficiente** (no sentido de Pareto) e como compará-la com alternativas. É aqui que entram os **Teoremas do Bem-Estar**, que ligam o equilíbrio competitivo à eficiência.

A mesma estrutura, ambientes crescentes

Cada módulo do curso reaplica os três movimentos — **otimizar → equilibrar → avaliar** — a um ambiente mais geral. Começamos com a escolha individual sob certeza (consumidor e firma); juntamos um único mercado (**equilíbrio parcial**); juntamos todos os mercados ao mesmo tempo (**equilíbrio geral**); e, por fim, trocamos a certeza pelo risco (**escolha sob incerteza** e **finanças**). A complexidade nunca cresce por capricho: cada camada relaxa uma hipótese da anterior e, com isso, **compra um fenômeno novo** (interdependência de mercados, eficiência da concorrência, atitude perante o risco).

1.2 O mapa das aulas

Estas notas seguem a **ordem dos slides da disciplina** — a sequência em que o professor trabalha os temas, indicada pela numeração dos arquivos em `Aulas/`. A tabela abaixo é o mapa. Essa ordem é coerente com a **cadeia de dependência do próprio Varian** (orçamento → preferências → utilidade → escolha → demanda) e com a rota, que ele registra como comum, de apresentar o **equilíbrio logo após a teoria do consumidor**: por isso o equilíbrio (parcial e geral) aparece antes mesmo da teoria da firma.

#	Capítulo destas notas	Pergunta central	Varian 9ª / Jehle-Reny 3ª
1	A Escolha Individual	Como representar gostos por preferências e por uma função utilidade	V 2,3,4 / JR 1.1–1.2
2	O Problema do Consumidor	Da utilidade às demandas: dualidade, Slutsky, bem-estar	V 5,6,8 / JR 1.3–1.5
3	Equilíbrio Parcial	Como um único mercado se equilibra; excedente e eficiência	V 1,24,25 / JR 4
4	Equilíbrio Geral	Todos os mercados de uma vez; os Teoremas do Bem-Estar	V 15,16,30,32 / JR 5.1–5.3
5	A Teoria da Firma	Tecnologia, custo e oferta a partir da maximização de lucro	V 19,21,22,23 / JR 3
6	A Escolha sob Incerteza (e Finanças)	Utilidade esperada, aversão ao risco; ativos e prêmio de risco	V 12,13 / JR 2.4, 5.4
7	Produção	A tecnologia em detalhe; dualidade custo–produção	JR 5.3.1
8	Tópicos em Teoria da Escolha	Preferências reveladas, agregação, número-índice	V 7,9,14

> **!** Cobertura desta versão
>
> Estas notas são compiladas **ao longo do curso**, capítulo a capítulo, na ordem da numeração de `Aulas/`. Cada capítulo é acrescentado ao `index.qmd` quando a aula correspondente é escrita. O arquivo `CLAUDE.md` mantém o registro de quais capítulos já estão escritos e quais ainda são pendentes.

1.3 O kit matemático que usaremos o tempo todo

A microeconomia é, em larga medida, **otimização aplicada a problemas econômicos** — e não fórmulas que caem do céu. Três blocos de ferramentas reaparecem em quase todas as derivações. Convém saber **por que** os usamos antes de vê-los em ação.

> **!** Estas notas conversam com as Notas de Matemática
>
> Todo conceito matemático que usamos aqui é desenvolvido com rigor nas **Notas de Aula de Matemática para o Mestrado e Doutorado em Economia** (EPGE/FGV, Profa. Silvia Matos), que ficam **um nível acima**, em `../1. Matemática/Notas de Aula/`. Sempre que aplicarmos uma ferramenta, abriremos uma caixa **"Ferramenta matemática"** que (i) nomeia o conceito, (ii) recorda a fórmula central e (iii) indica o capítulo correspondente das Notas de Matemática. Os mapeamentos principais são: maximização do consumidor e da firma → *Otimização com Restrição (Lagrangeano, KKT)*; condições de 2ª ordem e concavidade → *Otimização (Hessiana)* e *Álgebra Linear (formas quadráticas)*; estática comparativa → *Funções de Várias Variáveis (teorema da função implícita)*; dualidade → *Funções côncavas/convexas e o teorema do envelope*.

1.3.1 Otimização com restrição: o Lagrangeano

Quase todo problema do curso tem a forma "**maximizar um objetivo sujeito a uma restrição**": o consumidor maximiza utilidade sujeito ao orçamento; a firma minimiza custo sujeito a atingir um nível de produto. A ferramenta canônica é o **multiplicador de Lagrange**. Para

$$\max_{x} \; \mathrm{M}(x) \quad \text{s.a.} \quad p \cdot x = y,$$

formamos $\mathcal{L} = \mathrm{M}(x) + \lambda\,(y - p \cdot x)$ e impomos $\partial \mathcal{L}/\partial x_i = 0$. As condições de primeira ordem dão a regra que reaparecerá dezenas de vezes:

$$\boxed{\frac{\partial \mathrm{M}/\partial x_i}{\partial \mathrm{M}/\partial x_j} = \frac{p_i}{p_j}}$$

isto é, no ótimo a **taxa marginal de substituição** iguala a **razão de preços**. O multiplicador λ não é um artifício de cálculo: ele é a **utilidade marginal da renda**, e é essa leitura econômica que torna a dualidade do próximo capítulo transparente. *(Lagrangeano, condições de Kuhn-Tucker e a interpretação do multiplicador estão no capítulo* Otimização com Restrição *das Notas de Matemática.)*

1.3.2 O teorema do envelope: por que funções-valor são fáceis de derivar

Quando guardamos o **valor ótimo** de um problema como função dos parâmetros — a utilidade indireta $v(p, y)$, a função custo $c(w, q)$ — queremos saber como esse valor reage a um parâmetro. O **teorema do envelope** diz que, ao derivar a função-valor, podemos **ignorar a reação da escolha ótima** e derivar apenas em relação à aparição direta do parâmetro:

$$\frac{d}{d\alpha}\,\mathrm{M}(x^*(\alpha), \alpha) = \left.\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha}\right|_{x^*}.$$

É esse teorema que produz, quase de graça, a **identidade de Roy** e o **lema de Shephard** — os dois resultados que conectam funções-valor a funções de demanda. *(O teorema do envelope é tratado no capítulo* Otimização *das Notas de Matemática.)*

1.3.3 Convexidade, concavidade e o sinal das segundas ordens

A maior parte dos nossos resultados qualitativos — demanda que se inclina para baixo, custo que cresce de forma convexa, unicidade da escolha — depende de **hipóteses de curvatura**: preferências **convexas**, funções utilidade **quase-côncavas**, conjuntos de produção **convexos**. Essas hipóteses garantem que as condições de primeira ordem sejam **suficientes** (e não só necessárias) e que o ótimo seja **único**. Em termos operacionais, isso se lê no sinal da **Hessiana orlada** e nas **formas quadráticas** associadas. *(Concavidade, quase-concavidade e o critério da Hessiana estão nos capítulos* Otimização *e* Álgebra Linear *das Notas de Matemática.)*

> **i** Convenção de notação (a mesma dos slides e dos livros)
>
> Vetores em **negrito**: $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n_+$ é uma **cesta de consumo**, p o vetor de **preços**, w o vetor de **preços de fatores**. A renda é y (em alguns trechos m). A relação de preferências é $\succeq$ (fraca), $\succ$ (estrita) e $\sim$ (indiferença). Demandas **marshallianas** (não-compensadas) aparecem como $x_i(p, y)$; demandas **hicksianas** (compensadas) como $x_i^h(p, u)$. As funções-valor são $v(p, y)$ (utilidade indireta) e $e(p, u)$ (despesa). A taxa marginal de substituição é a TMgS.

1.4 Como usar estas notas

Cada capítulo abre com a **motivação econômica**, enuncia os **axiomas/hipóteses** com precisão, desenvolve as **derivações passo a passo** (com os truques matemáticos explicitados nas caixas "Ferramenta matemática"), faz a **estática comparativa** em diagramas e fecha com uma seção **"Laboratório computacional em R"** e com **exercícios** — muitos adaptados das listas e provas da disciplina. O fio condutor é sempre o mesmo: **otimizar, equilibrar, avaliar**.

Os **laboratórios em R** cumprem dois papéis. Onde há um diagrama (curva de indiferença, caixa de Edgeworth, curvas de custo), o código *gera* a figura a partir dos parâmetros — mude um preço e reexecute para ver a estática comparativa acontecer. Onde há um teorema (simetria de Slutsky, identidade de Roy, lema de Shephard), o código o *verifica* numericamente: a teoria vira um teste que ou passa ou acusa erro na conta. Todo o código é R base + `ggplot2` e roda junto com a compilação destas notas — não é ilustração decorativa, é a mesma matemática executada.

2 A Escolha Individual

Toda a microeconomia parte de uma pergunta simples de enunciar e difícil de modelar: **como descrever a escolha de um indivíduo?** A teoria oferece uma descrição *abstrata* — não pretendemos abrir a cabeça do agente, mas sim supor que existe uma **regra de escolha** $C(\cdot)$ que, a cada conjunto de alternativas A, associa o que a pessoa escolhe, $C(A) \in A$. O programa deste capítulo é dar conteúdo a essa regra a partir de **hipóteses sobre o comportamento** e, ao final, mostrar que ela pode ser resumida por uma **função utilidade**.

Há duas portas de entrada, e elas são **equivalentes**:

- **Abordagem das preferências.** Toma os *gostos* — uma relação de preferências $\succeq$ — como característica primitiva e estável do indivíduo, impõe **axiomas** sobre $\succeq$ e *deriva* a regra de escolha.
- **Teoria das preferências reveladas.** Toma a própria regra de escolha $C(\cdot)$ como primitiva e impõe sobre ela **restrições de consistência** (o axioma fraco das preferências reveladas), recuperando as preferências a partir do que se observa escolher.

Seguimos a primeira porta neste capítulo e voltaremos à segunda no Capítulo de Tópicos. O destino é o mesmo.

> Por que axiomatizar?
>
> Axiomatizar a escolha tem dois ganhos. Primeiro, **disciplina**: deixa explícito *exatamente* o que estamos supondo sobre o agente — nada entra "por intuição". Segundo, **poder de teste**: cada axioma gera **restrições observáveis** sobre as demandas (homogeneidade, simetria de Slutsky, negatividade), que podem ser confrontadas com dados. A função utilidade, no fim, é uma **conveniência de cálculo** — o conteúdo econômico está nos axiomas.

2.1 Os quatro elementos da abordagem das preferências

A abordagem das preferências é montada com quatro peças:

1. **Conjunto de consumo** X — todas as cestas que o agente pode *conceber*;
2. **Conjunto orçamentário** $\mathbb{B} \subset X$ — as cestas que ele pode *pagar*;
3. **Relação de preferências** $\succeq$ — como ele *ordena* as cestas;
4. **Hipótese comportamental** — a regra de que ele escolhe a *melhor* cesta factível.

Os dois primeiros descrevem o **ambiente**; os dois últimos, o **agente**. Vejamos cada um.

2.1.1 O conjunto de consumo

O **conjunto de consumo** X representa a totalidade das possibilidades de consumo que o agente pode conceber — restrições físicas e institucionais o definem. Seu elemento típico é a cesta x. Salvo menção em contrário, supomos:

$$\text{(i) } \emptyset \neq X \subseteq \mathbb{R}^n_+; \qquad \text{(ii) } X \text{ é fechado e convexo;} \qquad \text{(iii) } \mathbf{0} \in X.$$

No caso usual, $X = \mathbb{R}^n_+$ e $x = (x_1, \dots, x_n)$ é um **plano de consumo**, com $x_i \geq 0$ a quantidade do bem i. A convexidade e a presença da origem serão importantes para garantir que os problemas de escolha tenham solução bem-comportada.

2.1.2 O conjunto orçamentário

O **conjunto orçamentário** $\mathbb{B} \subset X$ corresponde às alternativas *factíveis* para o agente. O caso central do curso é o **conjunto orçamentário competitivo (walrasiano)**:

$$\mathbb{B} \equiv \{x \in X \mid p \cdot x \leq y\} = \left\{x \in X \;\middle|\; \textstyle\sum_{i=1}^{n} p_i x_i \leq y\right\},$$

onde p é o vetor de **preços**, x o de **quantidades** e y a **renda**. Chama-se *competitivo* porque os preços **não dependem** da quantidade que o agente demanda — ele é tomador de preços. Geometricamente, $\mathbb{B}$ é o triângulo abaixo da **reta orçamentária** $p \cdot x = y$, cuja inclinação (no caso de dois bens) é $-p_1/p_2$ e cujos interceptos são y/p_1 e y/p_2.

> **i** Restrições não-lineares existem — mas fogem do escopo competitivo
>
> Vários problemas econômicos têm conjuntos orçamentários **não-lineares**: economia de escambo (preços de compra $\neq$ de venda, por custos de transação), tarifas em duas partes, racionamento, escolha intertemporal com mercado de capitais imperfeito, *food stamps*. Em todos eles, ou os mercados não são competitivos, ou há custos de transação. Como o curso se restringe a ambientes aproximáveis por um **modelo competitivo**, trabalharemos quase sempre com o $\mathbb{B}$ linear acima.

2.1.3 Implicações da restrição linear: a demanda marshalliana

Suponha que exista uma regra fixa que associa, a cada conjunto orçamentário $\mathbb{B}$, uma cesta escolhida $x = C(\mathbb{B})$. Como o $\mathbb{B}$ competitivo é **totalmente parametrizado** por (y, p), podemos escrever a escolha como função desses parâmetros:

$$x_i = x_i(p, y), \qquad i = 1, \dots, n,$$

a **função de demanda marshalliana**. A hipótese crucial que usamos aqui é a **não-saciedade local**: o agente nunca escolhe um ponto interior a $\mathbb{B}$ — ele sempre gasta toda a renda, ficando *sobre* a reta orçamentária. Disso decorrem três famílias de restrições observáveis, que valem **só por causa da restrição orçamentária**, independentemente de gostos:

1. Exaustão da renda (*adding-up*). Como o agente gasta tudo,

$$\sum_k p_k \, x_k(p, y) = y.$$

Diferenciando em relação à renda e em relação a um preço p_i (supondo demandas diferenciáveis), obtêm-se a **agregação de Engel** e a **agregação de Cournot**:

$$\sum_k \partial_y x_k(p, y) \, p_k = 1, \qquad \sum_k \partial_i x_k(p, y) \, p_k = -x_i.$$

2. Homogeneidade de grau zero. Para todo escalar $\lambda > 0$,

$$x_i(\lambda p, \lambda y) = x_i(p, y),$$

porque $(\lambda p, \lambda y)$ e (p, y) definem **o mesmo** conjunto $\mathbb{B}$ — só a ilusão monetária distinguiria um do outro. Para demandas diferenciáveis, o teorema de Euler dá

$$\partial_y x_i(p, y)\, y + \sum_k \partial_k x_i(p, y)\, p_k = 0.$$

3. As mesmas, em elasticidades. Definindo a **elasticidade-renda** $\eta_i \equiv \partial_y x_i \, \frac{y}{x_i}$, a **elasticidade-preço** $\varepsilon_{ij} \equiv \partial_j x_i \, \frac{p_j}{x_i}$ (própria se $i = j$, cruzada se $i \neq j$) e as **frações de gasto** $w_k \equiv p_k x_k / y$, as três condições viram, respectivamente:

$$\underbrace{\sum_k w_k\, \eta_k = 1}_{\text{Engel}}, \qquad \underbrace{\sum_k w_k\, \varepsilon_i^k + w_i = 0}_{\text{Cournot}}, \qquad \underbrace{\eta_i + \sum_k \varepsilon_i^k = 0}_{\text{homogeneidade}}.$$

Estas são as **únicas** consequências da restrição orçamentária — nada ainda foi suposto sobre os gostos. Tudo o mais virá dos axiomas sobre $\succeq$.

2.2 A relação de preferências e seus axiomas

As **preferências** são representadas por uma relação binária $\succeq$ definida em X: $x^1 \succeq x^2$ lê-se "x^1 é **pelo menos tão boa quanto** x^2". A partir de $\succeq$ definimos a preferência **estrita** e a **indiferença**:

$$x^1 \succ x^2 \iff (x^1 \succeq x^2 \text{ e } x^2 \not\succeq x^1), \qquad x^1 \sim x^2 \iff (x^1 \succeq x^2 \text{ e } x^2 \succeq x^1).$$

2.2.1 Os dois axiomas de racionalidade

> **!** Axiomas 1 e 2 — Racionalidade
>
> **Axioma 1 (Completeza).** Para todo par $x^1, x^2 \in X$, vale $x^1 \succeq x^2$ ou $x^2 \succeq x^1$ (ou ambos). *O agente sempre consegue comparar.*
> **Axioma 2 (Transitividade).** Para todo x^1, x^2, x^3, se $x^1 \succeq x^2$ e $x^2 \succeq x^3$, então $x^1 \succeq x^3$. *As comparações são coerentes entre si.*

Definição. Uma relação $\succeq$ definida em X que satisfaz os Axiomas 1 e 2 é chamada uma **relação de preferência racional**. Completeza e transitividade são o coração da racionalidade: sem completeza não há o que otimizar; sem transitividade, "a melhor cesta" pode nem existir (ciclos $x^1 \succ x^2 \succ x^3 \succ x^1$).

Dado qualquer $x^0 \in X$, os axiomas nos deixam recortar X em conjuntos úteis:

$$\succeq (x^0) \equiv \{x \mid x \succeq x^0\} \text{ ("tão boas quanto")}, \quad \succ (x^0) \text{ ("melhores")}, \quad \sim (x^0) \text{ (a curva de indiferença)},$$

e analogamente $\preceq (x^0)$ e $\prec (x^0)$. O conjunto $\succeq (x^0)$ é o **conjunto contorno superior** ("pelo menos tão bom"); sua fronteira é a curva de indiferença que passa por x^0.

2.2.2 Os axiomas de regularidade

Os dois primeiros axiomas garantem uma *ordenação*, mas não que ela seja "bem-comportada" o bastante para o cálculo. Acrescentamos:

! Axiomas 3–5 — Regularidade das preferências

Axioma 3 (Continuidade). Para todo $x \in \mathbb{R}^n_+$, os conjuntos $\succeq(x)$ e $\preceq(x)$ são **fechados** em $\mathbb{R}^n_+$. *Não há "saltos" nos gostos: pequenas mudanças na cesta não invertem abruptamente a preferência.*
Axioma 4 (Não-saciedade local). Para todo x^0 e todo $\varepsilon > 0$, existe ao menos um $x \in B_\varepsilon(x^0) \cap \mathbb{R}^n_+$ com $x \succ x^0$. *Sempre dá para melhorar um pouquinho, em qualquer vizinhança.*
Axioma 4′ (Monotonicidade estrita). Se $x^0 \geq x^1$ então $x^0 \succeq x^1$; e se $x^0 \gg x^1$ então $x^0 \succ x^1$. *Mais de tudo é estritamente melhor (versão forte do Axioma 4).*
Axioma 5 (Convexidade). Se $x^1 \succeq x^0$, então $tx^1 + (1-t)x^0 \succeq x^0$ para todo $t \in [0,1]$.
Convexidade estrita: se ainda $x^1 \neq x^0$, a combinação é *estritamente* preferível, $tx^1 + (1-t)x^0 \succ x^0$ para $t \in (0,1)$.

Cada axioma tem um papel econômico preciso, e vale fixá-los:

- **Continuidade** é a hipótese técnica que torna possível a representação por função *contínua* (próxima seção). Geometricamente, garante que as curvas de indiferença sejam "linhas sem buracos".
- **Não-saciedade local** é o que faz o agente **gastar toda a renda** — é a hipótese que usamos acima para escrever a demanda marshalliana sobre a reta orçamentária. É mais fraca que a monotonicidade (admite "males" locais), mas suficiente para a dualidade.
- **Monotonicidade** dá às curvas de indiferença **inclinação negativa** e orienta a direção de melhora (nordeste).
- **Convexidade** é a tradução de "**gosto por variedade / diversificação**": médias são preferíveis a extremos. É ela que garante **conjuntos contorno superior convexos** e, com isso, demandas bem-definidas e a curva de indiferença *encurvada para a origem*. A versão estrita garante **unicidade** da escolha ótima.

i Ferramenta matemática — Conjuntos convexos e quase-concavidade

A convexidade das preferências (Axioma 5) é exatamente a afirmação de que cada conjunto contorno superior $\succeq(x^0)$ é um **conjunto convexo**. Quando $\succeq$ é representada por uma utilidade u, isso equivale a u ser uma função **quase-côncava**: $u(tx^1 + (1-t)x^0) \geq \min\{u(x^1), u(x^0)\}$. Convexidade *estrita* das preferências $\leftrightarrow$ quase-concavidade *estrita* $\leftrightarrow$ escolha ótima *única*. *(Conjuntos convexos, funções côncavas e quase-côncavas estão nos capítulos* Funções de Várias Variáveis *e* Otimização *das Notas de Matemática.)*

2.3 A hipótese comportamental e a existência de solução

! Hipótese comportamental

O consumidor **racional** escolhe a melhor cesta factível: $x^* \in \mathbb{B}$ tal que $x^* \succeq x$ para todo $x \in \mathbb{B}$.

Resta uma pergunta de existência: *o problema do consumidor tem solução* quando $\mathbb{B} = \{x \in \mathbb{R}^n_+ : p \cdot x \leq y\}$? **Sim** — e a razão é puramente topológica.

Existência de solução. Com $p \gg \mathbf{0}$ e y finito, $\mathbb{B}$ é **compacto** (fechado e limitado). Pela **continuidade** das preferências, o conjunto das cestas piores que uma dada, $\prec(x^0)$, é aberto. Suponha, por absurdo, que não exista cesta ótima: então todo $x \in \mathbb{B}$ está em algum $\prec(x')$, isto é, a família $\{\prec(x')\}$ **cobre** $\mathbb{B}$. Por compacidade, há subcobertura finita $\prec(x^1), \ldots, \prec(x^m)$. Tomando a melhor cesta x^* entre as m "âncoras" $\{x^i\}$, todos os demais elementos de $\mathbb{B}$ seriam piores que $x^* \in \mathbb{B}$ — contradição com a hipótese de não haver ótimo. Logo, o ótimo existe.

i Ferramenta matemática — Weierstrass e compacidade

O argumento acima é a versão "via cobertura" do **Teorema de Weierstrass**: uma função contínua sobre um conjunto **compacto** atinge máximo. A compacidade de $\mathbb{B}$ vem de o conjunto ser fechado (preços e renda fixos) e limitado (preços estritamente positivos). É a mesma garantia de existência usada para a firma e para o equilíbrio. *(Conjuntos compactos e o Teorema de Weierstrass estão no capítulo* Funções de Várias Variáveis *das Notas de Matemática.)*

2.4 A representação por uma função utilidade

Trabalhar diretamente com a relação $\succeq$ é incômodo. O resultado central deste capítulo é que, sob os axiomas, podemos substituí-la por um **número** atribuído a cada cesta.

Definição. Uma função $u : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ **representa** a relação $\succeq$ se

$$u(x^0) \geq u(x^1) \iff x^0 \succeq x^1 \qquad \forall\, x^0, x^1 \in \mathbb{R}^n_+.$$

A representação anda nos **dois sentidos**, e cada direção tem uma força diferente.

2.4.1 De u para a racionalidade (fácil)

Teorema (necessidade)

Se $\succeq$ pode ser representada por uma função $u : X \to \mathbb{R}$, então $\succeq$ é **racional** (completa e transitiva).

Demonstração. (i) **Completeza.** Para quaisquer x^0, x^1, como u assume valores reais, vale $u(x^0) \geq u(x^1)$ ou $u(x^1) \geq u(x^0)$; como u representa $\succeq$, isso dá $x^0 \succeq x^1$ ou $x^1 \succeq x^0$. (ii) **Transitividade.** Se $x^0 \succeq x^1$ e $x^1 \succeq x^2$, então $u(x^0) \geq u(x^1)$ e $u(x^1) \geq u(x^2)$, logo $u(x^0) \geq u(x^2)$, ou seja $x^0 \succeq x^2$. ■

A completeza e a transitividade das preferências **herdam**, assim, a completeza e a transitividade da ordem $\geq$ dos números reais.

2.4.2 Da racionalidade para u (o teorema de existência)

A direção difícil — *construir* a função — exige os axiomas de regularidade.

> Teorema (existência da representação)
>
> Se $\succeq$ é **completa, transitiva, contínua e estritamente monotônica**, então existe uma função **contínua** $u : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ que representa $\succeq$.

Ideia da demonstração (construção de Debreu). Defina o vetor diagonal $\iota \equiv (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n_+$. Para cada cesta x, atribua o número $u(x)$ tal que a cesta $u(x)\,\iota$ — um ponto sobre a diagonal — seja **indiferente** a x:

$$u(x)\,\iota \;\sim\; x.$$

Em palavras: caminhamos sobre a diagonal até encontrar o ponto que o agente acha *tão bom quanto* x, e usamos a *distância à origem* como utilidade. Há três coisas a verificar:

1. **Existência do número.** Fixe x e tome $A \equiv \{\alpha \geq 0 : \alpha\iota \succeq x\}$ e $B \equiv \{\alpha \geq 0 : \alpha\iota \preceq x\}$. A **continuidade** garante que A e B são fechados; a **monotonicidade estrita** garante que são intervalos do tipo $[\underline{\alpha}, \infty)$ e $[0, \overline{\alpha}]$; a **completeza** garante que $A \cup B = \mathbb{R}_+$. Dois fechados que cobrem a reta e são "encaixados" precisam se **interceptar**: existe α^* com $\alpha^*\iota \sim x$.

2. **Unicidade do número.** Se $\alpha^*\iota \sim x$ e $\alpha^{**}\iota \sim x$, a transitividade de $\sim$ dá $\alpha^*\iota \sim \alpha^{**}\iota$; pela monotonicidade estrita, $\alpha^* = \alpha^{**}$. A função está **bem-definida**.

3. **Representa as preferências.** Para duas cestas, encadeando definição, transitividade e monotonicidade:

$$x^1 \succeq x^2 \underset{\text{def.}}{\iff} u(x^1)\iota \sim x^1 \succeq x^2 \sim u(x^2)\iota \underset{\text{monot.}}{\iff} u(x^1) \geq u(x^2).$$

4. **Continuidade.** Basta mostrar que a pré-imagem de qualquer intervalo aberto (a, b) é aberta. Mas

$$u^{-1}((a,b)) = \{x : a\iota \prec x\} \cap \{x : x \prec b\iota\},$$

interseção de dois conjuntos abertos (complementares de fechados, pela continuidade de $\succeq$) — logo, aberta. ■

> Três observações importantes
>
> **(1) Quais axiomas são realmente necessários?** A rigor, só **completeza, transitividade e continuidade** (Axiomas 1–3) são indispensáveis para a *existência* de uma representação contínua (Debreu, 1959, cap. 4); a monotonicidade apenas simplifica a construção acima.
> **(2) A utilidade é ordinal.** Se u representa $\succeq$, então qualquer **transformação monótona crescente** $f \circ u$ também representa: se f é estritamente crescente,
>
> $$f(u(x^0)) \geq f(u(x^1)) \iff u(x^0) \geq u(x^1) \iff x^0 \succeq x^1.$$
>
> Logo, **existem infinitas** funções utilidade para as mesmas preferências — os *níveis* não têm

significado, só a *ordem* importa. (Isto muda no Capítulo de Incerteza, onde a utilidade esperada é **cardinal**.)
(3) Nem toda representação é contínua. Provamos que *existe* uma representação contínua, não que *toda* o seja: $v(\cdot) = f(u(\cdot))$ com f monótona porém descontínua ainda representa $\succeq$, mas não é contínua.

2.5 A taxa marginal de substituição

Quando u é diferenciável, a inclinação de uma curva de indiferença tem nome e interpretação. Ao longo de $\{x : u(x) = \bar{u}\}$, diferenciando $u(x_1, x_2) = \bar{u}$:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}\,dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}\,dx_2 = 0 \implies \boxed{\text{TMgS}_{12} \equiv -\left.\frac{dx_2}{dx_1}\right|_{\bar{u}} = \frac{\partial u/\partial x_1}{\partial u/\partial x_2}}$$

A **taxa marginal de substituição** é quanto do bem 2 o agente está disposto a abrir mão por uma unidade a mais do bem 1, **mantendo-se indiferente**. É a razão das utilidades marginais — e note que, sendo uma *razão*, ela é **invariante** a transformações monótonas de u: a TMgS é um objeto **ordinal**, como deve ser. A convexidade das preferências se traduz em TMgS **decrescente** ao longo da curva (curvas convexas para a origem). No próximo capítulo, a condição de otimalidade do consumidor será exatamente $\text{TMgS}_{12} = p_1/p_2$ — a tangência entre indiferença e reta orçamentária.

2.6 Laboratório computacional em R

Toda a construção deste capítulo — reta orçamentária, curvas de indiferença e a tangência $\text{TMgS}_{12} = p_1/p_2$ — cabe em poucas linhas de R. Fixamos uma Cobb-Douglas $u(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha}$, desenhamos três curvas de indiferença e a reta orçamentária, e marcamos o ótimo dado pela demanda fechada $x_1^* = \alpha y/p_1$, $x_2^* = (1-\alpha)y/p_2$.

```
alpha <- 0.5; p1 <- 2; p2 <- 4; y <- 40
x1s <- alpha*y/p1; x2s <- (1-alpha)*y/p2           # demanda Cobb-Douglas
ubar <- x1s^alpha * x2s^(1-alpha)
g <- expand.grid(x1 = seq(0.5, 20, length.out = 400),
                 u  = c(ubar*0.6, ubar, ubar*1.4))
g$x2 <- (g$u / g$x1^alpha)^(1/(1-alpha))           # curvas de indiferença
ggplot(subset(g, x2 <= 12)) +
  geom_line(aes(x1, x2, group = factor(u)), color = az) +
  geom_abline(intercept = y/p2, slope = -p1/p2, color = vm, linewidth = 0.9) +
  annotate("point", x = x1s, y = x2s, size = 2.6) +
  annotate("text",  x = x1s + 1.4, y = x2s + 0.7, label = "ótimo", size = 3.4) +
  coord_cartesian(xlim = c(0, 20), ylim = c(0, 12)) +
  labs(x = expression(x[1]), y = expression(x[2]))
```

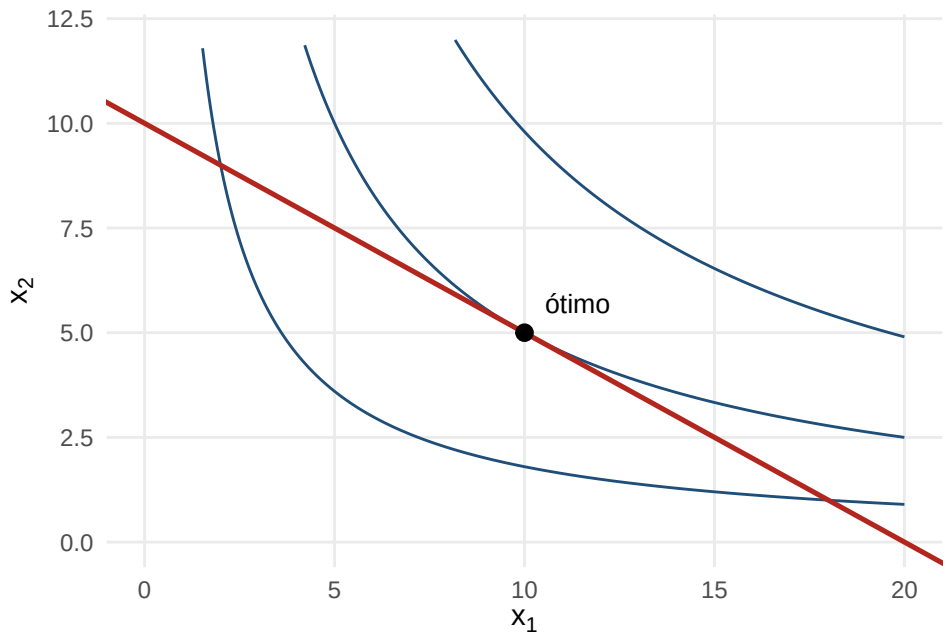

Figura 1: Mapa de indiferença Cobb-Douglas e reta orçamentária: no ótimo, a curva de indiferença tangencia o orçamento.

Mudar `p1` reorienta a reta e o ponto de tangência desliza pela mesma família de curvas — é a estática comparativa do próximo capítulo, feita interativamente.

2.7 Exercícios

1. **Restrição orçamentária.** Esboce $\mathbb{B}$ para dois bens com $(p_1, p_2, y) = (2, 4, 40)$. Mostre que dobrar p e y não altera $\mathbb{B}$ e conclua a homogeneidade de grau zero da demanda.
2. **Agregações.** A partir de $\sum_k p_k x_k(p, y) = y$, deduza as agregações de Engel e de Cournot. Mostre que, se todos os bens são normais, nem todos podem ser de luxo ($\eta_k > 1$ para todo k é impossível).
3. **Axiomas.** Dê um exemplo de relação **completa mas não transitiva** e explique por que "a melhor cesta" pode não existir. Em seguida, mostre que preferências **lexicográficas** sobre $\mathbb{R}^2$ são completas, transitivas e monotônicas, mas **não contínuas** — e, portanto, não admitem representação por função utilidade contínua.
4. **Quase-concavidade.** Verifique que $u(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{\beta}$ (Cobb-Douglas, $\alpha, \beta > 0$) é quase-côncava e calcule sua TMgS_{12}. Confirme que a TMgS não muda se substituirmos u por $\ln u$.
5. **Invariância ordinal.** Sejam $u(x) = x_1 x_2$ e $v(x) = \ln x_1 + \ln x_2$. Mostre que representam as mesmas preferências e que produzem a mesma TMgS e a mesma demanda.

3 O Problema do Consumidor

No capítulo anterior, montamos as peças: o conjunto orçamentário $\mathbb{B}$, os axiomas sobre $\succeq$ e a função utilidade u que os representa. Agora colocamos o agente para **otimizar** — o primeiro dos três movimentos do curso. O problema do consumidor é escolher, dentro do orçamento, a cesta que maximiza a utilidade:

$$x^* \in \mathbb{B} \text{ tal que } x^* \succeq x \text{ para todo } x \in \mathbb{B},$$

que, dada a representação por utilidade, escrevemos como o **problema de maximização da utilidade** (UMP, *utility maximization problem*):

$$\max_{x \in \mathbb{R}^n_+} u(x) \quad \text{s.a.} \quad p \cdot x \leq y.$$

A partir dele extrairemos a **demanda marshalliana** $x(p, y)$ e a **utilidade indireta** $v(p, y)$. Em seguida estudaremos o **problema dual** — minimizar o gasto necessário para atingir um nível de utilidade — de onde saem a **função despesa** $e(p, u)$ e a **demanda hicksiana** $x^h(p, u)$. A ponte entre os dois mundos, a **dualidade**, culmina na **equação de Slutsky**, que decompõe o efeito de um preço sobre a demanda em substituição e renda. Este é o capítulo mais denso do curso; vale segui-lo com lápis na mão.

3.1 O problema de maximização da utilidade

3.1.1 Existência e unicidade

Antes de resolver, garantimos que há o que resolver.

! Existência e unicidade da solução

Existência. Se $y > 0$ e $p \gg \mathbf{0}$, o conjunto $\mathbb{B} = \{x \in \mathbb{R}^n_+ : p \cdot x \leq y\}$ é **não-vazio, fechado e limitado** — logo, **compacto**. Se u é **contínua**, o UMP tem solução.
Unicidade. Se as preferências são **estritamente convexas** (Axioma 5, i.e. u estritamente quase-côncava), a solução é **única** — e podemos então escrevê-la como uma **função** $x(p, y)$.

A existência é o Teorema de Weierstrass; a unicidade vem de a quase-concavidade estrita impedir dois ótimos distintos (a média deles seria estritamente melhor e factível). Sem unicidade, $x(p, y)$ seria uma *correspondência*; com ela, é uma função bem-definida.

i Ferramenta matemática — Weierstrass e quase-concavidade

Existência: uma função contínua sobre um conjunto **compacto** atinge máximo (Weierstrass). **Unicidade:** u é **estritamente quase-côncava** quando seus conjuntos contorno superior $\{x : u(x) \geq a\}$ são estritamente convexos; com restrição convexa, o argmax é único. *(Compacidade e Weierstrass: capítulo* Funções de Várias Variáveis*; quase-concavidade: capítulo* Otimização *das Notas de Matemática.)*

3.1.2 As condições de Kuhn-Tucker

O UMP é uma maximização com uma restrição de desigualdade ($p \cdot x \leq y$) e restrições de não-negatividade ($x_i \geq 0$). A ferramenta exata é **Kuhn-Tucker**. Seja u continuamente diferenciável, estritamente quase-côncava, com $\nabla u(x) \neq \mathbf{0}$. Monta-se o Lagrangeano com multiplicadores λ (orçamento) e μ (não-negatividade):

$$\mathcal{L}(x, \lambda, \mu) = u(x) + \lambda\,(y - p \cdot x) + \mu \cdot x,$$

e impõem-se as condições de **Kuhn-Tucker**:

$$\begin{aligned}
&\text{(CPO)} \quad \partial_i \mathcal{L} = \partial_i u(x^*) - \lambda^* p_i + \mu_i^* = 0, \quad i = 1, \ldots, n;\\
&\text{(viabilidade)} \quad y - p \cdot x^* \geq 0, \qquad x_i^* \geq 0;\\
&\text{(folga complementar)} \quad \lambda^*\,(y - p \cdot x^*) = 0, \qquad \mu_i^*\, x_i^* = 0;\\
&\text{(sinais)} \quad \lambda^* \geq 0, \qquad \mu_i^* \geq 0.
\end{aligned}$$

Sob **não-saciedade local**, a restrição orçamentária é **ativa** ($p \cdot x^* = y$, com $\lambda^* > 0$). Para uma solução **interior** ($x^* \gg \mathbf{0}$, logo $\mu^* = \mathbf{0}$ por folga complementar), o Lagrangeano se reduz a

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = u(x) + \lambda\,(y - p \cdot x),$$

e a CPO vira $\partial_i u(x^*) = \lambda^* p_i$. Dividindo a condição do bem i pela do bem j:

$$\boxed{\frac{\partial_i u(x^*)}{\partial_j u(x^*)} = \frac{p_i}{p_j} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{TMgS}_{ij} = \frac{p_i}{p_j}.}$$

É a **tangência** prometida no fim do capítulo anterior: no ótimo interior, a taxa marginal de substituição iguala a razão de preços — a curva de indiferença tangencia a reta orçamentária. Resolver o problema é **expressar** (x, λ) **em função de** (p, y).

Ferramenta matemática — Kuhn-Tucker e o multiplicador

Quando a restrição é uma **desigualdade**, as condições de primeira ordem ganham as cláusulas de **folga complementar** ($\lambda \cdot (\text{folga}) = 0$) e de **sinal** ($\lambda \geq 0$): ou a restrição morde (e $\lambda > 0$), ou sobra (e $\lambda = 0$). O multiplicador λ^* é a **utilidade marginal da renda** — veremos adiante, pelo teorema do envelope, que $\partial v / \partial y = \lambda^*$. *(Lagrangeano, Kuhn-Tucker e interpretação do multiplicador estão no capítulo* Otimização com Restrição *das Notas de Matemática.)*

Condições suficientes

As CPO são **necessárias**. Que elas sejam **suficientes** — que o ponto crítico seja de fato o máximo global — vem da **quase-concavidade** de u: se $(x^*, \lambda^*) \gg \mathbf{0}$ resolve o sistema e u é quase-côncava, então x^* resolve o UMP. (Prova no apêndice: se existisse $\hat{x}$ factível e melhor, a quase-concavidade forçaria $\nabla u(x^*) \cdot (\hat{x} - x^*) < 0$, contradizendo a CPO.)

3.2 Demanda marshalliana e utilidade indireta

A solução do UMP define dois objetos centrais:

$$x(p,y) \equiv \arg\max_{x\in\mathbb{R}^n_+}\{u(x) : p\cdot x \le y\} \quad (\textbf{demanda marshalliana}),$$

$$v(p,y) \equiv \max_{x\in\mathbb{R}^n_+}\{u(x) : p\cdot x \le y\} = u(x(p,y)) \quad (\textbf{utilidade indireta}).$$

A demanda diz **o que** o agente compra; a utilidade indireta diz **quão bem** ele fica, como função do ambiente (p,y). É uma **função-valor** — e por isso o teorema do envelope a torna tão tratável.

3.2.1 Propriedades da utilidade indireta

Suponha u contínua e estritamente crescente em $\mathbb{R}^n_+$. Então $v(p,y)$ é:

1. **Contínua** em $\mathbb{R}^n_{++}\times\mathbb{R}_+$. *(Teorema do Máximo de Berge.)*
2. **Homogênea de grau zero** em (p,y): como $(\lambda p,\lambda y)$ define o mesmo $\mathbb{B}$ que (p,y), o máximo é o mesmo — $v(\lambda p,\lambda y)=v(p,y)$.
3. **Estritamente crescente em y.** Pelo teorema do envelope aplicado a $v(p,y)=\max_x \mathcal{L}(x,\lambda)$,

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \left.\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}\right|_{x^*} = \lambda^* > 0.$$

   A utilidade indireta cresce com a renda à taxa λ^* — eis a leitura de λ como **utilidade marginal da renda**.
4. **Decrescente em p.** Duas provas. *(i) Direta:* se $p^1>p^0$ e x^0 é ótima a p^0, então $p^1\cdot x^0 \le p^0\cdot x^0 \le y$, logo x^0 ainda é factível a p^1 e $v(p^1,y)\ge u(x^0)=v(p^0,y)$ — preço maior, bem-estar menor. *(ii) Envelope:*

$$\frac{\partial v}{\partial p_i} = \left.\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_i}\right|_{x^*} = -\lambda^* x_i(p,y) < 0.$$

5. **Quase-convexa em (p,y).** Os conjuntos $\{(p,y) : v(p,y)\le \bar v\}$ são convexos. *(Prova: se $p^t = tp^1+(1-t)p^2$ e $y^t = ty^1+(1-t)y^2$, qualquer cesta factível ao orçamento médio é factível a pelo menos um dos dois originais, logo $v(p^t,y^t)\le \max\{v(p^1,y^1),v(p^2,y^2)\}$.)*

> Identidade de Roy
>
> Dividindo a propriedade 4 pela 3 — ambas saídas do envelope — recupera-se a demanda **diretamente da utilidade indireta**, sem reotimizar:
>
> $$\boxed{x_i(p,y) = -\frac{\partial v(p,y)/\partial p_i}{\partial v(p,y)/\partial y}.}$$
>
> Esta é a **identidade de Roy** (Roy 1947). É a primeira face da dualidade: a função-valor *codifica* a demanda.

> **i** Ferramenta matemática — Teorema do envelope e Teorema do Máximo
>
> O **teorema do envelope** diz que, para derivar uma função-valor $v(p,y) = \mathcal{L}(x^*(p,y), \lambda^*)$ em relação a um parâmetro, basta derivar $\mathcal{L}$ pela aparição **direta** do parâmetro, mantendo x^* fixo: $\partial_y v = \partial_y \mathcal{L} = \lambda^*$ e $\partial_{p_i} v = \partial_{p_i} \mathcal{L} = -\lambda^* x_i$. O **Teorema do Máximo (Berge)** garante que a função-valor é **contínua** e a demanda, **semicontínua superior**, quando o objetivo é contínuo e a restrição varia continuamente. *(Envelope: capítulo* Otimização*; continuidade de funções-valor: capítulo* Funções de Várias Variáveis *das Notas de Matemática.)*

3.2.2 Propriedades da demanda marshalliana

Da otimização **na fronteira** do orçamento (Cap. 1) já temos, para $x(p,y)$, **exaustão da renda** ($p \cdot x(p,y) = y$) e **homogeneidade de grau zero**. A *racionalidade* acrescenta uma terceira, mais profunda: a **matriz de Slutsky**

$$\mathbf{s}(p,y) \equiv \left[\, \partial_j x_i(p,y) + \partial_y x_i(p,y)\, x_j(p,y) \,\right]_{i,j}$$

é **simétrica** e **negativa semidefinida**. A demonstração espera a equação de Slutsky (adiante), onde mostraremos que $\mathbf{s}(p,y)$ coincide com a Hessiana da função despesa.

3.3 O problema dual: minimização de despesa

Há uma segunda maneira, **dual**, de olhar a mesma escolha: em vez de "qual a melhor cesta que cabe na renda y?", perguntamos "**qual o menor gasto** para atingir a utilidade u?". É o **problema de minimização de despesa** (EMP):

$$e(p,u) \equiv \min_{x \in \mathbb{R}^n_+} \; p \cdot x \quad \text{s.a.} \quad u(x) \geq u \qquad (\textbf{função despesa}),$$

$$x^h(p,u) \equiv \arg\min_{x \in \mathbb{R}^n_+} \{ p \cdot x : u(x) \geq u \} \qquad (\textbf{demanda hicksiana} \text{ ou } \textit{compensada}).$$

A demanda hicksiana $x^h(p,u)$ responde "quanto comprar para atingir u ao menor custo, dados os preços" — é a demanda que mantém a **utilidade** constante (e não a renda). Geometricamente, é o ponto da curva de indiferença u que toca a reta de iso-despesa mais baixa: de novo a tangência $\text{TMgS} = p_1/p_2$, agora vista pelo lado do custo.

3.3.1 Propriedades da função despesa

Com u contínua e estritamente crescente, $e(p,u)$ é:

1. **Zero no nível mínimo de utilidade**: $e(p, u_{\min}) = 0$, pois $u(\mathbf{0}) = u_{\min}$ e $p \cdot \mathbf{0} = 0$.
2. **Contínua** em $\mathbb{R}^n_{++} \times U$ *(Berge, de novo).*
3. **Estritamente crescente em** u: pelo envelope, $\partial_u e(p,u) = \mu^* > 0$ (o multiplicador do EMP).
4. **Não-decrescente em** p: se $p^1 \geq p^0$ e x^0 minimiza a p^0, então $e(p^1,u) \leq p^1 \cdot x^0$… — na direção certa, $e(p^0,u) = p^0 \cdot x^0 \leq p^1 \cdot x^0$, logo e sobe com o preço.
5. **Homogênea de grau 1 em** p: $e(\lambda p, u) = \lambda\, e(p,u)$ — dobrar todos os preços dobra o gasto mínimo.

6. **Côncava em p.** Para $p^t = tp^1 + (1-t)p^2$, se x^t minimiza a p^t, então $p^1 \cdot x^t \geq e(p^1, u)$ e $p^2 \cdot x^t \geq e(p^2, u)$, donde $e(p^t, u) = p^t \cdot x^t \geq t\, e(p^1, u) + (1-t)\, e(p^2, u)$.

> **Lema de Shephard**
>
> A derivada da função despesa em relação a um preço **é** a demanda hicksiana daquele bem:
>
> $$\boxed{\frac{\partial e(p,u)}{\partial p_i} = x_i^h(p,u).}$$
>
> *(Prova: teorema do envelope aplicado a $e(p,u) = \min_x \mathcal{L}$ — $\partial_{p_i} e = \partial_{p_i} \mathcal{L}|_{x^h} = x_i^h$.)* É o gêmeo dual da identidade de Roy: agora a função-valor codifica a demanda **compensada**, e de forma ainda mais limpa (sem dividir por nada). O lema de Shephard é o cavalo de batalha das próximas propriedades.

3.3.2 Propriedades da demanda hicksiana

1. **Lei da demanda compensada**: a curva de demanda de Hicks é **não-positivamente inclinada**,
$$\frac{\partial x_i^h(p,u)}{\partial p_i} \leq 0.$$
Prova: por Shephard, $\partial_i x_i^h = \partial_{ii}^2 e$, que é ≤ 0 pela **concavidade** de e em p. Diferentemente da demanda marshalliana (que pode subir com o preço — bens de Giffen), a **hicksiana sempre desce**: sem efeito-renda, só sobra substituição.
2. **Matriz de substituição** $\sigma(p,u) \equiv [\partial_j x_i^h]_{i,j}$ é a **Hessiana de** e, logo **negativa semidefinida**.
3. **Simetria** (lei de reciprocidade): $\partial_j x_i^h = \partial_i x_j^h$. *Prova:* por Shephard, $\partial_j x_i^h = \partial_{ij}^2 e = \partial_{ji}^2 e = \partial_i x_j^h$ — a igualdade central é o **teorema de Young**.
4. **Homogênea de grau zero em** p: $x^h(\lambda p, u) = x^h(p,u)$ (a cesta de menor custo não muda se todos os preços escalam).

> **Ferramenta matemática — Concavidade, Hessiana e Teorema de Young**
>
> Que e seja **côncava** em p equivale a sua **Hessiana** $\sigma = [\partial_{ij}^2 e]$ ser **negativa semidefinida** — e a diagonal de uma matriz negativa semidefinida é ≤ 0 (daí a lei da demanda compensada). A **simetria** $\partial_{ij}^2 e = \partial_{ji}^2 e$ é o **teorema de Young** (Clairaut–Schwarz), válido porque e é C^2. *(Concavidade e o critério da Hessiana: capítulo* Otimização*; igualdade das derivadas cruzadas: capítulo* Funções de Várias Variáveis *das Notas de Matemática.)*

3.4 Dualidade

Os problemas A (UMP) e B (EMP) são **duas faces da mesma escolha**. Se u é contínua, estritamente crescente e estritamente quase-côncava, $p \gg \mathbf{0}$, $y > 0$, valem as **identidades de dualidade**:

$$\boxed{e(p, v(p,y)) = y, \qquad v(p, e(p,u)) = u.}$$

A primeira diz: o gasto mínimo para atingir a utilidade que y compra é exatamente y. A segunda, sua inversa. Disso decorrem as **relações entre as demandas**:

$$\boxed{x_i(p,y) = x_i^h(p, v(p,y)), \qquad x_i^h(p,u) = x_i(p, e(p,u)).}$$

Em palavras: a **hicksiana coincide com a marshalliana** quando a renda é continuamente ajustada para dar exatamente o mínimo necessário à utilidade u. Esta é a chave que abre a equação de Slutsky.

O mapa da dualidade

$$\begin{array}{rcl} \textbf{UMP}\ \max u \text{ s.a. } p\cdot x \le y & \xrightarrow{\text{Roy}} & x(p,y),\ v(p,y) \\ \updownarrow \text{ dualidade} & & \updownarrow\ x_i = x_i^h(p,v) \\ \textbf{EMP}\ \min p\cdot x \text{ s.a. } u \ge u & \xrightarrow{\text{Shephard}} & x^h(p,u),\ e(p,u) \end{array}$$

Quatro objetos, ligados por duas identidades de função-valor (Roy e Shephard) e duas identidades de demanda. Saber transitar entre eles **é** dominar a teoria do consumidor.

3.5 A equação de Slutsky

Eis o resultado que organiza toda a estática comparativa do consumidor. Como $x_i^h(p,u) \equiv x_i(p, e(p,u))$ é uma **identidade**, podemos diferenciá-la em relação a p_j:

$$\partial_j x_i^h(p,u) = \partial_j x_i(p,e) + \partial_y x_i(p,e)\cdot \partial_j e(p,u).$$

Pelo lema de Shephard, $\partial_j e = x_j^h = x_j$; avaliando em $u = v(p,y)$ e isolando $\partial_j x_i$:

$$\boxed{\underbrace{\frac{\partial x_i(p,y)}{\partial p_j}}_{\text{efeito-preço total}} = \underbrace{\frac{\partial x_i^h(p,u^*)}{\partial p_j}}_{\text{efeito-substituição}} - \underbrace{\frac{\partial x_i(p,y)}{\partial y}\, x_j(p,y)}_{\text{efeito-renda}}.}$$

Esta é a **equação de Slutsky** (Slutsky 1915). Ela quebra a reação da demanda a um preço em duas forças:

- **Efeito-substituição** ($\partial_j x_i^h$): a recomposição da cesta ao longo da **mesma** curva de indiferença — sempre na direção "fugir do que encareceu". Para o próprio bem ($i = j$) é **sempre** ≤ 0 (lei da demanda compensada).
- **Efeito-renda** ($-\partial_y x_i \cdot x_j$): a perda de poder de compra. Seu sinal depende de o bem ser **normal** ($\partial_y x_i > 0$) ou **inferior** ($\partial_y x_i < 0$).

A demanda marshalliana só pode se inclinar "para cima" (**bem de Giffen**) se o efeito-renda for inferior **e** forte o bastante para dominar o efeito-substituição. Slutsky explica por que isso é raro.

3.5.1 Em elasticidades, e a simetria de Slutsky

Multiplicando por p_j/x_i e identificando elasticidades:

$$\varepsilon_{ij} = \hat{\varepsilon}_{ij} - \eta_i \, w_j,$$

onde ε_{ij} é a elasticidade-preço marshalliana, $\hat{\varepsilon}_{ij}$ a hicksiana (compensada), η_i a elasticidade-renda e $w_j = p_j x_j / y$ a fração de gasto. Finalmente, a propriedade adiada da demanda marshalliana: como a **matriz de Slutsky** $\mathbf{s}(p, y) = [\partial_j x_i + (\partial_y x_i) x_j]$ é igual à **matriz de substituição** $\sigma(p, u) = [\partial_j x_i^h]$ — que é a Hessiana de e —, ela herda **simetria** e **negatividade semidefinida**. As restrições observáveis sobre a demanda (homogeneidade, adding-up, simetria e negatividade de Slutsky) são, juntas, **todo** o conteúdo testável da teoria.

> **i** Compensação de Slutsky × compensação de Hicks
>
> Há duas formas de "compensar" a renda ao mudar um preço. **Hicks**: dar a renda exata para voltar à **curva de indiferença** original (utilidade constante) — é a x^h destas notas. **Slutsky**: dar a renda exata para poder comprar a **cesta** original (poder de compra constante). As duas diferem fora do limite, mas geram a **mesma inclinação** no ponto inicial; por isso a decomposição vale igual. Varian usa a compensação de Slutsky por ser observável (depende de cestas, não de utilidade); Jehle-Reny usa Hicks.

3.6 Bem-estar: medindo a perda de uma mudança de preço

A função despesa dá, de graça, a medida monetária correta do impacto de uma mudança de preços sobre o consumidor. Se o preço vai de p^0 a p^1 (utilidade indo de u^0 a u^1), definem-se:

$$\text{Variação Compensatória}: \ \text{CV} = e(p^1, u^0) - e(p^0, u^0),$$

$$\text{Variação Equivalente}: \ \text{EV} = e(p^1, u^1) - e(p^0, u^1).$$

A **CV** é quanto seria preciso dar ao agente, aos **novos** preços, para mantê-lo na utilidade **antiga**; a **EV**, quanto tirar, aos preços **antigos**, para deixá-lo na utilidade **nova**. Pelo lema de Shephard, ambas são **integrais da demanda hicksiana** no preço que mudou — por exemplo, para uma alta só em p_1,

$$\text{CV} = \int_{p_1^0}^{p_1^1} x_1^h(p_1, p_{-1}, u^0) \, dp_1.$$

São a tradução rigorosa, via dualidade, da ideia intuitiva de "excedente do consumidor" — que retomaremos em Equilíbrio Parcial. *(A demanda hicksiana, por descer sempre, garante que essas áreas estão bem-definidas.)*

3.7 Laboratório computacional em R

O ponto alto do capítulo — a **matriz de Slutsky** simétrica e negativa semidefinida, a **identidade de Roy**, a coincidência entre o ótimo numérico e a fórmula fechada — pode ser *verificado* rodando código, sem álgebra. Tomamos $u = x_1^a x_2^b$.

Primeiro, resolvemos o UMP numericamente (com `constrOptim`) e comparamos com a demanda fechada:

```r
a <- 0.3; b <- 0.7; p <- c(2, 3); y <- 60
xm <- function(p, y) c(a*y/((a+b)*p[1]), b*y/((a+b)*p[2]))   # demanda fechada
sol <- constrOptim(c(1, 1), function(x) -(x[1]^a * x[2]^b), grad = NULL,
                   ui = rbind(c(-p[1], -p[2]), c(1, 0), c(0, 1)), ci = c(-y, 0, 0))
rbind(numerico = sol$par, fechado = xm(p, y))
```

```
             [,1]     [,2]
numerico 9.000822 13.99945
fechado  9.000000 14.00000
```

Agora as propriedades de racionalidade, por diferenças numéricas (a função `jac` está no preâmbulo). A matriz de Slutsky $s_{ij} = \partial_j x_i + (\partial_y x_i)\, x_j$ deve sair **simétrica** e com autovalores ≤ 0:

```r
v  <- function(p, y) { x <- xm(p, y); x[1]^a * x[2]^b }      # utilidade indireta
Dp <- jac(function(pp) xm(pp, y), p)                          # d x_i / d p_j
Dy <- (xm(p, y + 1e-4) - xm(p, y - 1e-4)) / (2e-4)           # d x_i / d y
x  <- xm(p, y); S <- Dp + outer(Dy, x)                        # matriz de Slutsky
S
```

```
      [,1] [,2]
[1,] -3.15  2.1
[2,]  2.10 -1.4
```

```r
c(simetrica = isSymmetric(round(S, 7)),
  autovalores_nao_positivos = all(eigen(S)$values <= 1e-9))
```

```
                simetrica autovalores_nao_positivos
                     TRUE                      TRUE
```

E a identidade de Roy, $x_i = -\dfrac{\partial_{p_i} v}{\partial_y v}$, recupera a demanda:

```r
gp <- jac(function(pp) v(pp, y), p)                           # gradiente de v em p
gy <- (v(p, y + 1e-4) - v(p, y - 1e-4)) / (2e-4)             # d v / d y
rbind(roy = as.numeric(-gp/gy), demanda = x)
```

```
        [,1] [,2]
roy        9   14
demanda    9   14
```

Os três blocos são a teoria do capítulo transformada em teste: se algum falhasse, o erro estaria na conta — não no código.

3.8 Exercícios

1. **Cobb-Douglas completa.** Para $u(x) = x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha}$, resolva o UMP e mostre que $x_1(p, y) = \alpha y / p_1$ e $x_2 = (1-\alpha) y / p_2$. Obtenha $v(p, y)$, verifique a identidade de Roy e calcule $e(p, u)$ e $x^h(p, u)$. Confirme as identidades de dualidade.

2. **Slutsky na Cobb-Douglas.** Com as demandas do item 1, calcule os três termos da equação de Slutsky para $\partial x_1 / \partial p_2$ e interprete os sinais. Há algum bem inferior? Algum Giffen? Justifique.

3. **Envelope na prática.** Para a CES $u(x) = (x_1^{\rho} + x_2^{\rho})^{1/\rho}$, $\rho < 1$, derive v e use o envelope ($\partial_y v = \lambda$, $\partial_{p_i} v = -\lambda x_i$) para recuperar as demandas sem reotimizar.

4. **Propriedades qualitativas.** Prove que $e(p, u)$ é côncava em p e conclua que $\partial x_i^h / \partial p_i \leq 0$. Por que a mesma conclusão **não** vale para $\partial x_i / \partial p_i$ (marshalliana)?

5. **Simetria.** Mostre que $\partial x_i^h / \partial p_j = \partial x_j^h / \partial p_i$ (lei de reciprocidade) e explique por que a versão marshalliana, $\partial x_i / \partial p_j$, **não** é simétrica — mas a matriz de Slutsky $\mathbf{s}(p, y)$ é.

6. **Bem-estar.** Para um imposto que eleva p_1, compare CV, EV e a variação do excedente do consumidor (área sob a demanda marshalliana). Mostre que, para preferências quase-lineares, as três coincidem.

4 Equilíbrio Parcial

Nos dois capítulos anteriores completamos o primeiro movimento do curso — **otimizar**: o consumidor escolhe a melhor cesta dentro do orçamento e disso saem demandas com propriedades bem definidas. Agora começa o segundo movimento — **equilibrar**: juntar os planos individuais de muitos consumidores e muitas firmas e perguntar **a que preço esses planos se tornam mutuamente consistentes**. A tradição que faz isso *um mercado de cada vez* remonta a Marshall (Marshall 1920) e se chama **equilíbrio parcial**: alteramos as condições de mercado de **alguns** bens, mantendo constantes os preços dos demais bens e as rendas individuais. É uma boa aproximação sempre que os efeitos de *feedback* do mercado estudado sobre o resto da economia são desprezíveis; quando não são, é preciso levar em conta os ajustes em **todos** os mercados simultaneamente — o **equilíbrio geral**, assunto do próximo capítulo.

> **!** Hipóteses do equilíbrio parcial
>
> 1. **Competição**: todos os agentes tomam preços como dados.
> 2. **Mercado pequeno**: o mercado é uma fração pequena da economia — desprezamos o impacto deste mercado sobre os *outros preços* e desprezamos o *efeito-renda* (a fração da renda gasta no bem é pequena).
> 3. **Firma de produto único**: cada firma produz um único produto.
> 4. **Produto homogêneo**: as pessoas não distinguem o produto de uma firma relativamente ao de outra — há *um* preço para *o* bem.

O capítulo termina relaxando a primeira hipótese no caso extremo oposto: uma única firma que sabe que afeta o preço — o **monopólio**.

4.1 Da demanda individual à demanda de mercado

Consumidores tomam preços como dados. Seja $x_j^h\left(p_j, p_{-j}, y^h\right)$ a demanda marshalliana do indivíduo h pelo bem j, onde p_j é o preço do bem j, $p_{-j} \in \mathbb{R}_+^{n-1}$ é o vetor com os preços de todos os outros bens e y^h é a renda do consumidor h. A **demanda de mercado** do bem j é a soma horizontal das demandas individuais:

$$x_j^d\left(p_j, p_{-j}, y\right) \equiv \sum_{h \in \mathcal{J}} x_j^h\left(p_j, p_{-j}, y^h\right),$$

em que $y = (y^1, \ldots, y^I)$ é a distribuição de rendas e $\mathcal{J}$ o conjunto de consumidores.

4.1.1 O problema da agregação

As demandas *individuais* herdam da otimização as propriedades do capítulo anterior: homogeneidade de grau zero, equilíbrio orçamentário (*adding up*), simetria e negatividade semidefinida da matriz de Slutsky. Quais dessas propriedades sobrevivem na demanda *de mercado*? Infelizmente, quase nenhuma: o resultado de **Sonnenschein–Mantel–Debreu** (Sonnenschein 1973; Mantel 1974; Debreu 1974) mostra que a agregação **destrói toda a estrutura da demanda** — qualquer função contínua, homogênea de grau zero e que satisfaça a lei de Walras pode ser gerada como demanda agregada de uma economia bem-comportada.

Em particular, **genericamente não existe uma função demanda agregada**

$$\tilde{x}(p, \bar{y}) = x(p, y)$$

em que a distribuição de renda y possa ser substituída pela renda média $\bar{y} = \mathbf{1} \cdot y = \sum_h y^h$. Para que isso fosse possível, $x(p, y) \equiv \sum_h x^h(p, y^h)$ teria de ser **invariante a redistribuições de renda** — transferir R$ 1 de um consumidor a outro não poderia mudar a demanda total, o que exige efeitos-renda idênticos entre os agentes.

4.1.2 Preferências quase-lineares

A saída, coerente com a hipótese de "mercado pequeno" (efeito-renda desprezível), é impor estrutura. Suporemos que todos os agentes têm preferências sobre $n+1$ bens **separáveis e quase-lineares**:

! Hipótese: quase-linearidade

$$u_h(x) = x_0 + \sum_{j=1}^{n} \phi_j^h(x_j),$$

com cada ϕ_j^h estritamente côncava e crescente, e o preço do bem 0 (o *numerário*, "todo o resto da economia") normalizado em 1.

Substituindo $x_0 = y^h - \sum_j p_j x_j$ na utilidade, o problema do agente h vira

$$\max_{(x_j)_{j=1}^n} \sum_{j=1}^{n} \phi_j^h(x_j) + y^h - \sum_{j=1}^{n} p_j x_j,$$

que é **separável bem a bem**: a CPO do bem j é simplesmente

$$\phi_j^{h\prime}(x_j) = p_j,$$

e a demanda do agente h pelo bem j é uma função **apenas do próprio preço**, $x_j^h(p_j)$ — a renda e os demais preços saíram de cena. A demanda de mercado é então

$$x_j^d(p_j) = \sum_h x_j^h(p_j),$$

e, como não há efeito-renda, $x_j^{h\prime}(p_j) = 1/\phi_j^{h\prime\prime} \leq 0$ para todo h, o que implica

$$\boxed{x_j^{d\prime}(p_j) \leq 0 : \text{ a demanda de mercado é negativamente inclinada.}}$$

Note o que compramos com a quase-linearidade: sem efeito-renda não há bens de Giffen, a lei da demanda vale no agregado e — veremos adiante — o excedente do consumidor passa a ser uma medida *exata* de bem-estar.

i Ferramenta matemática — Função inversa e monotonicidade

A demanda $x_j^h(p_j)$ é a **inversa** da utilidade marginal: $x_j^h = (\phi_j^{h\prime})^{-1}(p_j)$. Uma função contínua e **estritamente decrescente** (aqui $\phi_j^{h\prime}$, pois $\phi_j^{h\prime\prime} < 0$) é inversível, e a derivada da inversa

é o recíproco da derivada: $x_j^{h\prime} = 1/\phi_j^{h\prime\prime} < 0$. *(Inversibilidade e derivada da inversa: capítulo* Função Inversa*; concavidade e segunda derivada: capítulo* Derivadas *das Notas de Matemática.)*

Daqui em diante fixamos um mercado e escrevemos simplesmente $x^d(p)$, omitindo o índice do bem.

4.2 A oferta de mercado

Do lado da produção, a teoria da firma será desenvolvida em detalhe no Capítulo 5; aqui usamos apenas o essencial. Cada firma $j \in \mathcal{J} \equiv \{1, \dots, J\}$ é tomadora de preços e tem uma função custo $c_j(x)$ (dado o vetor w de preços dos insumos). Escolhe a produção resolvendo

$$\max_{x \geq 0} \; p\,x - c_j(x) \qquad \Longrightarrow \qquad p = c_j'(x^j),$$

e a CPO define a **curva de oferta da firma** $x^j(p, w)$: a função que associa a cada preço do produto a quantidade ótima ofertada. Se c_j é estritamente convexa ($c_j'' > 0$), a oferta é **crescente** no preço. (Com custos fixos evitáveis, a firma só opera se o preço cobre o custo variável médio — a oferta é o trecho ascendente do custo marginal acima do custo variável médio; cf. Varian (2015), cap. 23.)

A **oferta de mercado** é, como na demanda, a soma horizontal:

$$x^s(p, w) \equiv \sum_{j \in \mathcal{J}} x^j(p, w).$$

No caso geral, é uma função que mapeia, para cada vetor de preços de insumos e preço do produto, a oferta total do produto por todas as firmas da economia; sob as hipóteses deste capítulo, basta a versão de produto único acima. No **curto prazo**, o número de firmas J é **fixo**; o longo prazo, em que J é endógeno, fica para a seção final.

4.3 Equilíbrio de mercado

Temos os dois lados; falta o preço que os concilia.

! Definição — equilíbrio de mercado (curto prazo)

Um **equilíbrio de mercado (de curto prazo)** da indústria produtora de x é um par (x^*, p^*) tal que

$$x^* = x^d(p^*) = x^s(p^*).$$

A noção de equilíbrio tem essencialmente **duas partes**:

1. **Otimização**: firmas e consumidores estão otimizando — isso é capturado pelo uso das funções oferta e demanda, respectivamente;
2. **Consistência**: os planos individuais são compatíveis entre si — oferta igual a demanda.

A preços fora do equilíbrio, os planos são incompatíveis: a $p > p^*$ há vendedores dispostos a vender sem compradores (excesso de oferta); a $p < p^*$, o contrário. O preço é o *mecanismo de coordenação* que torna consistentes decisões tomadas de forma descentralizada — nenhum agente conhece os planos dos demais, só o preço.

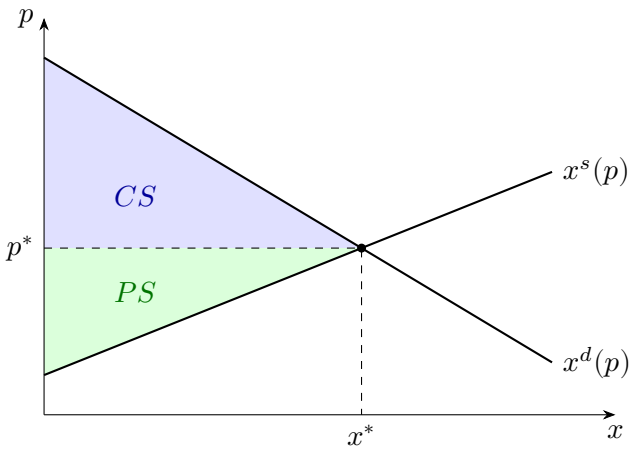

Figura 2: Equilíbrio de mercado: no par (x^*, p^*) os planos de compra e venda são consistentes. As áreas destacadas são o excedente do consumidor (CS) e o excedente do produtor (PS).

Existência. Sob quase-linearidade, a existência é elementar. Como cada ϕ_h é côncava, $x^h(p)$ é decrescente em p (de $\phi_h''(x)\,dx = dp$), donde $x^d(p) = \sum_h x^h(p)$ é contínua e decrescente; de forma similar, como cada c_f é convexa, $x^f(p)$ é crescente em p (de $c_f''(x)\,dx = dp$), donde $x^s(p)$ é contínua e crescente. Uma curva contínua que desce cruza uma curva contínua que sobe em (no máximo) um ponto — e cruza de fato sempre que a demanda começa acima da oferta ($x^d > x^s$ para p baixo) e termina abaixo ($x^d < x^s$ para p alto).

> **i** Ferramenta matemática — Teorema do valor intermediário
>
> A função excesso de demanda $z(p) \equiv x^d(p) - x^s(p)$ é **contínua**, com $z(p) > 0$ para p pequeno e $z(p) < 0$ para p grande. Pelo **teorema do valor intermediário**, existe p^* com $z(p^*) = 0$; a monotonicidade estrita de z dá a **unicidade**. No equilíbrio geral, com n mercados simultâneos, esse argumento unidimensional não basta — será preciso um teorema de ponto fixo. *(Continuidade e TVI: capítulo* Limites e Continuidade *das Notas de Matemática.)*

4.4 Bem-estar: excedentes e eficiência

Equilibrado o mercado, entra o terceiro movimento do curso — **avaliar**: o equilíbrio é *bom* em algum sentido preciso?

4.4.1 Excedentes como estatísticas suficientes

Com preferências quase-lineares (mais ainda, **utilidade transferível** via numerário), podemos usar "estatísticas suficientes" de bem-estar sem explicitar os indivíduos: o **excedente do consumidor** e o **excedente do produtor**. Vimos no capítulo anterior que, em geral, a área sob a demanda marshalliana é só uma aproximação das medidas corretas (CV e EV); com quase-linearidade as três coincidem, e as variações do excedente do consumidor representam variações **efetivas** do bem-estar do consumidor.

Seja $p(x)$ a **demanda inversa** de mercado (o preço ao qual a quantidade x é demandada). Para uma produção $\bar{x}$ vendida ao preço $p(\bar{x})$:

- **Excedente do consumidor**: $CS(\bar{x}) = \int_0^{\bar{x}} p(s)\,ds - p(\bar{x})\,\bar{x}$ — o que os consumidores estariam dispostos a pagar além do que efetivamente pagam;
- **Excedente do produtor**: a receita da firma acima do seu **custo variável**, $PS(\bar{x}) = p(\bar{x})\,\bar{x} - cv(\bar{x})$.

O **excedente total** é a soma dos dois. Escrevendo $c(\bar{x}) = cf + cv(\bar{x})$, com $cv(\bar{x}) = \int_0^{\bar{x}} c'(s)\,ds$,

$$CS + PS = \left\{\int_0^{\bar{x}} p(s)\,ds - p(\bar{x})\,\bar{x}\right\} + \{p(\bar{x})\,\bar{x} - cv(\bar{x})\} = \int_0^{\bar{x}} [p(s) - c'(s)]\,ds.$$

O nível de produção que maximiza $CS + PS$ é dado pela CPO

$$\frac{d}{dx}\left(\int_0^{x} [p(s) - c'(s)]\,ds\right)\Bigg|_{\bar{x}} = p(\bar{x}) - c'(\bar{x}) = 0,$$

ou seja: **produzir até que a disposição a pagar marginal iguale o custo marginal** — que é exatamente a condição do equilíbrio competitivo, em que consumidores igualam ϕ' ao preço e firmas igualam c' ao preço. Se a soma dos excedentes não for o máximo factível, há espaço para melhoras de Pareto, desde que haja uma eventual compensação entre ganhadores e perdedores da variação nos preços.

> **i** Ferramenta matemática — Teorema Fundamental do Cálculo
>
> Duas aplicações acima: (i) o custo variável é a **integral do custo marginal**, $cv(\bar{x}) = \int_0^{\bar{x}} c'(s)\,ds$; (ii) derivar $\int_0^{x}[p(s) - c'(s)]\,ds$ em relação ao limite superior devolve o **integrando avaliado no limite**, $p(x) - c'(x)$. Ambas são o **Teorema Fundamental do Cálculo**. *(Capítulos* Integral Definida *e* Antiderivadas *das Notas de Matemática.)*

4.4.2 O Primeiro Teorema do Bem-Estar (versão parcial)

O argumento gráfico tem uma versão formal. Uma alocação **eficiente** (de Pareto, com utilidade transferível) resolve

$$\max_{(x^h),(x^f)} \sum_h \phi_h(x^h) - \sum_f c_f(x^f) \qquad \text{s.a.} \qquad \sum_h x^h \le \sum_f x^f,$$

cujas condições de primeira ordem, com multiplicador λ na restrição de recursos, são

$$\phi_h'(x^h) = \lambda \;\; \forall h, \qquad c_f'(x^f) = \lambda \;\; \forall f, \qquad \sum_h x^h = \sum_f x^f.$$

Já o **equilíbrio** ocorre em um ponto onde os indivíduos maximizam utilidade, $\phi_h'(x^h) = p$ para todo h; as firmas maximizam lucro, $c_f'(x^f) = p$ para todo f; e oferta iguala demanda, $\sum_h x^h(p) = \sum_f x^f(p)$.

! Primeiro Teorema do Bem-Estar — versão de equilíbrio parcial

As condições de equilíbrio competitivo são **idênticas** às condições de eficiência fazendo $\lambda = p$: o equilíbrio de mercado maximiza o excedente total. O preço de equilíbrio *é* o preço-sombra dos recursos.

A interpretação é a mais importante do curso até aqui: o preço faz, de forma descentralizada, o trabalho que um planejador onisciente faria — iguala a utilidade marginal de **todos** os consumidores ao custo marginal de **todas** as firmas, sem que ninguém precise conhecer as preferências ou tecnologias alheias. A versão geral desse teorema, sem quase-linearidade, é o coração do próximo capítulo.

4.5 Estática comparativa

Um equilíbrio raramente interessa por si só; interessa **como ele se move** quando o ambiente muda. Vamos indexar a demanda e a oferta com variáveis que **só** as afetam: $x^d(p, \alpha)$ e $x^s(p, \beta)$. O que seriam α e β?

deslocadores de demanda (α)	deslocadores de oferta (β)
rendas	tecnologia
preços de substitutos ou complementares	preços de insumos
"preferências"	número de firmas

Em equilíbrio, $x^d(p^*, \alpha) = x^s(p^*, \beta)$ — uma identidade em (α, β), que podemos diferenciar. Uma variação em α nos dá

$$\frac{\partial x^d(p^*, \alpha)}{\partial p}\, dp^* + \frac{\partial x^d(p^*, \alpha)}{\partial \alpha}\, d\alpha = \frac{\partial x^s(p^*, \beta)}{\partial p}\, dp^*,$$

ou

$$\frac{dp^*}{d\alpha} = -\frac{\dfrac{\partial x^d(p^*, \alpha)}{\partial \alpha}}{\dfrac{\partial x^d(p^*, \alpha)}{\partial p} - \dfrac{\partial x^s(p^*, \beta)}{\partial p}},$$

que em elasticidades (multiplicando por α/p^*) é simplesmente

$$\boxed{\frac{dp^*/p^*}{d\alpha/\alpha} = -\frac{\varepsilon^d_\alpha}{\varepsilon^d - \varepsilon^s},}$$

onde $\varepsilon^d \equiv \frac{\partial x^d}{\partial p}\frac{p^*}{x^*} < 0$ e $\varepsilon^s \equiv \frac{\partial x^s}{\partial p}\frac{p^*}{x^*} > 0$ são as elasticidades-preço (com sinal) e $\varepsilon^d_\alpha \equiv \frac{\partial x^d}{\partial \alpha}\frac{\alpha}{x^*}$. Como o denominador $\varepsilon^d - \varepsilon^s$ é negativo, um choque que desloca a demanda para fora ($\varepsilon^d_\alpha > 0$) **eleva** o preço de equilíbrio — quanto mais, mais inelásticas as duas curvas.

Podemos calcular também o impacto nas **quantidades**, usando a curva que *não* foi afetada pelo choque (a oferta):

$$dx^* = \frac{\partial x^s(p^*, \beta)}{\partial p}\, dp^* \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{dx^*}{x^*} = \varepsilon^s\, \frac{dp^*}{p^*} = -\frac{\varepsilon^d_\alpha\, \varepsilon^s}{\varepsilon^d - \varepsilon^s}\, \frac{d\alpha}{\alpha}.$$

Obviamente, um exercício análogo pode ser feito para um choque de oferta ($d\beta$), trocando os papéis das curvas.

i Ferramenta matemática — Diferenciação implícita

A condição de equilíbrio define $p^*(\alpha, \beta)$ **implicitamente**: não temos fórmula fechada, mas a **diferenciação total** da identidade $x^d(p^*(\alpha), \alpha) \equiv x^s(p^*(\alpha), \beta)$ entrega $dp^*/d\alpha$ — é o teorema da função implícita em uma equação; com n mercados, vira um sistema linear resolvido por Cramer. A **elasticidade** $\varepsilon = \frac{\partial x}{\partial p}\frac{p}{x}$ é a forma sem unidades de medir essas respostas. *(Diferencial total, função implícita e regra de Cramer: capítulo* Funções de Várias Variáveis*; elasticidades: capítulo* Aplicações Econômicas *das Notas de Matemática.)*

4.6 Impostos

A imposição de um tributo é a aplicação clássica do aparato: como isso muda as escolhas individuais? como os novos planos se tornam mutuamente consistentes? qual o impacto no bem-estar das partes envolvidas?

Um imposto pode ser **ad valorem** — o comprador paga $p(1+t)$ — ou **específico** — paga $p+\tau$ por unidade. Trabalharemos com o específico. O imposto **quebra o preço em dois**:

$$p_d = \text{preço ao consumidor, que governa } x^d(p_d), \qquad p_s = \text{preço ao produtor, que governa } x^s(p_s),$$

ligados pela cunha $p_d = p_s + \tau$. A **incidência legal** diz quem recolhe: se o consumidor recolhe, $p_d = p_s + \tau$ com o mercado cotando p_s; se a firma recolhe, $p_s = p_d - \tau$ com o mercado cotando p_d.

4.6.1 Irrelevância da incidência legal

Quem recolhe o imposto **não** afeta o equilíbrio. Se o **consumidor** recolhe, o equilíbrio é $(x^\star, p_s^\star)$ tal que

$$x^\star = x^d(p_s^\star + \tau) = x^s(p_s^\star);$$

se a **firma** recolhe, é $(x^{\star\star}, p_d^{\star\star})$ tal que

$$x^{\star\star} = x^d(p_d^{\star\star}) = x^s(p_d^{\star\star} - \tau).$$

Definindo $p_d^{\star\star} = p_s^\star + \tau$, os dois sistemas são o **mesmo** sistema:

$$\boxed{x^\star = x^{\star\star}, \qquad p_s^\star + \tau = p_d^{\star\star}.}$$

O que importa é a *cunha* τ entre o que o comprador paga e o que o vendedor recebe — não o nome de quem entrega o dinheiro ao fisco. A incidência **econômica** (quem efetivamente paga) é determinada pelas *elasticidades*, como veremos a seguir.

4.6.2 Repasse e incidência econômica

Suponha que o consumidor recolhe: $x^d(p_s^\star + \tau) = x^s(p_s^\star)$. O impacto de uma pequena elevação do tributo, avaliado em $\tau = 0$, é

$$x^{d\prime}(p_s^\star)\,[dp_s^\star + d\tau] = x^{s\prime}(p_s^\star)\,dp_s^\star.$$

Multiplicando os dois lados por $p^\star/x^\star$ e usando as elasticidades **em valor absoluto** $\hat{\varepsilon}^d \equiv |\varepsilon^d|$ e ε^s:

$$\frac{dp_s^\star}{d\tau} = \frac{-\hat{\varepsilon}^d}{\hat{\varepsilon}^d + \varepsilon^s} \qquad \text{e} \qquad \frac{dp_d^\star}{d\tau} = 1 + \frac{dp_s^\star}{d\tau} = \frac{\varepsilon^s}{\hat{\varepsilon}^d + \varepsilon^s}.$$

As duas frações somam 1 e são as **parcelas da incidência econômica**:

$$\boxed{\text{consumidor arca com } \frac{\varepsilon^s}{\hat{\varepsilon}^d + \varepsilon^s}, \qquad \text{produtor arca com } \frac{\hat{\varepsilon}^d}{\hat{\varepsilon}^d + \varepsilon^s}.}$$

Paga mais quem é menos elástico — quem tem menos capacidade de fugir do mercado. Nos extremos: oferta perfeitamente elástica ($\varepsilon^s \to \infty$, curva de oferta horizontal) repassa *todo* o imposto ao consumidor; oferta perfeitamente inelástica (vertical) absorve tudo.

4.6.3 Peso morto

O imposto arrecada, mas *destrói* excedente ao afastar a quantidade do nível eficiente. No novo equilíbrio $x^\tau < x^*$, os excedentes privados perdem as áreas $A + B$ (consumidor) e $C + D$ (produtor); o governo arrecada $\tau\, x^\tau = A + C$. A conta líquida,

$$\Delta(CS + PS) + \text{arrecadação} = -(B + D) < 0,$$

é o **peso morto** (*deadweight loss*) do imposto: o excedente das transações que *deixaram de acontecer* — unidades entre x^τ e x^* para as quais a disposição a pagar excede o custo marginal, mas que a cunha inviabiliza.

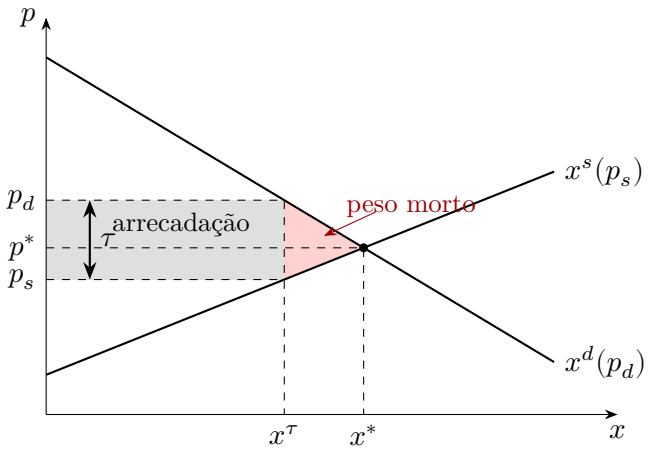

Figura 3: Um imposto específico τ abre uma cunha entre p_d e p_s e reduz a quantidade para x^τ. O retângulo é a arrecadação; o triângulo, o peso morto — o excedente das transações que deixaram de ocorrer.

Para um imposto pequeno, o triângulo tem base τ e altura $|dx| \propto \tau$: o peso morto cresce com o **quadrado** da alíquota (triângulo de Harberger) — impostos pequenos em bases largas distorcem menos que impostos grandes em bases estreitas. E quanto mais *inelásticas* as curvas, menor a queda de quantidade e menor o peso morto: eficiência recomenda tributar o que não foge.

4.7 O longo prazo: entrada e saída

No **curto prazo**, o número de firmas numa determinada indústria é fixo, e a oferta de mercado é $x^s(p,w) = \sum_{j\in\mathcal{J}} x^j(p,w)$ com $\mathcal{J}$ dado. No **longo prazo**, não há fatores fixos e o número de firmas que operam é variável:

- **Saída**: se preço $<$ custo médio, não compensa permanecer no mercado — saem todas as firmas para as quais o preço seja inferior ao custo médio;
- **Entrada**: se preço $>$ custo médio, novas firmas têm incentivo para entrar.

Portanto, o número de firmas em uma indústria é determinado **endogenamente** pelas condições de equilíbrio (em algumas indústrias há barreiras legais, tecnológicas ou estratégicas à entrada — caso da próxima seção).

> ❗ Definição — equilíbrio de longo prazo
>
> Um **equilíbrio de mercado da indústria produtora de x no longo prazo** é um trio $\{\hat{p}, \hat{x}, \widehat{F}\}$ tal que
>
> $$x^d(\hat{p}) = \sum_{f=1}^{\widehat{F}} x^f(\hat{p}) = \hat{x} \qquad \text{e} \qquad \pi^f(\hat{p}) = 0,\ \forall f = 1, \ldots, \widehat{F}.$$

À condição usual (otimização + consistência) soma-se a condição de **lucro zero**: enquanto houver lucro, a entrada desloca a oferta para a direita e derruba o preço; enquanto houver prejuízo, a saída faz o oposto. Com firmas idênticas e custo médio em U, o processo empurra o preço para o **mínimo do custo médio**: a rigor, $\widehat{F}$ é um inteiro e o preço fica no menor valor $\geq \min AC$ compatível com $\widehat{F}$ firmas sem lucro de entrada; para $\widehat{F}$ grande, a **curva de oferta de longo prazo é aproximadamente horizontal** em $p = \min AC$. No longo prazo, portanto, a margem relevante de ajuste não é cada firma produzir mais, e sim *haver mais firmas* — e todo o excedente vai para os consumidores (e para os fatores fixos que geram as diferenças de custo, quando as firmas não são idênticas).

4.8 Monopólio

O que acontece com uma indústria em que somente uma firma opera e a entrada de outras firmas é proibida? Neste caso, a hipótese de que a firma é tomadora de preços **carece de sentido**: a firma está consciente de que, ao expandir a quantidade ofertada do bem, o preço vai variar.

A primeira coisa importante a perceber é que, neste caso, **a curva de oferta não está definida**. Curva de oferta é uma função que associa a cada preço a oferta ótima da firma; o pressuposto na definição é que a firma, ao fazer sua escolha, **não afeta o preço** — o preço é a variável exógena do problema. No monopólio isso não é mais verdade: a escolha da firma afeta o preço.

Ao analisar a escolha ótima da firma, podemos proceder de duas maneiras alternativas: (i) supor que a firma **escolhe o preço**, ciente de que isto afeta a quantidade demandada em equilíbrio; ou (ii) supor que a firma **escolhe a quantidade**, sabendo que isto determina o preço de equilíbrio, dada a curva de demanda pelo produto. O equilíbrio de mercado é o **mesmo**, independentemente

de qual hipótese façamos. (Note que isso **não** é verdade para um oligopólio: se as firmas escolhem quantidades — Cournot — ou preços — Bertrand — faz toda a diferença.)

4.8.1 Receita marginal e elasticidade

Assim como no caso da demanda individual, podemos considerar a **elasticidade-preço** da demanda do bem, agora em valor absoluto:

$$\varepsilon \equiv \left| \frac{\partial x^d(p)}{\partial p} \frac{p}{x^d(p)} \right|,$$

com a taxonomia usual: $\varepsilon > 1$ demanda **elástica**, $\varepsilon = 1$ **unitária**, $\varepsilon < 1$ **inelástica**. A receita como função do preço, $R(p) \equiv x^d(p)\, p$, responde a preço como

$$\frac{\partial R(p)}{\partial p} = \frac{\partial x^d(p)}{\partial p}\, p + x^d(p) = x^d(p)\,[1 - \varepsilon]\,,$$

negativa se e somente se $\varepsilon > 1$. Pela demanda inversa $p = p^d(x)$, a receita é $R^*(x) \equiv p^d(x)\, x$ e a **receita marginal** é

$$\frac{\partial R^*(x)}{\partial x} = \frac{\partial p^d(x)}{\partial x}\, x + p^d(x) = p^d(x) \left[\frac{\partial p^d(x)}{\partial x} \frac{x}{p^d(x)} + 1 \right] = p^d(x) \left[1 - \frac{1}{\varepsilon} \right],$$

positiva se e somente se $\varepsilon > 1$. Vender uma unidade a mais tem dois efeitos: ganha-se p na unidade marginal, mas *derruba-se o preço de todas as unidades inframarginais*. Segue de imediato que o monopolista **nunca opera no trecho inelástico** da demanda: ali, reduzir quantidade aumenta a receita *e* reduz o custo.

4.8.2 O problema do monopolista

Escolhendo quantidade, o monopolista resolve

$$\max_{x \geq 0}\ p^d(x)\, x - C(x, w),$$

com CPO $R^{*\prime}(x^m) = \partial_x C(x^m, w)$, isto é, **receita marginal = custo marginal**. Usando a expressão da receita marginal:

$$\boxed{p^d(x^m) = \frac{\partial_x C(x^m, w)}{1 - \dfrac{1}{\varepsilon}} > \partial_x C(x^m, w).}$$

É a **regra da elasticidade inversa**: o preço é um *markup* sobre o custo marginal, tanto maior quanto menos elástica a demanda. Duas medidas equivalentes:

$$\underbrace{\frac{p - \partial_x C}{p} = \frac{1}{\varepsilon}}_{\text{índice de Lerner}} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \underbrace{\frac{p - \partial_x C}{\partial_x C} = \frac{1}{\varepsilon - 1}}_{\text{markup sobre o custo}}.$$

Como $p(x^m) > c'(x^m)$, **o nível de produção é subótimo**: há consumidores dispostos a pagar mais que o custo marginal das unidades entre x^m e x^*, e essas transações não acontecem — um peso morto análogo ao do imposto, mas agora a "arrecadação" (a área de markup) é transferida aos lucros do monopolista em vez de ao fisco. O monopólio viola a condição $p = c'$ do Primeiro Teorema: é a primeira *falha de mercado* do curso.

4.9 Laboratório computacional em R

Com demanda e oferta lineares, o equilíbrio, os excedentes e o **peso morto** de um imposto são aritmética direta. Sejam a demanda inversa $p = a - bQ$ e a oferta inversa $p = c + dQ$; um imposto específico t desloca a oferta para $p = c + t + dQ$.

```
a <- 10; b <- 0.5; cc <- 1; d <- 0.3; t <- 1.5
Qe <- (a-cc)/(b+d); Pe <- a - b*Qe                    # equilíbrio sem imposto
CS <- 0.5*(a-Pe)*Qe; PS <- 0.5*(Pe-cc)*Qe
Qt <- (a-cc-t)/(b+d); Pd <- a - b*Qt; Ps <- Pd - t    # com imposto
DWL <- 0.5*t*(Qe-Qt)                                  # peso morto (deadweight loss)
round(c(Qe=Qe, Pe=Pe, CS=CS, PS=PS, Qt=Qt, Pd=Pd, Ps=Ps, DWL=DWL), 3)
```

```
    Qe     Pe     CS     PS     Qt     Pd     Ps    DWL
11.250  4.375 31.641 18.984  9.375  5.312  3.812  1.406
```

```
Q <- seq(0, 18, length.out = 200)
df <- data.frame(Q, Demanda = a - b*Q, Oferta = cc + d*Q)
ggplot(df) +
  geom_line(aes(Q, Demanda, color = "Demanda")) +
  geom_line(aes(Q, Oferta,  color = "Oferta")) +
  annotate("point", x = Qe, y = Pe, size = 2.4) +
  annotate("segment", x = Qt, xend = Qt, y = 0, yend = Pd, linetype = "dashed", color = cz) +
  scale_color_manual(values = c(Demanda = az, Oferta = vd)) +
  coord_cartesian(ylim = c(0, 10)) + labs(x = "Q", y = "p")
```

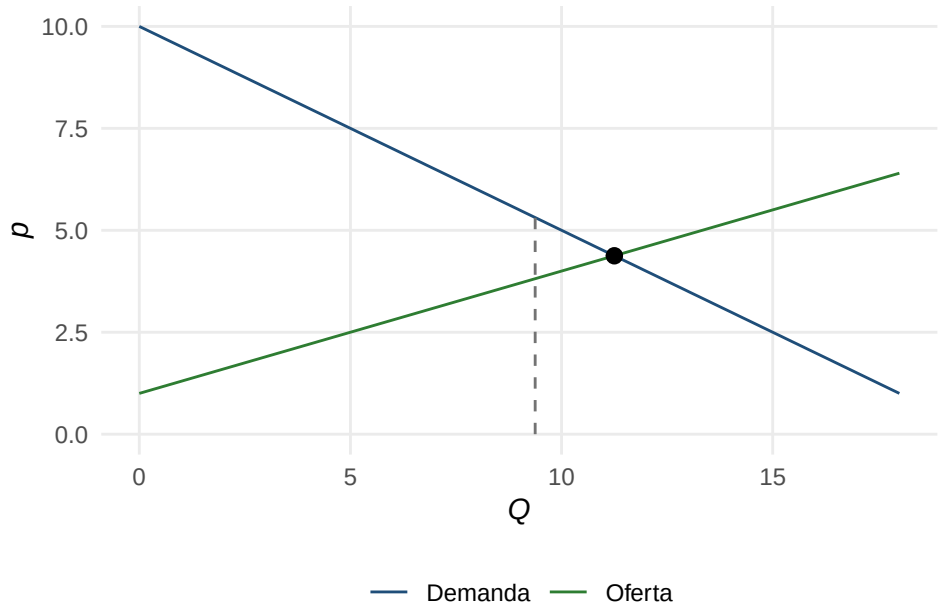

Figura 4: Equilíbrio de mercado e a cunha de um imposto específico: a queda de Q^* para Q_t (linha tracejada) é a fonte do peso morto.

O peso morto fechado é $\frac{1}{2}\frac{bd}{b+d}t^2$ — confira que bate com `DWL` acima; é exatamente o Exercício 1(d).

4.10 Exercícios

1. **Equilíbrio linear completo.** Sejam $x^d(p) = a - bp$ e $x^s(p) = c + dp$, com $a, b, d > 0$ e $a > c \geq 0$. (a) Encontre (x^*, p^*). (b) Introduza um imposto específico τ recolhido pela firma e depois pelo consumidor; verifique a irrelevância da incidência legal. (c) Calcule $dp_s/d\tau$ e confirme a fórmula das elasticidades. (d) Mostre que o peso morto é $\frac{1}{2}\frac{bd}{b+d}\tau^2$ — quadrático em τ.

2. **Agregação quase-linear.** Dois consumidores têm $u_h = x_0 + \theta_h \ln x_1$, $h = 1, 2$. (a) Derive as demandas individuais e a demanda de mercado por x_1. (b) Mostre que a demanda de mercado depende de $\theta_1 + \theta_2$, mas não da distribuição de renda. (c) Agora troque as preferências por $u_h = x_0^{1/2} x_1^{1/2}$ e mostre que a demanda de mercado passa a depender da distribuição de renda — qual hipótese falhou?

3. **Sonnenschein–Mantel–Debreu.** Explique em que sentido "a agregação destrói a estrutura da demanda". Quais propriedades da demanda individual sobrevivem à agregação (dica: pense em continuidade, homogeneidade e lei de Walras) e quais não?

4. **Estática comparativa.** Numa cidade, a demanda por aluguéis tem $\hat{\varepsilon}^d = 0{,}5$ e a oferta de curto prazo é quase fixa, $\varepsilon^s = 0{,}1$. (a) Um influxo migratório desloca a demanda em 10% ($\varepsilon^d_\alpha \, d\alpha/\alpha = 0{,}10$); quanto sobem aluguéis e quantidades? (b) Refaça com $\varepsilon^s = 2$ (longo prazo, construção responde) e interprete.

5. **Incidência.** "Impostos sobre a folha de pagamento recolhidos pelo empregador protegem o trabalhador." Avalie a afirmação usando a irrelevância da incidência legal e a evidência de que a oferta de trabalho é bem menos elástica que a demanda.

6. **Longo prazo.** Todas as firmas (potenciais e ativas) têm $c(x) = F + \frac{1}{2}x^2$. (a) Encontre a oferta individual e o mínimo do custo médio. (b) Com demanda $x^d(p) = A - p$, caracterize $\{\hat{p}, \hat{x}, \widehat{F}\}$ ignorando o problema do inteiro. (c) O que acontece com $\widehat{F}$ e com $\hat{p}$ quando A cresce? Interprete a oferta de longo prazo horizontal.

7. **Monopólio.** Um monopolista tem custo marginal constante c e demanda isoelástica $x^d(p) = p^{-\varepsilon}$, $\varepsilon > 1$. (a) Encontre preço e markup. (b) Mostre que o peso morto relativo ao competitivo cresce quando $\varepsilon \downarrow 1$. (c) Por que o problema do monopolista não tem solução se $\varepsilon \leq 1$? Relacione com a receita marginal.

5 Equilíbrio Geral

No capítulo anterior, estudamos um mercado de cada vez, congelando o resto da economia. Mas os mercados conversam entre si: o preço do etanol afeta o do açúcar (competem pela cana), que afeta a renda dos usineiros, que afeta a demanda por caminhões. Quando levamos em conta os ajustes **em todos os mercados simultaneamente**, estamos estudando o **equilíbrio geral** — o programa de pesquisa iniciado por Walras (Walras 1874) e completado por Arrow, Debreu e McKenzie (Arrow e Debreu 1954; McKenzie 1954; Debreu 1959). A pergunta é a mais ambiciosa do curso: existe um vetor de preços que torna consistentes, *ao mesmo tempo*, os planos de todos os agentes em todos os mercados? E o que esse equilíbrio tem de bom? Para isolar o essencial, começamos com a economia mais enxuta possível: **sem produção**, só troca.

5.1 A economia de trocas

5.1.1 O ambiente

Dois agentes ($j = 1, 2$) e dois bens ($i = 1, 2$). Sem produção, a economia de troca é **completamente caracterizada pelas preferências e pelas dotações iniciais** dos dois agentes: cada agente j possui uma *dotação inicial* de cada bem, $\bar{x}^j \equiv (\bar{x}^j_1, \bar{x}^j_2)$. Ninguém "ganha renda": a renda de cada um é o **valor de mercado do que ele traz de casa**.

- Uma **alocação** é um vetor (x^1, x^2), tal que $x^j = (x^j_1, x^j_2)$;
- Os **recursos totais** da economia são a soma das dotações: $\bar{x} \equiv \sum_{j=1,2} \bar{x}^j$;
- Como não há produção, uma alocação é **viável** se e só se

$$\sum_{j=1,2} x^j \leq \sum_{j=1,2} \bar{x}^j.$$

5.1.2 A caixa de Edgeworth

Com dois agentes e dois bens, *toda* a economia cabe em uma figura. A **caixa de Edgeworth** tem base $\bar{x}_1$ e altura $\bar{x}_2$: cada ponto da caixa é uma alocação viável (com igualdade), lida a partir do canto inferior esquerdo para o agente 1 e do canto superior direito (de cabeça para baixo) para o agente 2. A dotação ω é um ponto da caixa; as curvas de indiferença dos dois agentes que passam por ω delimitam a **lente das trocas mutuamente vantajosas**; e o conjunto das alocações em que as curvas de indiferença são *tangentes* — onde os ganhos de troca se esgotam — é a **curva de contrato**.

5.1.3 O problema do agente: renda endógena

Admitamos que o vetor de preços dessa economia é p. O problema de otimização do agente j é o UMP do Capítulo 2 com uma novidade crucial — a renda é o **valor da dotação**, e portanto depende dos preços:

$$\max_x \; u^j(x) \qquad \text{s.a.} \qquad p \cdot x \leq p \cdot \bar{x}^j.$$

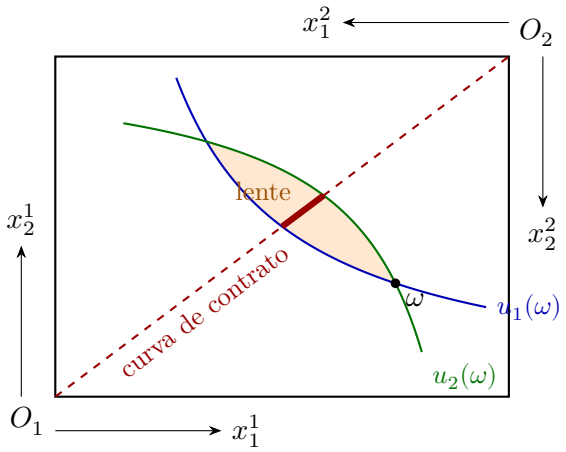

Figura 5: A caixa de Edgeworth. Cada ponto é uma alocação viável; ω é a dotação. A região sombreada é a lente das trocas que beneficiam os dois agentes; a diagonal tracejada é a curva de contrato (alocações eficientes) e o trecho grosso é o *núcleo*: alocações eficientes que nenhum dos dois rejeitaria em favor de ω.

Isso define, de um lado, a demanda marshalliana $x^j(p, p \cdot \bar{x}^j)$ e, de outro, a chamada **demanda excedente** (ou demanda líquida)

$$z^j(p) \equiv x^j(p, p \cdot \bar{x}^j) - \bar{x}^j,$$

que registra o que o agente quer *comprar* ($z_i^j > 0$) ou *vender* ($z_i^j < 0$) de cada bem. Uma mudança de preços agora tem um efeito extra em relação à teoria do consumidor: além dos efeitos substituição e renda usuais, ela **revaloriza a dotação** — quem vende o bem que encareceu fica mais rico.

5.2 O equilíbrio walrasiano

! Definição — equilíbrio de uma economia de trocas

Uma alocação $\{x_i^*\}_i$ e um vetor de preços p são um **equilíbrio** de uma economia de trocas $\{\succeq_i, \bar{x}_i\}$ se:

- **Otimização**: para todo i, x_i^* é máximo para $\succeq_i$ dada a restrição $p \cdot \bar{x}_i \geq p \cdot x_i$;
- **Viabilidade**: $\sum_i x_i^* \leq \sum_i \bar{x}_i$.

É a mesma estrutura de duas partes do capítulo anterior — racionalidade individual + consistência dos planos (*market clearing*) —, mas agora exigida em **todos os mercados de uma vez**. Na caixa de Edgeworth, o equilíbrio é um ponto em que a reta orçamentária passa pela dotação ω (ambos podem "pagar" sua própria dotação) e **tangencia simultaneamente** as curvas de indiferença dos dois agentes: aos preços de equilíbrio, os planos ótimos dos dois coincidem no mesmo ponto da caixa.

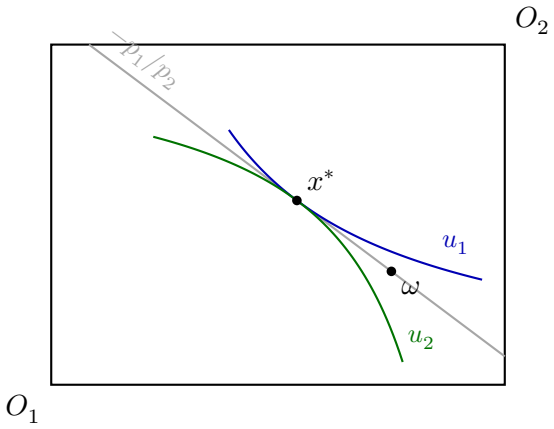

Figura 6: Equilíbrio walrasiano na caixa de Edgeworth: a reta orçamentária passa pela dotação ω e as curvas de indiferença dos dois agentes tangenciam-na no mesmo ponto x^* — os planos individuais são compatíveis.

5.2.1 A demanda excedente agregada

A viabilidade corresponde a $\sum_j (x^j - \bar{x}^j) \leq \mathbf{0}$, ou $\sum_j z^j(p) \leq \mathbf{0}$. A **demanda excedente agregada** nada mais é do que

$$z(p) \equiv \sum_j z^j(p),$$

e podemos escrever a viabilidade como $z(p) \leq \mathbf{0}$: *equilíbrio é um zero (ou melhor, um não-positivo) do sistema de demandas excedentes.* Reduzimos a busca por equilíbrio a estudar as propriedades de uma única função vetorial. Quais são elas?

> **!** Propriedades de $z(p)$
>
> 1. **Continuidade**: $z(p)$ é contínua em p;
> 2. **Homogeneidade de grau zero**: $z(\lambda p) = z(p)$ para todo $\lambda > 0$;
> 3. **Lei de Walras**: $p \cdot z(p) = 0$.

A continuidade vem do Teorema do Máximo (preferências contínuas e estritamente convexas); a homogeneidade, de os orçamentos individuais não mudarem quando todos os preços escalam — **só os preços relativos importam**, e podemos normalizar (fixar um numerário, ou tomar p no simplexo). A terceira propriedade merece derivação.

5.2.2 A Lei de Walras

A lei de Walras diz que a demanda excedente agregada tem **valor** 0 para *qualquer* vetor de preços positivos — não apenas no equilíbrio. Note que é o **valor** da demanda agregada (um escalar) que é zero, não a demanda agregada em si (um vetor). Ela decorre de, com preferências estritamente monotônicas, a restrição orçamentária de todos os agentes valer com **igualdade**: para cada j,

$$p \cdot z^j(p) = \sum_{i=1,2} p_i \left(x_i^j(p, p \cdot \bar{x}^j) - \bar{x}_i^j \right) = 0.$$

Somando em j e trocando a ordem das somas (a ordem é irrelevante),

$$\sum_i p_i \underbrace{\left[\sum_j \left(x_i^j - \bar{x}_i^j\right)\right]}_{z_i(p)} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{p \cdot z(p) = 0.}$$

Com dois mercados, uma consequência importante é que $p_1 z_1(p) = -p_2 z_2(p)$: se um mercado está com excesso de demanda ($z_i > 0$), o outro está com excesso de oferta ($z_{-i} < 0$). Mais geralmente, $p_i z_i(p) = -\sum_{j \neq i} p_j z_j(p)$; portanto, **se $n-1$ mercados estiverem em equilíbrio, o n-ésimo também estará**. Os orçamentos amarram os mercados uns aos outros: não há como "faltar" em um sem "sobrar" em outro. (É por isso que, no equilíbrio parcial, ignorar o mercado do numerário era legítimo.)

5.3 Existência de equilíbrio

Equilíbrio é uma solução do sistema $z(p^*) \leq \mathbf{0}$. No capítulo anterior, com um único mercado, o teorema do valor intermediário bastava. Com n mercados interdependentes, não basta seguir uma curva: a prova original (Arrow e Debreu 1954; McKenzie 1954) faz uso de um **teorema de ponto fixo**. As demonstrações na literatura diferem quanto ao ponto de partida (demandas excedentes, ou preferências, dotações e tecnologias) e quanto ao objeto a que os teoremas de ponto fixo são aplicados (preços somente, pesos individuais, alocações e preços etc.); as dificuldades surgem da necessidade de definir condições, a partir dos **primitivos** da economia, que permitam a aplicação dos teoremas. Seguimos o caminho mais curto, partindo das propriedades de z.

! Proposição — existência

Suponha que $z(p)$, definida para todo $p \geq \mathbf{0}$, $p \neq \mathbf{0}$, tem as propriedades de (1) continuidade, (2) homogeneidade de grau zero e (3) lei de Walras. Então existe $p^* \geq \mathbf{0}$, $p^* \neq \mathbf{0}$, tal que $z(p^*) \leq \mathbf{0}$.

Demonstração. Pela homogeneidade, podemos restringir os preços ao **simplexo** $\Delta = \{p \geq \mathbf{0} : \sum_l p_l = 1\}$ — um conjunto convexo e compacto. Para todo $p \in \Delta$, definamos

$$z^+(p) = (\max\{z_1(p), 0\}, \ldots, \max\{z_L(p), 0\}),$$

uma função contínua com imagem em $\mathbb{R}^L_+$ (provar que $z(p) \leq \mathbf{0}$ equivale a provar que $z^+(p) \cdot z(p) = 0$). Considere $\alpha : \Delta \to \mathbb{R}$,

$$\alpha(p) := \sum_l (p_l + z_l^+(p)),$$

contínua e estritamente positiva, e com ela a função

$$f(p) = \frac{1}{\alpha(p)}(p + z^+(p)),$$

também contínua e com $f(p) \in \Delta$ — a leitura econômica: f **encarece os bens em excesso de demanda** e renormaliza. Pelo teorema de Brouwer, existe p^* tal que $f(p^*) = p^*$. Nesse ponto,

$$0 = p^* \cdot z(p^*) = \frac{1}{\alpha(p^*)}(p^* \cdot z(p^*) + z^+(p^*) \cdot z(p^*)) = \frac{1}{\alpha(p^*)}\, z^+(p^*) \cdot z(p^*),$$

em que a primeira igualdade é a lei de Walras, a segunda usa o ponto fixo $f(p^*) = p^*$ e a última, a lei de Walras novamente. Portanto $z^+(p^*) \cdot z(p^*) = 0$: cada termo dessa soma é $(z_l^+)z_l = \max\{z_l, 0\}\, z_l \geq 0$, e a soma só é zero se todos forem — logo $z(p^*) \leq \mathbf{0}$. ■

> **i** Ferramenta matemática — Teorema do ponto fixo de Brouwer
>
> **Brouwer**: se $X \subset \mathbb{R}^n$ é convexo, compacto e não-vazio e $f : X \to X$ é contínua, então f tem um **ponto fixo**: existe $x \in X$ com $f(x) = x$. Em uma dimensão, Brouwer *é* o teorema do valor intermediário aplicado a $g(x) = f(x) - x$ (contínua, $g(a) \geq 0 \geq g(b)$) — a versão n-dimensional é exatamente a generalização que faltava ao argumento do capítulo anterior. *(Continuidade, compacidade e TVI: capítulo* Limites e Continuidade *das Notas de Matemática; a prova de Brouwer para $n > 1$ usa ferramentas de topologia além do escopo do curso.)*

Duas ressalvas. *Primeira*: como a demonstração começa com hipóteses sobre a demanda excedente, a pergunta primeira é — que hipóteses sobre as **primitivas** (preferências, dotações) geram essa função? Sabemos, por exemplo, que com preferências fortemente monótonas $z(\cdot)$ **não está definida** para $p \notin \mathbb{R}^n_{++}$ (a demanda explode quando algum preço vai a zero), e a proposição pede z definida em todo o simplexo — tratar esse caso exige argumentos de fronteira mais delicados. *Segunda*: o teorema garante **existência**, não **unicidade** — a função $z_i(p)$ pode cruzar o zero várias vezes, e economias perfeitamente regulares podem ter múltiplos equilíbrios (o resultado de Sonnenschein–Mantel–Debreu do capítulo anterior é precisamente a razão: z quase não tem estrutura).

5.4 Equilíbrio e eficiência

Existindo o equilíbrio, voltamos ao movimento **avaliar**. Uma alocação $\hat{x}$ é dita **eficiente no sentido de Pareto** se não existir uma forma de melhorar uma pessoa sem piorar outra. Formalmente, uma alocação eficiente resolve o **problema de Pareto**:

$$\max\ u^A(x^A) \qquad \text{s.a.} \qquad u^j(x^j) \geq \bar{u}^j, \quad j = B, C, \ldots \qquad \text{e} \qquad \sum_j x^j \leq \bar{x},$$

— maximizar a utilidade de um agente mantendo as dos demais em níveis pré-fixados, dentro dos recursos da economia. Variando os níveis $\bar{u}^j$, traçamos **todas** as alocações eficientes (o número de bens e pessoas não importa). Na caixa de Edgeworth, o conjunto solução é a **curva de contrato** da Figura 5.

> **i** Ferramenta matemática — O problema de Pareto como Lagrangeano
>
> Com utilidades diferenciáveis e solução interior, o Lagrangeano do problema de Pareto tem CPO $\partial_i u^A = \lambda_i$ e $\mu^j\, \partial_i u^j = \lambda_i$ (onde μ^j é o multiplicador da restrição de utilidade e λ_i o do recurso i). Dividindo a condição do bem 1 pela do bem 2, para cada agente: $\text{TMgS}^A_{12} = \text{TMgS}^j_{12} = \lambda_1/\lambda_2$ — **as TMgS de todos os agentes se igualam**, e igualam-se à razão dos preços-sombra dos recursos. Eficiência é tangência mútua; o mercado obterá isso fazendo todos tangenciarem a *mesma* reta de preços. *(Multiplicadores e interpretação de preço-sombra: capítulo* Otimização com Restrição *das Notas de Matemática.)*

5.4.1 O Primeiro Teorema do Bem-Estar

! Primeiro Teorema do Bem-Estar

Considere uma economia de trocas $(u^i, \bar{x}^i)_{i=1,2}$, em que u^i é **contínua e estritamente crescente** para todo i. Então **todo equilíbrio walrasiano é Pareto eficiente**.

Demonstração. Seja (x^*, p) um equilíbrio e suponha, por contradição, que exista alocação viável $(\hat{x}^i)_i$ com $\hat{x}^i \succeq_i x^{*i}$ para todo i e $\hat{x}^k \succ_k x^{*k}$ para algum k. Como x^{*k} é *ótimo* no orçamento de k, a cesta estritamente melhor tem de ser inacessível: $p \cdot \hat{x}^k > p \cdot \bar{x}^k$. E para os demais agentes, $\hat{x}^i \succeq_i x^{*i}$ exige $p \cdot \hat{x}^i \geq p \cdot \bar{x}^i$ — se custasse estritamente menos, a monotonicidade estrita permitiria comprar um pouco mais de tudo, ainda dentro do orçamento, e superar x^{*i}. Somando sobre os agentes: $p \cdot \sum_i \hat{x}^i > p \cdot \sum_i \bar{x}^i$. Mas a viabilidade diz $\sum_i \hat{x}^i \leq \sum_i \bar{x}^i$, que multiplicada por $p \geq \mathbf{0}$ dá a desigualdade oposta — contradição. ■

Note a economia de hipóteses: nada de convexidade, diferenciabilidade ou interioridade — só monotonicidade estrita (e, implicitamente, a ausência de externalidades: a utilidade de cada um depende só da própria cesta). É a formalização definitiva da "mão invisível": preços que equilibram mercados esgotam os ganhos de troca.

5.4.2 O Segundo Teorema do Bem-Estar

O Primeiro Teorema diz que o mercado não desperdiça; não diz que o resultado é *justo* — o equilíbrio herda a distribuição implícita nas dotações. O Segundo Teorema responde à pergunta inversa: *qualquer* alocação eficiente pode ser alcançada pelo mercado?

! Segundo Teorema do Bem-Estar

Considere uma economia de trocas $(u^i, \bar{x}^i)_{i=1,2}$, onde u^i é **contínua, estritamente crescente e estritamente côncava** para todo i. Então, se x^* é uma alocação eficiente, x^* é a alocação correspondente ao equilíbrio walrasiano da economia $(u^i, x^{*i})_{i=1,2}$ — i.e., a economia cuja dotação inicial é $\bar{x} \equiv x^*$.

Em palavras: escolhida a alocação eficiente desejada, basta **redistribuir as dotações** (transferências de recursos, *lump-sum*) e deixar o mercado funcionar — os preços de suporte fazem o resto. Duas observações:

1. **A convexidade agora é essencial.** No Primeiro Teorema ela não aparecia; aqui, sem preferências convexas pode não existir reta de preços que *separe* os conjuntos "melhor que x^*" dos dois agentes — a reta tangente cruza a curva de indiferença não-convexa e o agente, posto diante daqueles preços, escolheria *outro* ponto. (Geometricamente, o teorema é uma aplicação do **teorema do hiperplano separador** a conjuntos convexos disjuntos.)
2. **Eficiência e distribuição se separam.** O par de teoremas fundamenta a divisão de trabalho clássica da economia pública: o mercado cuida da *eficiência*; a política redistributiva, operando sobre *dotações* (e não sobre preços), cuida da *equidade*. Na prática, transferências verdadeiramente lump-sum são raras — impostos distorcem preços e nos devolvem aos pesos mortos do capítulo anterior.

Na caixa de Edgeworth, a transferência move ω para ω' na reta orçamentária que suporta o ponto eficiente desejado e': muda-se o *ponto de partida*, não os preços relativos de equilíbrio.

5.5 A economia com produção

O aparato se estende a economias com firmas. O **ambiente com produção** tem:

- **Firmas**, indexadas por $f = 1, \dots, m$, caracterizadas por uma tecnologia representada por $\mathbb{Y}^f$ (o *conjunto de produção*: vetores $y \in \mathbb{R}^n$ com insumos como entradas negativas e produtos como positivas). Firmas são tomadoras de preços e maximizadoras de lucro;
- **Consumidores**, indexados por $h = 1, \dots, H$, caracterizados por um conjunto de consumo $\mathbb{X}^h$, preferências racionais e contínuas $\succeq_h$ (representáveis por u^h), dotações iniciais $\bar{x}^h \in \mathbb{R}^n_+$ e **participações acionárias** nas firmas $\theta^h = (\theta^h_1, \dots, \theta^h_m) \in [0,1]^m$, com $\sum_h \theta^h_f = 1$ para todo f — os lucros pertencem, em última instância, às pessoas;
- **Ambiente de transações**: economia competitiva — agentes tomam preços como dados; domicílios e firmas agem de forma independente e somente se relacionam via sistema de preços; inexistem externalidades e bens públicos.

Uma **alocação** é uma lista $\left(\{x^h\}_{h=1}^H, \{y^f\}_{f=1}^m\right)$; ela é **factível** se

$$\sum_h x^h \leq \sum_h \bar{x}^h + \sum_f y^f.$$

O problema da firma. O lucro da firma f é

$$\pi^f(p) = \max_{y \in \mathbb{Y}^f} \; p \cdot y,$$

cuja solução é a função oferta $y^f(p)$ (naturalmente, $\pi^f(p) = p \cdot y^f(p)$). Note a elegância da convenção de sinais: *um único produto interno* $p \cdot y$ é receita menos custo.

O problema do consumidor. As escolhas ótimas resolvem

$$\max_x \; u^h(x) \qquad \text{s.a.} \qquad p \cdot x \leq p \cdot \bar{x}^h + \theta^h \cdot \pi(p),$$

onde $\pi(p)$ tem por entradas os lucros das firmas, $\pi^f(p)$. A renda individual $I^h = p \cdot \bar{x}^h + \theta^h \cdot \pi(p)$ é — como $\bar{x}^h$ e θ^h são primitivos — uma função **de** p **somente**; podemos então definir a demanda individual $x^h(p) \equiv \tilde{x}^h\left(p, p \cdot \bar{x}^h + \theta^h \cdot \pi(p)\right)$ e repetir toda a análise da economia de trocas.

! Definição — equilíbrio competitivo com produção

Dada uma economia de propriedade privada especificada por meio de $\left(\{\mathbb{X}^h, \succeq_h, \bar{x}^h\}_{h=1}^H, \{\mathbb{Y}^f\}_{f=1}^m, \{\theta^h_1, \dots, \theta^h_m\}_{h=1}^H\right)$, uma lista $\left(\hat{p}, \{\hat{x}^h\}_{h=1}^H, \{\hat{y}^f\}_{f=1}^m\right)$ é um **equilíbrio competitivo** se:

1. $\hat{x}^h \in \mathbb{X}^h$ para todo h;
2. $\hat{y}^f \in \mathbb{Y}^f$ para todo f;
3. $\sum_i \hat{p}_i \hat{x}^h_i \leq \sum_i \hat{p}_i \bar{x}^h_i + \sum_i \sum_f \theta^h_f \hat{p}_i \hat{y}^f_i$ para todo h (orçamentos respeitados);
4. para todo h, $\hat{x}^h \succeq_h x^h$ para todo $x^h \in \mathbb{X}^h$ tal que $p \cdot x \leq p \cdot \bar{x}^h + \theta^h \cdot \pi(p)$ (consumidores otimizam);

5. para todo f, $\hat{p}\cdot\hat{y}^f \geq \hat{p}\cdot y$ para todo $y \in \mathbb{Y}^f$ (firmas otimizam); e
6. $\widehat{X} \leq \widehat{Y} + \bar{X}$, onde $\widehat{X} = \sum_h \hat{x}^h$, $\widehat{Y} = \sum_f \hat{y}^f$ e $\bar{X} = \sum_h \bar{x}^h$ (viabilidade).

A estrutura é sempre a mesma — otimização de todos + consistência —, agora com uma camada extra de coerência contábil: os lucros que entram nos orçamentos via θ^h são os *mesmos* gerados pelas escolhas ótimas das firmas. Sob hipóteses análogas às da economia de trocas (e conjuntos de produção convexos), valem versões com produção da existência e dos dois teoremas do bem-estar; o caso quase-linear do capítulo anterior — onde as condições de equilíbrio reproduziam as de Pareto com $\lambda = p$ — é o exemplo mais simples dessa família. As propriedades de $\mathbb{Y}^f$, da função lucro e da oferta são o assunto do próximo capítulo.

5.6 Laboratório computacional em R

Numa economia de trocas 2×2 com preferências Cobb-Douglas, o **equilíbrio walrasiano** é a raiz da função de excesso de demanda — uma linha de `uniroot`. Tomamos o bem 2 como numerário ($p_2 = 1$) e resolvemos $z_1(p) = 0$.

```
aA <- 0.6; aB <- 0.3; eA <- c(1.0, 0.2); eB <- c(0.2, 1.0); tot <- eA + eB
x1A <- function(p) aA*(p*eA[1] + eA[2])/p            # demanda de A pelo bem 1
x1B <- function(p) aB*(p*eB[1] + eB[2])/p
z1  <- function(p) x1A(p) + x1B(p) - tot[1]          # excesso de demanda do bem 1
peq <- uniroot(z1, c(0.01, 100))$root
mA  <- peq*eA[1] + eA[2]; xA <- c(aA*mA/peq, (1-aA)*mA)
round(c(preco_relativo = peq, xA1 = xA[1], xA2 = xA[2],
        xB1 = tot[1]-xA[1], xB2 = tot[2]-xA[2]), 4)
```

```
preco_relativo            xA1            xA2            xB1            xB2
        0.7778         0.7543         0.3911         0.4457         0.8089
```

A caixa de Edgeworth exibe dotação, equilíbrio, a reta de preços e as duas curvas de indiferença — tangentes no equilíbrio (Primeiro Teorema do Bem-Estar em ação):

```
uA <- xA[1]^aA*xA[2]^(1-aA); xB <- tot - xA; uB <- xB[1]^aB*xB[2]^(1-aB)
x1 <- seq(0.02, tot[1]-0.02, length.out = 300)
icA <- data.frame(x1, x2 = (uA/x1^aA)^(1/(1-aA)))                    # indiferença de A
icB <- data.frame(x1, x2 = tot[2] - (uB/(tot[1]-x1)^aB)^(1/(1-aB)))  # indiferença de B
bl  <- data.frame(x1, x2 = eA[2] - peq*(x1 - eA[1]))                 # reta de preços
ggplot() +
  annotate("rect", xmin = 0, xmax = tot[1], ymin = 0, ymax = tot[2], fill = NA, color = "grey60
  geom_line(data = subset(icA, x2 >= 0 & x2 <= tot[2]), aes(x1, x2), color = az) +
  geom_line(data = subset(icB, x2 >= 0 & x2 <= tot[2]), aes(x1, x2), color = vd) +
  geom_line(data = subset(bl,  x2 >= 0 & x2 <= tot[2]), aes(x1, x2), color = cz, linetype = "da
  annotate("point", x = eA[1], y = eA[2], shape = 1, size = 2.6) +
  annotate("point", x = xA[1], y = xA[2], size = 2.6) +
  annotate("text", x = eA[1], y = eA[2]-0.08, label = "dotação", size = 3) +
```

```
  annotate("text", x = xA[1]-0.02, y = xA[2]+0.09, label = "equilíbrio", size = 3) +
  coord_fixed(xlim = c(0, tot[1]), ylim = c(0, tot[2])) +
  labs(x = expression(x[1]), y = expression(x[2]))
```

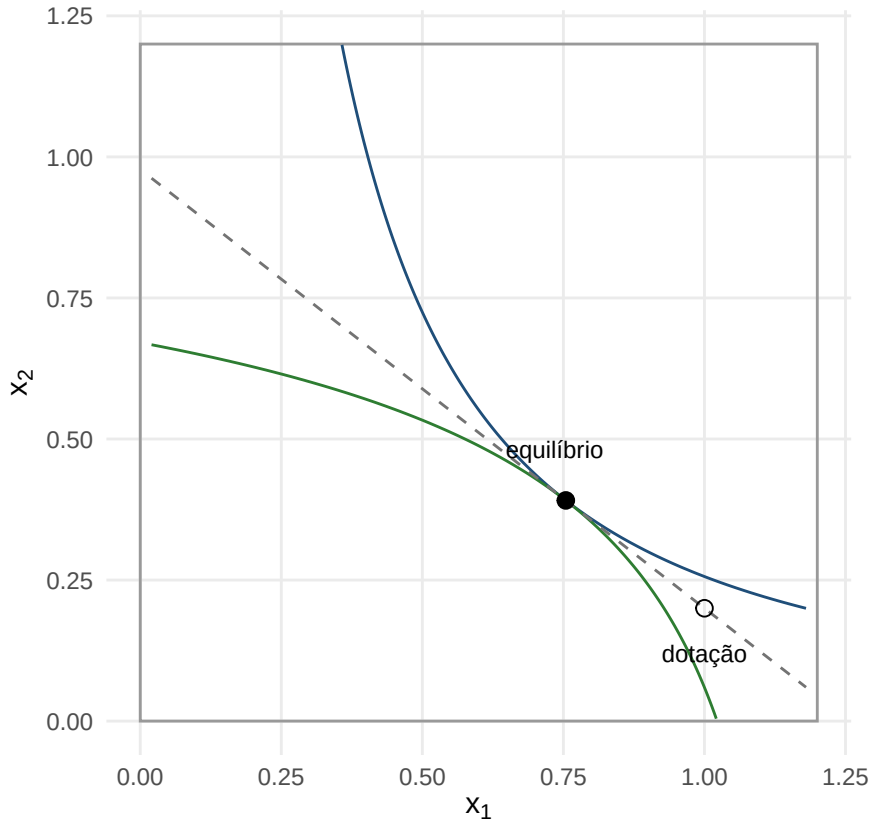

Figura 7: Caixa de Edgeworth: no equilíbrio walrasiano as indiferenças de A (azul) e B (verde) tangenciam a reta de preços que passa pela dotação.

O Exercício 1 é a mesma máquina com outros números ($u = x_1 x_2$, $p^* = 3/4$): troque `aA`, `aB` e as dotações e reexecute.

5.7 Exercícios

1. **Cobb-Douglas na caixa.** Dois agentes com $u^j(x_1, x_2) = x_1 x_2$, dotações $\bar{x}^1 = (4{,}5;\ 1{,}5)$ e $\bar{x}^2 = (1{,}5;\ 3)$. (a) Encontre as demandas de cada agente como função de $p = p_1/p_2$. (b) Resolva o *market clearing* do bem 1 e mostre que $p^* = 3/4$; calcule a alocação de equilíbrio. (c) Verifique que o mercado do bem 2 equilibra automaticamente (lei de Walras). (d) Encontre a curva de contrato e verifique que a alocação de equilíbrio está sobre ela.

2. **Lei de Walras.** Prove que, com preferências estritamente monotônicas, $p \cdot z(p) = 0$ para todo $p \gg \mathbf{0}$. Onde exatamente a monotonicidade é usada? Exiba uma economia (preferências saciáveis) em que a lei de Walras falha.

3. **Normalização.** Explique por que a homogeneidade de grau zero de z permite (a) fixar $p_1 = 1$ (numerário) ou (b) restringir p ao simplexo. Quantas equações *independentes* tem o sistema $z(p) = \mathbf{0}$ com n bens? Quantas incógnitas efetivas?

4. **Existência e fronteira.** Na prova de existência, a função $f(p) = (p + z^+(p))/\alpha(p)$ "encarece o que falta". (a) Verifique que $f(\Delta) \subseteq \Delta$ e que f é contínua se z o é. (b) Explique por que preferências fortemente monótonas criam um problema na *fronteira* do simplexo e como isso é tratado (informalmente).

5. **Primeiro Teorema.** Onde a prova do Primeiro Teorema usa que os preços são não-negativos? E onde usaria a *ausência de externalidades*? Construa um exemplo de externalidade de consumo em que o equilíbrio walrasiano não é Pareto eficiente.

6. **Segundo Teorema.** Desenhe uma caixa de Edgeworth em que o agente 1 tem preferências não-convexas e exiba uma alocação eficiente que **não** pode ser suportada como equilíbrio. Qual passo da separação falha?

7. **Robinson Crusoe.** Um consumidor-firma: Robinson tem $u(c, \ell) = c^{1/2}\ell^{1/2}$ (c consumo, ℓ lazer), dotação de tempo $T = 1$ e firma com tecnologia $y = f(n) = n^{1/2}$ (trabalho $n = 1 - \ell$), da qual detém 100% das ações. (a) Monte o problema da firma e do consumidor com preços (p, w) e a definição de equilíbrio. (b) Resolva. (c) Verifique que a alocação coincide com a do planejador que maximiza u sujeito à tecnologia — os dois teoremas em ação.

6 A Teoria da Firma

Nos capítulos de equilíbrio, as firmas entraram como curvas de oferta prontas; agora abrimos a caixa. Antes, porém, uma distinção honesta entre **teoria da produção** e **teoria da firma**: por que certas atividades são coordenadas *dentro* das firmas, e não via mercado? Por que a coordenação econômica às vezes se dá via autoridade e outras vezes via preços? Coase (Coase 1937) ofereceu a resposta clássica: existem **custos de se usar o sistema de preços** (custos de transação — de informação, contratuais etc.) em um mundo de informação imperfeita, e a firma emerge onde a hierarquia é mais barata que o mercado. Essa fronteira é assunto de organização industrial; aqui adotaremos a **firma como caixa preta** — uma tecnologia capaz de transformar insumos em produtos, com um objetivo suposto: **maximizar lucros**. Queremos avançar rápida e parcimoniosamente a uma teoria sobre o *comportamento de mercado* da firma — verificar os efeitos de mudanças de preços em ofertas de produtos e demandas de insumos, no caso de uma economia competitiva — e poder checar se as previsões do modelo aderem aos dados. O prêmio metodológico: quase toda a maquinaria do consumidor (dualidade, envelope, Shephard) será **reciclada**.

6.1 A tecnologia de produto único

Trataremos da **firma de produto único**: a tecnologia pode ser representada por uma *função de produção* $f : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}_+$, que dá o máximo de produto y obtenível de cada vetor de insumos x.

> **!** Hipóteses sobre a função de produção
>
> f é (i) **contínua**; (ii) **estritamente crescente**; (iii) **estritamente quase-côncava**; e (iv) $f(\mathbf{0}) = 0$.

Dois objetos descrevem a geometria da tecnologia:

- a **isoquanta**, o conjunto de combinações de insumos que produzem exatamente y:

$$Q(y) \equiv \{x \geq \mathbf{0} \mid f(x) = y\};$$

- a **taxa marginal de substituição técnica** (TMgST) entre os insumos i e j,

$$\text{TMgST}_{ij}(x) = \frac{\partial_i f(x)}{\partial_j f(x)},$$

  em que $\partial_i f(x)$ é a **produtividade marginal** do insumo i.

A analogia com o consumidor é evidente — isoquantas são "curvas de indiferença" da tecnologia, a TMgST é a "TMgS" —, com uma diferença conceitual importante: f é **cardinal**. O produto é observável e mensurável; não há liberdade de transformação monotônica como havia com a utilidade.

> **i** Ferramenta matemática — Curvas de nível e quase-concavidade
>
> A isoquanta é a **curva de nível** de f; sua inclinação, pela **diferenciação implícita** de $f(x_1, x_2) = y$, é $dx_2/dx_1 = -\partial_1 f/\partial_2 f = -\text{TMgST}_{12}$. A **quase-concavidade estrita** de f diz que os conjuntos $\{x : f(x) \geq y\}$ são estritamente convexos — isoquantas curvadas

para a origem, TMgST decrescente. *(Curvas de nível: capítulo* Funções de Várias Variáveis*; quase-concavidade: capítulo* Otimização *das Notas de Matemática.)*

6.2 Minimização de custos

A firma é *competitiva no mercado de fatores*: toma o vetor de preços dos insumos $w = (w_1, \dots, w_n)$ como dado e quer produzir y da forma mais eficiente possível. O problema da firma define a **função custo**

$$\boxed{c(w,y) \equiv \min_{x \in \mathbb{R}^n_+} \; w \cdot x \quad \text{sujeito a} \quad f(x) \geq y,}$$

e a **demanda condicional de insumos**

$$x(w,y) \equiv \arg\min_{x \in \mathbb{R}^n_+} \{w \cdot x : f(x) \geq y\},$$

com, naturalmente, $c(w,y) = w \cdot x(w,y)$. ("Condicional" porque toma o nível de produção y como dado — ainda não decidimos *quanto* produzir.) Para solução interior, o Lagrangeano $\mathcal{L} = w \cdot x + \lambda(y - f(x))$ dá as CPO $w_i = \lambda^* \, \partial_i f(x^*)$, e dividindo duas delas:

$$\boxed{\text{TMgST}_{ij}(x^*) = \frac{w_i}{w_j}}$$

— a isoquanta tangencia a reta de **isocusto** mais baixa, o gêmeo exato da tangência do consumidor (agora com a curva "de indiferença" fixa e a reta se movendo). O multiplicador tem leitura direta: pelo envelope, $\lambda^* = \partial_y c(w,y)$ — é o **custo marginal**.

6.2.1 Propriedades da função custo

Se $f(x)$ é contínua e estritamente crescente em $\mathbb{R}^n_+$, temos que $c(w,y)$ é:

1. **Igual a zero quando** $y = 0$;
2. **Contínua** em $\mathbb{R}^n_{++} \times \mathbb{R}_+$;
3. **Estritamente crescente e sem limite superior em** y (para todo $w \gg \mathbf{0}$);
4. **Crescente em** w;
5. **Homogênea de grau 1 em** w;
6. **Côncava em** w;
7. **Lema de Shephard**: se $c(w,y)$ é diferenciável no ponto (w^0, y^0) e $w^0 \gg \mathbf{0}$, então

$$\partial_i c(w^0, y^0) = x_i(w^0, y^0).$$

A dualidade reciclada

Compare com a função despesa do Capítulo 2: $c(w,y)$ está para $e(p,u)$ como a demanda condicional $x(w,y)$ está para a hicksiana $x^h(p,u)$ — o problema é *literalmente o mesmo* (min gasto sujeito a atingir um nível da função-objetivo), trocando u por f. Por isso as provas das propriedades 1–7 são as do Capítulo 2 palavra por palavra: concavidade em w pelo argumento do "minimizador antigo caro demais aos preços novos", Shephard pelo envelope. A única

diferença substantiva: y é observável, u não.

Das propriedades saem as **previsões testáveis** da minimização de custos:

1. A **matriz de substituição**
$$\sigma^*(w,y) \equiv \left[\partial_j x_i(w,y)\right]_{i,j}$$
é **simétrica e negativa semidefinida** (é a Hessiana de c em w, côncava); em particular, $\partial_i x_i \leq 0$ — a demanda condicional de cada insumo **não sobe** com o próprio preço;
2. **Homogeneidade de grau zero em** w: $x_i(tw,y) = x_i(w,y)$ para todo $t > 0$ — só preços relativos de insumos importam.

Como y é observável, essas restrições podem ser confrontadas com dados de firmas — é o conteúdo empírico da hipótese de minimização de custos.

6.2.2 Custos como função de y

Fixe w e olhe para c como função do produto. Definem-se o **custo marginal** e o **custo médio**:

$$MC \equiv \partial_y c(y,w), \qquad AC \equiv c(y,w)/y.$$

Quando alguns insumos são contratados de forma rígida, distinguem-se **custos fixos** FC (independem do nível de produção) e **custos variáveis** VC (dependem); o custo total é $C \equiv FC + VC$, e:

- $MC = \partial_y C = \partial_y(FC + VC) = \partial_y VC$ — o custo marginal **não vê** o custo fixo;
- $AC = C/y = (FC + VC)/y = AFC + AVC$, soma do custo fixo médio (sempre decrescente) e do custo variável médio (eventualmente crescente) — a combinação gera o **formato em U** do custo médio.

A geometria que usaremos o tempo todo: **a curva MC cruza AVC e AC exatamente em seus mínimos** (enquanto o marginal está abaixo da média, puxa a média para baixo; acima, para cima), e **a área sob o custo marginal é o custo variável**: $vc(y,w) = \int_0^y \partial_v c(v,w)\,dv$.

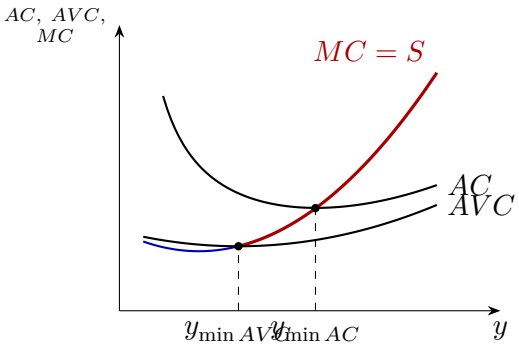

Figura 8: Curvas de custo: MC cruza AVC e AC em seus mínimos. O trecho destacado de MC — acima do mínimo de AVC — é a curva de oferta da firma competitiva.

6.3 Maximização de lucro

Hipótese: a firma é competitiva no mercado de produto também, i.e., p é dado. O problema da firma é

$$\max_{(y,x)\in\mathbb{R}^{n+1}_+} \; p\,y - w\cdot x \qquad \text{s.a.} \qquad f(x) \geq y.$$

Proposição. *Maximização de lucros implica minimização de custos.*

Demonstração. Suponha que y^* é o nível de produção que maximiza lucro e x^* o vetor de insumos utilizados para produzir y^*. Suponha porém que exista outro vetor $\hat{x}$ tal que $f(\hat{x}) \geq y^*$ e $w\cdot\hat{x} < w\cdot x^*$. Então o lucro associado a utilizar $\hat{x}$ é $pf(\hat{x}) - w\cdot\hat{x} \geq py^* - w\cdot\hat{x} > py^* - w\cdot x^*$ — o que contradiz a hipótese de que x^* maximiza lucro. ■

Podemos então escrever o problema da firma **em dois estágios**: primeiro achamos $c(w,y)$; em seguida resolvemos

$$\max_{y\in\mathbb{R}_+} \; p\,y - c(w,y).$$

As condições de primeira e segunda ordens são, respectivamente,

$$\boxed{p = \partial_y c(w,y)} \qquad \text{e} \qquad \partial^2_{yy} c(w,y) \geq 0$$

— **preço igual a custo marginal**, no trecho em que o custo marginal é *crescente* (a função custo será convexa em y se o conjunto de produção $\mathbb{Y}$ for convexo). Se $p = MC$ em dois pontos (um no trecho decrescente, outro no crescente), só o segundo é máximo.

6.3.1 Oferta e a condição de encerramento

Falta comparar com a alternativa de **não produzir**. Se a firma pode se desligar (evitando os custos variáveis, mas não os fixos), produzirá $y^* > 0$ apenas se a receita cobrir o custo variável:

> **!** Teorema — condição de encerramento de operação
>
> Uma firma nunca produzirá uma quantidade positiva no curto prazo se o preço for menor do que o custo variável médio,
>
> $$p < avc(y^*) = \frac{vc(y^*)}{y^*}.$$

Juntando as peças: a **curva de oferta da firma competitiva é o trecho crescente do custo marginal acima do custo variável médio** (destacado na Figura 8) — exatamente o objeto que alimentou a oferta de mercado do Capítulo 3.

6.3.2 O excedente do produtor

Definimos o **excedente do produtor** como a diferença entre as receitas e os custos variáveis. Como $vc(y,w) \equiv \int_0^y \partial_v c(v,w)\,dv$,

$$ep(y,w) \equiv p\,y - vc(y,w) = \int_0^y \left(p - \partial_v c(v,w)\right) dv$$

— **a área entre o preço e a curva de custo marginal**. Difere do lucro exatamente pelo custo fixo ($\pi = ep - FC$); para decisões *de margem* (produzir mais ou menos, entrar num mercado adicional), é o excedente — não o lucro contábil — que importa, e foi ele que somamos ao excedente do consumidor no Capítulo 3.

6.3.3 Demanda de insumos: condicional × não-condicional

A solução do problema completo também entrega a **demanda (não-condicional) de insumos** $x(p, w)$ — quanto contratar quando o próprio nível de produção é escolhido. A relação com a condicional é de composição: $x_i(p, w) \equiv \hat{x}_i(w, y(p, w))$, onde escrevemos $\hat{x}$ para a demanda condicional. E vale um resultado tipo *Le Chatelier*: **a demanda de insumos é mais (negativamente) inclinada do que a demanda condicional de insumos**. Diferenciando a identidade em w_i:

$$\partial_i x_i = \partial_i \hat{x}_i + \partial_y \hat{x}_i \cdot \partial_i y. \tag{$*$}$$

Da maximização de lucros temos $\partial_y c(w, y) = p$ e $\partial^2_{yy} c \geq 0$; para p fixo, diferenciando a CPO em w_i (e usando Shephard, $\partial^2_{yw_i} c = \partial_y \hat{x}_i$):

$$\frac{dy}{dw_i} = -\frac{\partial^2_{yi} c(w, y)}{\partial^2_{yy} c(w, y)} = -\frac{\partial_y \hat{x}_i(w, y)}{\partial^2_{yy} c(w, y)}. \tag{$**$}$$

De $(*)$ e $(**)$,

$$\partial_i x_i = \partial_i \hat{x}_i - \frac{\left(\partial_y \hat{x}_i\right)^2}{\partial^2_{yy} c(w, y)} \leq \partial_i \hat{x}_i \leq 0.$$

A intuição: quando w_i sobe, a firma não só substitui o insumo i *ao longo da isoquanta* (efeito capturado pela condicional), como também **reduz a escala** de produção (o custo marginal subiu) — e os dois efeitos vão na mesma direção. É o análogo produtivo da decomposição de Slutsky, sem o risco de "bens de Giffen": aqui não há efeito-renda para atrapalhar.

6.3.4 Existência: retornos crescentes

O lucro máximo nem sempre existe. **Exemplo:** suponha f homogênea de grau $k > 1$ — i.e., $f(tx) > tf(x)$ para todo $t > 1$ — e admita a possibilidade de inação. Seja x' candidato a solução com lucro não-negativo. Como $f(tx') > tf(x')$,

$$pf(tx') - w \cdot tx' > p\,tf(x') - w \cdot tx' = t\big[pf(x') - w \cdot x'\big] \geq pf(x') - w \cdot x',$$

donde x' não maximiza lucro (contradição): escalar a operação *sempre* melhora, e o problema não tem solução (ou a solução é $y = 0$, se o lucro for negativo em toda escala). Retornos crescentes são incompatíveis com concorrência perfeita — a firma "explodiria"; é por isso que a convexidade de Υ apareceu como hipótese nos teoremas do capítulo anterior, e por que retornos crescentes fortes empurram indústrias para o monopólio (natural).

6.4 Curto e longo prazos

Seja $(x, \bar{x})$ um vetor de insumos tal que x são insumos **variáveis** e $\bar{x}$ insumos **fixos**; sejam w e $\bar{w}$ os respectivos vetores de preços. A **função custo de curto prazo** é

$$c^{sr}(w, \bar{w}, y; \bar{x}) \equiv \min_{x \in \mathbb{R}^n_+} \; w \cdot x + \bar{w} \cdot \bar{x} \quad \text{s.a.} \quad f(x, \bar{x}) \geq y,$$

em que só os insumos variáveis são escolhidos. Três resultados amarram curto e longo prazos:

1. **O custo de longo prazo nunca é maior que o custo de curto prazo** — no longo prazo a firma resolve o mesmo problema com *mais* liberdade. Formalmente, $c(w, \bar{w}, y) = \min_{\bar{x}} c^{sr}(w, \bar{w}, y; \bar{x})$, e definimos $\bar{x}(y)$ como a escolha ótima dos insumos fixos.
2. **Para todo** $(w, \bar{w}, y)$, $c(w, \bar{w}, y) = c^{sr}(w, \bar{w}, y; \bar{x}(y))$: o custo de longo prazo coincide com o de curto prazo *avaliado no tamanho de planta certo* — as curvas se tocam.
3. **(Teorema do envelope)** $\partial_y c(w, \bar{w}, y) = \partial_y c^{sr}(w, \bar{w}, y; \bar{x}(y))$: no ponto de tangência, também os **custos marginais** coincidem — a variação de $\bar{x}$ induzida por y tem efeito de primeira ordem nulo, pois $\bar{x}(y)$ já era ótimo.

A tradução gráfica: **a curva de custo médio de longo prazo (LAC) é a envoltória inferior das curvas de custo médio de curto prazo (SAC)** — cada SAC tangencia a LAC no nível de produto para o qual aquele tamanho de planta é o ótimo (e o mesmo vale, com plantas discretas, tomando o mínimo ponto a ponto).

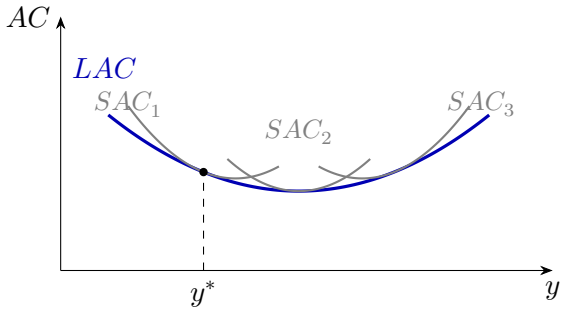

Figura 9: Curto e longo prazos: a curva de custo médio de longo prazo é a envoltória inferior das curvas de curto prazo; cada SAC tangencia a LAC no produto para o qual sua planta é ótima (teorema do envelope).

> **i** Ferramenta matemática — O teorema do envelope, de novo
>
> $c(y) = \min_{\bar{x}} c^{sr}(y; \bar{x})$ é uma **função-valor**, e a derivada de uma função-valor em relação a um parâmetro ignora o ajuste do argumento ótimo: $\partial_y c = \partial_y c^{sr}|_{\bar{x}(y)}$. É o mesmo teorema que deu $\partial_y v = \lambda$, Roy e Shephard — e aqui ganha sua imagem mais famosa: a *envoltória* das curvas de curto prazo. *(Envelope: capítulo* Otimização *das Notas de Matemática.)*

6.5 Sobre os objetivos da firma

Fechamos justificando a hipótese mantida — por que "a firma" maximiza lucro? Toda firma j, caracterizada por seu conjunto de possibilidades de produção $\mathbb{Y}^j$, é **de propriedade de indivíduos**:

a participação acionária do indivíduo i na firma j é θ_j^i (com $\sum_i \theta_j^i = 1$ para todo j), que é também a porcentagem do lucro da firma j que cabe a i. A restrição orçamentária do indivíduo i é

$$p \cdot x^i \leq p \cdot \bar{x}^i + \sum_j \theta_j^i \, p \cdot y^j. \qquad (*)$$

Para qualquer firma j *tomadora de preços*, a escolha y^j somente afeta o indivíduo aumentando ou diminuindo o lado direito de $(*)$. Como $p \cdot y^j \leq \pi^j(p)$ para todo $y^j \in \mathbb{Y}^j$, a estratégia que mais beneficia os seus acionistas — **todos eles, por unanimidade**, quaisquer que sejam suas preferências — é escolher

$$y^j \in \arg\max_{y \in \mathbb{Y}^j} \; p \cdot y.$$

Ninguém discorda: mais lucro é só mais orçamento. Vale registrar as **hipóteses implícitas** nesse argumento:

1. **preços são fixos** e não dependem da ação da firma;
2. **lucros são determinísticos**; e
3. **acionistas administram a firma**.

Relaxe qualquer uma e a unanimidade desaba: com poder de mercado, a escolha da firma afeta os preços que os acionistas pagam como consumidores; com incerteza, acionistas com atitudes diferentes frente ao risco (Capítulo 6) discordam sobre *qual* plano arriscado seguir; com separação entre propriedade e controle, entram os conflitos de agência. Cada relaxamento abre um campo da microeconomia moderna.

6.6 Laboratório computacional em R

De uma função de custo $C(q)$ saem as curvas de **custo médio, médio variável e marginal** e os dois pontos que organizam a oferta: o mínimo do $CVMe$ (preço de fechamento) e o mínimo do CMe (escala eficiente).

```
C  <- function(q) 0.1*q^3 - 2*q^2 + 20*q + 50
VC <- function(q) 0.1*q^3 - 2*q^2 + 20*q
MC <- function(q) 0.3*q^2 - 4*q + 20
q_shut <- optimize(function(q) VC(q)/q, c(0.5, 20))$minimum   # min CVMe
q_mes  <- optimize(function(q) C(q)/q,  c(0.5, 20))$minimum   # min CMe
q <- seq(0.5, 20, length.out = 300)
df <- rbind(data.frame(q, val = C(q)/q,  curva = "CMe"),
            data.frame(q, val = VC(q)/q, curva = "CVMe"),
            data.frame(q, val = MC(q),   curva = "CMg"))
ggplot(df, aes(q, val, color = curva)) + geom_line() +
  scale_color_manual(values = c(CMe = az, CVMe = lr, CMg = vm)) +
  coord_cartesian(ylim = c(0, 40)) + labs(x = "q", y = "custo")
```

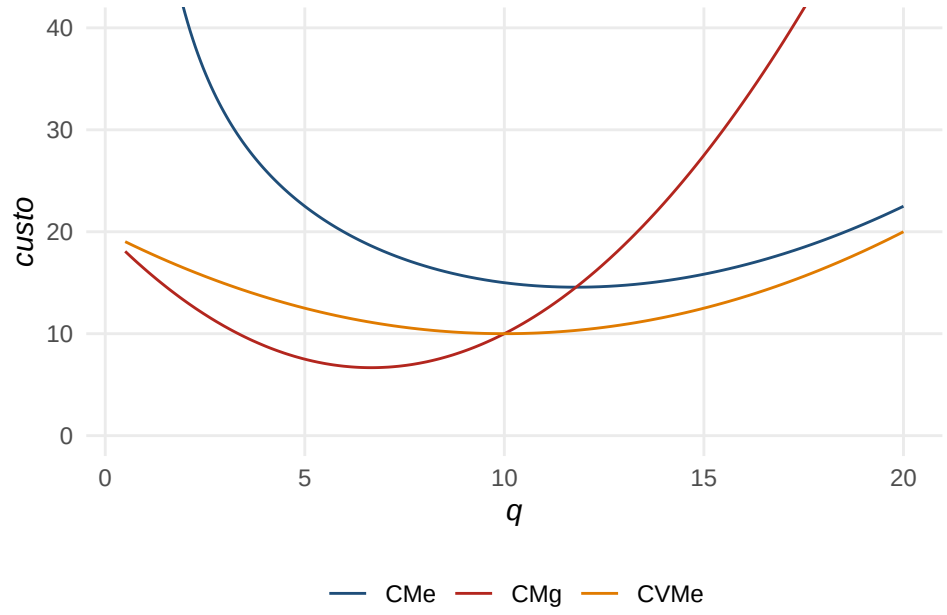

Figura 10: Curvas de custo de uma firma com $C(q) = 0{,}1q^3 - 2q^2 + 20q + 50$: o CMg (vermelho) corta $CVMe$ e CMe em seus mínimos.

```
round(c(min_CVMe_q = q_shut, preco_fechamento = VC(q_shut)/q_shut,
        min_CMe_q  = q_mes,  escala_eficiente = C(q_mes)/q_mes), 3)
```

```
      min_CVMe_q preco_fechamento        min_CMe_q escala_eficiente
          10.000           10.000           11.797           14.561
```

O preço de fechamento (mínimo do $CVMe$) é o piso abaixo do qual a firma prefere não produzir no curto prazo; a curva de oferta competitiva é o ramo do CMg acima desse ponto.

6.7 Exercícios

1. **Cobb-Douglas completa.** Para $f(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{\beta}$ com $\alpha + \beta < 1$: (a) derive a demanda condicional de insumos e mostre que $c(w, y) = K y^{\frac{1}{\alpha+\beta}} w_1^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} w_2^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}$ para uma constante K; (b) verifique o lema de Shephard e a homogeneidade de grau 1 em w; (c) obtenha a oferta $y(p, w)$ e o lucro $\pi(p, w)$. O que acontece quando $\alpha + \beta \to 1$?

2. **Propriedades.** Prove que $c(w, y)$ é côncava em w e conclua que a matriz de substituição σ^* é negativa semidefinida. Explique em uma frase por que a firma "ganha" com a volatilidade dos preços de insumos que essa concavidade expressa.

3. **Geometria dos custos.** Com $vc(y) = y^3/12 - y^2/4 + y$ e $FC = 1$ (a tecnologia da Figura 8): (a) obtenha MC, AVC, AC e verifique que MC cruza AVC e AC em seus mínimos; (b) determine o preço de encerramento; (c) escreva a curva de oferta da firma e calcule o excedente do produtor a $p = 2$.

4. **Le Chatelier.** Interprete economicamente os dois termos de $\partial_i x_i = \partial_i \hat{x}_i - (\partial_y \hat{x}_i)^2 / \partial^2_{yy} c$. Em que caso os dois coincidem? (Dica: pense em custo marginal *muito* íngreme.)

5. **Retornos crescentes.** Mostre que, com f homogênea de grau k, $c(w, y) = y^{1/k} c(w, 1)$. Conclua que o custo médio é decrescente quando $k > 1$ e explique, via CPO do segundo estágio, por que não existe oferta competitiva nesse caso.

6. **Envelope.** Para $f(x, \bar{x}) = x^{1/2} \bar{x}^{1/2}$ (x variável, $\bar{x}$ fixo, preços w e $\bar{w}$): (a) derive $c^{sr}(y; \bar{x})$; (b) minimize em $\bar{x}$ para obter $c(y)$ e $\bar{x}(y)$; (c) verifique que custo e custo marginal de curto e longo prazos coincidem em $\bar{x} = \bar{x}(y)$, e desenhe as duas curvas de custo médio.

7. **Objetivos da firma.** Explique por que a unanimidade dos acionistas quebra quando: (a) a firma tem poder de monopólio num bem que os acionistas consomem; (b) o lucro é aleatório e os acionistas têm graus distintos de aversão ao risco. Em cada caso, qual das três hipóteses implícitas falhou?

7 A Escolha sob Incerteza e Finanças

Quando pensamos em teoria das decisões, podemos distinguir **ações** e **consequências**: uma ação é escolhida e gera uma consequência, e o indivíduo racional — com preferências definidas sobre consequências — deve escolher as ações que levam às consequências preferíveis. Até agora a distinção foi irrelevante, já que cada ação levava a uma consequência de forma *determinística*. O propósito deste capítulo é considerar situações em que a relação é **estocástica**.

A estratégia é a de sempre: tentar utilizar a teoria do consumidor que já conhecemos. A primeira pergunta é: **qual o objeto de escolha?** A resposta: preferências sobre **distribuições de probabilidade** de obter cestas diferentes de bens. Tratamos os diferentes resultados de um evento aleatório como **estados da natureza**, e um *plano de consumo contingente* como uma especificação do que seria consumido para cada realização possível da natureza. Pessoas têm preferências sobre esses planos exatamente como têm pelos consumos em si.

Poderíamos representar essas preferências por $u(c(s_1), c(s_2))$; seria razoável que dependessem também das probabilidades, $u(c(s_1), c(s_2), \pi_1, \pi_2)$. Uma forma particularmente conveniente é a **separável nas probabilidades**:

$$u(c(s_1), c(s_2), \pi_1, \pi_2) = \pi_1\, \nu(c(s_1)) + \pi_2\, \nu(c(s_2))$$

— a **utilidade esperada**. Este capítulo pergunta: que hipóteses sobre as preferências *justificam* essa forma? Há (basicamente) três axiomatizações, que diferem quanto ao caráter das probabilidades envolvidas: **von Neumann–Morgenstern** (Neumann e Morgenstern 1944) as toma como algo *objetivo*; **Savage** (Savage 1954) supõe que as probabilidades (crenças) são *subjetivas*; **Anscombe–Aumann** (Anscombe e Aumann 1963) admite que algumas são objetivas e outras subjetivas (a ideia de dispositivos de aleatorização, importante em teoria dos jogos). Seguimos vNM.

7.1 Loterias e os axiomas de von Neumann–Morgenstern

Seja C o conjunto de possíveis *resultados* (outcomes), suposto finito: $C = \{x_s\}_{s=1}^{S}$.

- Uma **loteria simples** L é um vetor $(x_1, \pi_1; \ldots; x_S, \pi_S)$ que associa a cada resultado uma probabilidade ($\pi_s \geq 0$, $\sum_s \pi_s = 1$). Fixados os resultados, uma loteria é identificada pelo seu vetor de probabilidades, e o conjunto de todas as loterias é o simplexo

$$\mathcal{L} \equiv \left\{(\pi_1, \ldots, \pi_S) : \sum_{s=1}^{S} \pi_s = 1\right\}.$$

- Uma **loteria composta** é uma loteria cujos resultados são também loterias: de $L = (\pi_1, \ldots, \pi_S)$ e $L' = (\pi'_1, \ldots, \pi'_S)$ formamos $L^\alpha = \alpha L + (1-\alpha)L'$, $\alpha \in [0,1]$. A loteria $L'' = (\alpha\pi_1 + (1-\alpha)\pi'_1, \ldots, \alpha\pi_S + (1-\alpha)\pi'_S)$ associa a cada resultado a mesma probabilidade total que L^α: é a **loteria reduzida** de L^α.

! Os axiomas de vNM

Axioma 1 (consequencialismo, ou "axioma da redução"). Indivíduos possuem uma ordenação de preferências definida apenas sobre loterias *reduzidas*: $\succeq$ é definida apenas sobre $\mathcal{L}$ — só a distribuição final importa, não o mecanismo em estágios que a gera.
Axioma 2 (racionalidade). $\succeq$ em $\mathcal{L}$ é **completa** e **transitiva**.

Axioma 3 (continuidade). Para todos $L, L', L'' \in \mathcal{L}$, os conjuntos

$$A \equiv \{\alpha \in [0,1] : \alpha L + (1-\alpha)L' \succeq L''\} \quad \text{e} \quad B \equiv \{\alpha \in [0,1] : \alpha L + (1-\alpha)L' \preceq L''\}$$

são **fechados** em $[0,1]$.

Axioma 4 (independência). Para todos $L, L', L'' \in \mathcal{L}$ e $\alpha \in (0,1)$,

$$L \succeq L' \iff \alpha L + (1-\alpha)L'' \succeq \alpha L' + (1-\alpha)L''.$$

Os três primeiros axiomas são velhos conhecidos: completude, transitividade e continuidade (pequenas mudanças nas probabilidades não revertem o ordenamento — se $L \succ L' \succ L''$, misturar L com um pouquinho de L'' ainda supera L'), e um ordenamento completo, transitivo e contínuo é representável por uma função utilidade **contínua** $U : \mathcal{L} \to \mathbb{R}$. A novidade — e o coração da teoria — é a **independência**: preferir L a L' não pode ser revertido por misturar ambas, *nas mesmas proporções*, com uma terceira loteria irrelevante.

Por que aceitar a independência aqui, se a rejeitaríamos na teoria do consumidor? Considere o exemplo: uma pessoa prefere uma cesta com 1 bolo e 1 garrafa de vinho a uma cesta com 3 bolos e nenhuma garrafa. Se um "axioma da independência" valesse para *cestas*, ela teria que preferir 2 bolos e 2 vinhos a 3 bolos e 1,5 garrafa, simplesmente porque

$$(2,2) = 0{,}5 \times (1,1) + 0{,}5 \times (3,3) \quad \text{e} \quad (3,3/2) = 0{,}5 \times (3,0) + 0{,}5 \times (3,3)$$

— mas não há violação alguma de racionalidade em supor $(1,1) \succeq (3,0)$ *e* $(3,3/2) \succeq (2,2)$: bolo e vinho são complementares *no estômago*. O axioma faz sentido no contexto estocástico porque, ao contrário do consumo sob certeza, **o consumidor não consome uma coisa *e* outra, mas uma coisa *ou* outra**: os ramos de uma loteria nunca se misturam, e o ramo comum L'' é de fato irrelevante.

7.1.1 O teorema da utilidade esperada

! Definição e Teorema — utilidade esperada

Uma função utilidade $U : \mathcal{L} \to \mathbb{R}$ é uma **utilidade esperada** se existe um vetor $(u_1, \dots, u_S)$ tal que, para toda loteria $L = (\pi_1, \dots, \pi_S) \in \mathcal{L}$,

$$U(L) = u_1\pi_1 + u_2\pi_2 + \cdots + u_S\pi_S.$$

Teorema (linearidade). U é uma utilidade esperada se e somente se é **linear em probabilidades**: $U(\sum_k \alpha_k L_k) = \sum_k \alpha_k U(L_k)$ para quaisquer loterias e pesos $\alpha_k \geq 0$, $\sum_k \alpha_k = 1$.
Teorema (existência). Se $\succeq$ em $\mathcal{L}$ é consequencialista (Axioma 1), racional (Axioma 2), contínua (Axioma 3) e independente (Axioma 4), então existem números u_s para cada resultado $s = 1, \dots, S$ tais que, para quaisquer $L = (\pi_1, \dots, \pi_S)$ e $L' = (\pi'_1, \dots, \pi'_S)$,

$$L \succeq L' \iff \sum_{s=1}^{S} \pi_s u_s \geq \sum_{s=1}^{S} \pi'_s u_s.$$

Teorema (unicidade). Se U representa $\succeq$ como utilidade esperada, então $\widetilde{U}$ é outra representação de utilidade esperada das mesmas preferências se e somente se existem escalares $\beta > 0$ e γ tais que $\widetilde{U}(L) = \beta\, U(L) + \gamma$.

A unicidade é **afim positiva** — muito mais rígida que a liberdade monotônica da utilidade ordinal. Uma consequência: se U e $\widetilde{U} = \beta U + \gamma$ representam o indivíduo, então

$$u_1 - u_2 > u_3 - u_4 \implies \beta u_1 - \beta u_2 > \beta u_3 - \beta u_4$$

— o **sinal das diferenças de utilidades** é o mesmo para qualquer representação. Diferenças de utilidade têm, portanto, um significado (um sentido de *intensidade* de preferência invariante à representação); isto **não** quer dizer que a utilidade esperada tenha significado cardinal pleno — só diferenças, e só seus sinais.

7.2 Loterias monetárias e aversão ao risco

Como a incerteza afeta o bem-estar dos indivíduos? A pergunta não pode estar dissociada das decisões induzidas por diferentes ambientes e preferências. Três aspectos importam: a **caracterização das preferências por riscos**; a forma como a **renda inicial** afeta essas preferências; e a **natureza mesma do risco**.

Passamos a loterias com resultados monetários. Seja $F : \mathbb{R}_+ \to [0, 1]$ uma função (cumulativa) de distribuição — se $\tilde{y}$ segue a lei F, então $F(y) = \Pr(\tilde{y} \leq y)$. A utilidade esperada sobre loterias com payoffs monetários pode ser escrita como

$$U(F) \equiv \int u(y)\, dF(y),$$

onde $u(\cdot)$ — a utilidade *de Bernoulli* sobre a renda — é suposta estritamente crescente e contínua.

! Aversão ao risco: três definições equivalentes

Um indivíduo é **avesso ao risco** se e somente se qualquer uma das seguintes condições vale:

1. para toda loteria F, ele prefere (fracamente) a loteria degenerada que paga $\int y\, dF(y)$

com probabilidade 1 à loteria F;

2. $\int u(y)\,dF(y) \le u\Big(\int y\,dF(y)\Big)$ para todo F;
3. $u(\cdot)$ é **côncava**.

(Versões *estritas*, de **neutralidade** — indiferença — e de **amor ao risco** — desigualdades invertidas — são análogas.)

i Ferramenta matemática — Desigualdade de Jensen

A equivalência entre (2) e (3) é a **desigualdade de Jensen**: u é côncava se e só se $u(E[\tilde{y}]) \ge E[u(\tilde{y})]$ para toda variável aleatória $\tilde{y}$ — a média das imagens fica abaixo da imagem da média, porque a corda de uma função côncava corre abaixo do gráfico. *(Concavidade e cordas: capítulo* Otimização*; valor esperado como integral: capítulo* Integral Definida *das Notas de Matemática.)*

7.2.1 Equivalente de certeza e prêmios

Três medidas monetárias organizam a discussão:

- O **equivalente de certeza** da loteria F para um indivíduo com utilidade u é o valor certo $c(F,u)$ que o deixa indiferente à loteria:

$$u(c(F,u)) = \int u(y)\,dF(y);$$

- O **prêmio de risco** P é a quantidade de renda tal que

$$P = \int y\,dF(y) - c(F,u)$$

  — quanto o agente aceita "pagar" (em valor esperado) para trocar a loteria pelo seu equivalente certo;
- O **prêmio de probabilidade** $\pi(x,\varepsilon,u)$, para renda x e $\varepsilon > 0$ fixos, é o desvio de probabilidade que torna uma aposta $\pm\varepsilon$ aceitável:

$$u(x) = \left[\tfrac{1}{2} + \pi(x,\varepsilon,u)\right] u(x+\varepsilon) + \left[\tfrac{1}{2} - \pi(x,\varepsilon,u)\right] u(x-\varepsilon).$$

! Teorema — cinco caracterizações

Para um indivíduo com utilidade sobre a renda $u(\cdot)$, são equivalentes: **(i)** o indivíduo é avesso ao risco; **(ii)** u é côncava; **(iii)** $c(F,u) \le \int y\,dF(y)$ para todo F; **(iv)** $P \ge 0$ para todo F; **(v)** $\pi(x,\varepsilon,u) \ge 0$ para todos x,ε.

O esqueleto da prova: (ii) $\iff$ (i),(iii) é Jensen mais u crescente; (iii) $\iff$ (iv) é a definição de P; para (v), da aversão ao risco $\frac{1}{2}u(x+\varepsilon)+\frac{1}{2}u(x-\varepsilon) < u(x)$ segue $0 < u(x) - \frac{1}{2}[u(x+\varepsilon)+u(x-\varepsilon)] = \pi(x,\varepsilon,u)[u(x+\varepsilon)-u(x-\varepsilon)]$, e como u é crescente, $\pi > 0$; a volta define $y' = x+\varepsilon$, $y'' = x-\varepsilon$ e recupera a concavidade nos pontos médios.

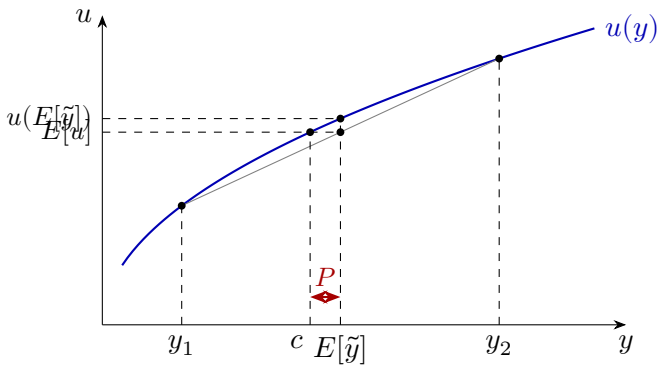

Figura 11: Aversão ao risco com u côncava: a utilidade esperada da loteria (na corda) fica abaixo de $u(E[\tilde{y}])$; o equivalente de certeza c fica à esquerda da média, e a diferença é o prêmio de risco P.

7.3 Medidas de tolerância ao risco: Arrow–Pratt

Concavidade é qualitativa; para *comparar* agentes e *quantificar* prêmios, precisamos de uma medida local.

! Definição — coeficientes de Arrow–Pratt

Dada uma utilidade $u(\cdot)$ duas vezes diferenciável,

$$r_A(y,u) = -\frac{u''(y)}{u'(y)} \qquad \text{e} \qquad r_R(x,u) = -\frac{u''(x)\,x}{u'(x)}$$

são os coeficientes de **aversão absoluta** e **relativa** ao risco (Pratt 1964; Arrow 1965). O recíproco $\tau(x,u) = 1/r_A(x,u)$ é a **tolerância ao risco**.

Note que r_A é invariante a transformações afins de u — mede as *preferências*, não a representação. E ordena corretamente os agentes:

Definições (equivalentes) de "u_2 é mais avesso ao risco que u_1":

1. $r_A(y,u_2) \geq r_A(y,u_1)$ para todo y;
2. existe uma função côncava $\psi(\cdot)$ tal que $u_2(y) = \psi[u_1(y)]$ para todo y;
3. $c(F,u_2) \leq c(F,u_1)$ para todo F;
4. $P^2 \geq P^1$ para todo F;
5. $\pi(x,\varepsilon,u_2) \geq \pi(x,\varepsilon,u_1)$ para todos x,ε;
6. se $\int u_2(y)\,dF(y) \geq u_2(\bar{y})$, então $\int u_1(y)\,dF(y) \geq u_1(\bar{y})$ (toda loteria que o mais avesso aceita, o menos avesso também aceita).

Para ver (1) $\iff$ (2): sempre existe ψ crescente com $u_2 = \psi(u_1)$ (ambas crescem na renda); supondo duas vezes diferenciáveis, $u_2' = \psi' u_1'$ e $u_2'' = \psi''(u_1')^2 + \psi' u_1''$, donde

$$r_A(x,u_2) = -\frac{\psi''(u_1(x))}{\psi'(u_1(x))}\,u_1'(x) + r_A(x,u_1),$$

e $r_A(x,u_2) > r_A(x,u_1) \iff \psi'' < 0$.

7.3.1 A aproximação de Arrow–Pratt

Quanto vale o prêmio de risco para riscos *pequenos*? Defina implicitamente $g(k)$ por

$$E[u(x+k\tilde{\varepsilon})] = u(x-g(k)), \qquad E[\tilde{\varepsilon}] = 0.$$

Usando uma expansão de Taylor em torno de $k=0$,

$$\boxed{g(k) \simeq -\frac{u''(x)}{u'(x)}\,\frac{E[\tilde{\varepsilon}^2]}{2}\,k^2 = r_A(x,u)\,\frac{\sigma^2_{k\tilde{\varepsilon}}}{2},}$$

a **aproximação de Arrow–Pratt**: para riscos pequenos, o prêmio é proporcional ao coeficiente de aversão absoluta e à **variância** — riscos pequenos custam "pouco ao quadrado", e só o segundo momento importa. Para um risco *multiplicativo* $\tilde{x} = x(1+k\tilde{\varepsilon})$, o mesmo argumento dá o prêmio **proporcional** $g(k) \simeq r_R(x,u)\,E[\tilde{\varepsilon}^2]k^2/2$ — com a aversão *relativa* no lugar da absoluta.

> **i** Ferramenta matemática — Expansão de Taylor
>
> Aproximamos os dois lados de $E[u(x+k\tilde{\varepsilon})] = u(x-g(k))$ até segunda ordem em k: à esquerda, $E[u] \simeq u(x) + u'(x)kE[\tilde{\varepsilon}] + \frac{1}{2}u''(x)k^2E[\tilde{\varepsilon}^2]$ (o termo linear morre porque $E[\tilde{\varepsilon}]=0$); à direita, $u(x) - u'(x)g(k)$. Igualando, sai a fórmula. É o uso canônico do **polinômio de Taylor**: transformar uma comparação global em contas com derivadas locais. *(Derivadas de ordem superior e aproximações: capítulo* Derivadas *das Notas de Matemática.)*

7.3.2 Renda e aversão ao risco

Considere dois indivíduos iguais em tudo, exceto na riqueza inicial, $x_1 > x_2$. Pela aproximação de Arrow–Pratt, o prêmio de risco será menor para o mais rico se e só se $r_A(x_1,u) < r_A(x_2,u)$. Preferências com essa propriedade para todo $x_1 > x_2$ são ditas **DARA** (*decreasing absolute risk aversion*) — e o resultado vale para o prêmio de risco exato, não só para a aproximação. As caracterizações são as esperadas: u é DARA se e só se, sempre que $x_2 < x_1$, $u_2(z) \equiv u(x_2+z)$ é uma transformação côncava de $u_1(z) \equiv u(x_1+z)$; se e só se $x - c(F,x)$ é decrescente em x; se e só se $\pi(x,\varepsilon,u)$ é decrescente em x. Quando u é três vezes diferenciável,

$$\partial_x r_A(x,u) \le 0 \iff -\frac{u'''(x)}{u''(x)} \ge -\frac{u''(x)}{u'(x)} \iff \wp(x,u) \ge r_A(x,u),$$

onde $\wp(x,u) \equiv -u'''/u''$ é o coeficiente de **prudência**: DARA exige $u''' > 0$ suficientemente forte. (Um paralelo para a aversão *relativa* decrescente vale trocando riscos aditivos por multiplicativos.)

7.3.3 As famílias CARA, CRRA e HARA

As utilidades de trabalho

CARA (aversão absoluta constante α):

$$u(x) = -\frac{e^{-\alpha x}}{\alpha}.$$

CRRA (aversão relativa constante γ):

$$u(x) = \frac{x^{1-\gamma} - 1}{1-\gamma} \quad (\gamma \neq 1), \qquad u(x) = \log x \quad (\gamma = 1).$$

HARA (aversão absoluta *harmônica* — tolerância ao risco **linear na renda**):

$$u(x) = \zeta \left(\eta + \frac{x}{\gamma}\right)^{1-\gamma} \implies r_A(x,u) = \left(\eta + \frac{x}{\gamma}\right)^{-1}, \quad \tau(x,u) = \eta + \frac{x}{\gamma}.$$

A classe HARA contém as outras: com $\eta = 0$, $r_R(x,u) = \gamma$ (CRRA); com $\gamma \to \infty$, $r_A(x,u) \to 1/\eta$ (CARA).

A tolerância ao risco está associada à **repartição ótima de risco entre agentes** — funções HARA geram regras de repartição relativamente simples (lineares na renda agregada), o que explica sua onipresença em macro e finanças.

7.3.4 Preferências sobre renda ou sobre cestas?

Trabalhamos o capítulo todo com utilidade sobre a *renda*; a teoria do consumidor era sobre *cestas*. As duas se conciliam: suponha u côncava sobre cestas, fixe p e defina $\tilde{u}(y) \equiv v(p,y) = \max_x\{u(x) : p \cdot x \leq y\}$. Para $y^\lambda = \lambda y^1 + (1-\lambda)y^2$ e as cestas ótimas x^1, x^2, a cesta $x^\lambda = \lambda x^1 + (1-\lambda)x^2$ é viável a (p, y^λ), e

$$\tilde{u}(y^\lambda) \geq u(x^\lambda) \geq \lambda u(x^1) + (1-\lambda)u(x^2) = \lambda\tilde{u}(y^1) + (1-\lambda)\tilde{u}(y^2)$$

— a primeira desigualdade por viabilidade, a segunda pela concavidade de u, a igualdade porque x^1, x^2 são maximizadores. A utilidade indireta **herda a concavidade**: aversão ao risco sobre cestas induz aversão ao risco sobre renda, e o atalho deste capítulo é legítimo.

7.4 Dominância estocástica

A intuição sugere duas formas de comparar loterias: (1) se F sempre nos dá retornos maiores do que G, qualquer indivíduo que prefere mais a menos irá preferir F a G; (2) se F dá o mesmo retorno médio que G, mas G é mais arriscada, qualquer indivíduo *avesso ao risco* irá preferir F a G. A teoria da dominância estocástica formaliza as duas: procura condições nas distribuições tais que $\int u\,dF \geq \int u\,dG$ **para todo** u **em um conjunto de interesse** Υ.

! Dominância de primeira ordem (FOSD)

F **domina estocasticamente em primeira ordem** G se $\int u(x)\,dF(x) \geq \int u(x)\,dG(x)$ para toda função **não-decrescente** $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Teorema. F domina em primeira ordem G se e somente se

$$F(x) \leq G(x) \quad \text{para todo } x.$$

Suficiência (supondo diferenciabilidade): integrando por partes,

$$\int u\,dF - \int u\,dG = \int u'(x)\,[G(x) - F(x)]\,dx \geq 0,$$

usando $G(\underline{x}) = F(\underline{x}) = 0$ e $G(\bar{x}) = F(\bar{x}) = 1$ (os termos de fronteira somem). *Necessidade*: se $G(\hat{x}) < F(\hat{x})$ para algum $\hat{x}$, tome a função-degrau $u = \mathbb{1}_{(\hat{x},\infty)}$ (não-decrescente); então $\int u\,dF - \int u\,dG = G(\hat{x}) - F(\hat{x}) < 0$. ■

i Ferramenta matemática — Integração por partes

O passo-chave acima é $\int u\,d(F-G) = [u(F-G)] - \int u'(F-G)\,dx$: transferimos a derivada da distribuição (objeto feio) para a utilidade (objeto suave). O mesmo truque, aplicado *duas vezes*, dá a segunda ordem. *(Capítulo* Integração por Partes *das Notas de Matemática.)*

! Dominância de segunda ordem (SOSD)

F **domina estocasticamente em segunda ordem** G se $\int u\,dF \geq \int u\,dG$ para toda u **não-decrescente e côncava**.
Teorema. Para F e G com a **mesma média**, são equivalentes:

(i) F domina estocasticamente em segunda ordem G;
(ii) G é um *mean-preserving spread* de F;
(iii) $\displaystyle\int_0^x G(t)\,dt \geq \int_0^x F(t)\,dt$ para todo x.

Um **mean-preserving spread** constrói G a partir de F adicionando, a cada realização x, um ruído z_x de média zero: a média não muda ($\int y\,dG = \int x\,dF$), mas, se u é côncava, Jensen aplicado ruído a ruído dá

$$U(G) = \int \left[\int u(x + z_x)\,dH_x(z_x)\right] dF(x) \leq \int u\left(\int (x + z_x)\,dH_x(z_x)\right) dF(x) = U(F)$$

— espalhar massa preservando a média só pode piorar um avesso ao risco. A condição (iii) — as **integrais das cdf's** se ordenam — é o critério verificável; a prova usa integração por partes duas vezes (ou, quando F e G só se cruzam uma vez, um argumento direto de *single crossing*). FOSD implica SOSD (toda côncava crescente é crescente); e enquanto FOSD ordena por "mais retorno", SOSD com mesma média ordena por "menos risco" — no sentido *endógeno* de risco que a teoria produz: aquilo que todo avesso ao risco evita.

7.5 Aplicação — o problema de portfólio

A ponte para finanças. Um investidor com riqueza w aloca a em um ativo arriscado com retorno excedente $\tilde{z}$ (média $E[\tilde{z}]$, possivelmente pequena) e o resto no ativo seguro:

$$\max_{a} \; E\left[u(w + a\tilde{z})\right],$$

com CPO $E[u'(w + a^*\tilde{z})\,\tilde{z}] = 0$ e CSO garantida por $u'' < 0$. Dois resultados clássicos saem direto do aparato do capítulo:

1. **Todo avesso ao risco aceita *algum* risco com prêmio positivo**: em $a = 0$, a derivada do objetivo é $u'(w)E[\tilde{z}] > 0$ sempre que $E[\tilde{z}] > 0$ — logo $a^* > 0$. Aversão ao risco é de *segunda ordem* (Arrow–Pratt: prêmio $\propto k^2$), enquanto o retorno esperado é de *primeira*;
2. **Sob DARA, o ativo arriscado é um bem normal**: diferenciando a CPO em w, o sinal de da^*/dw é o de $E[-u''(w + a^*\tilde{z})\tilde{z}]$, que é positivo quando r_A é decrescente — os mais ricos investem *mais* (em nível) no ativo arriscado. CARA implica $da^*/dw = 0$; CRRA implica fração a^*/w constante — as "regras de bolso" de finanças são, no fundo, hipóteses sobre r_A.

7.6 Críticas: Rabin e Allais

A teoria é elegante; os dados a desafiam em dois flancos.

7.6.1 O paradoxo de calibração de Rabin

Considere um agente com utilidade crescente e (fracamente) côncava que **rejeita**, a qualquer nível de renda, uma loteria com 50% de chance de ganhar 11 e 50% de perder 10:

$$0{,}5\,u(w + 11) + 0{,}5\,u(w - 10) < u(w).$$

Isto implica, pelas propriedades de uma função côncava,

$$u'(w + 11) \leq \frac{u(w + 11) - u(w)}{11} < \frac{10}{11}\,\frac{u(w) - u(w - 10)}{10} \leq \frac{10}{11}\,u'(w - 10).$$

Repetindo a relação com renda inicial $w + 21$, e assim sucessivamente n vezes:

$$u'(w - 10 + 21n) < \left(\frac{10}{11}\right)^{n} u'(w - 10)$$

— **a utilidade marginal decresce numa proporção superior à de uma progressão geométrica**. Rabin (Rabin 2000) mostrou as consequências: um agente que recusa a loteria acima em todos os níveis de renda recusará loterias com 50% de chance de perder \$100 contra 50% de chance de ganhar *qualquer valor* — inclusive infinito. Aversão a riscos pequenos, dentro da utilidade esperada sobre riqueza final, *calibra* uma aversão absurda a riscos grandes. A crítica se aplica à interpretação da teoria como definida sobre **loterias sobre riqueza final**: se as preferências condicionais à renda w, $\succeq_w$, satisfazem $L_1 \succeq_w L_2 \iff w + L_1 \succeq w + L_2$ com $\succeq$ independente de w, o paradoxo morde. Não é isso que a teoria de vNM *necessariamente* diz — ela é silenciosa quanto à definição dos prêmios —, mas abdicar da riqueza final exige definir como o agente resolve suas **inconsistências intertemporais**: se rejeita a loteria quando rico ($w = 1000$) mas a aceitaria embutida na riqueza a partir do zero (ver Rubinstein, 2001), o que fará quando a loteria composta for quebrada em dois estágios e lhe oferecerem trocar no meio do caminho?

7.6.2 O paradoxo de Allais

Defina os prêmios monetários $x_1 = 0$, $x_2 = 50$, $x_3 = 250$ (em milhares) e as loterias

$$L^a = (0, 1, 0), \quad L^b = (0{,}01,\ 0{,}89,\ 0{,}1), \qquad M^a = (0{,}89,\ 0{,}11,\ 0), \quad M^b = (0{,}9,\ 0,\ 0{,}1).$$

Implemente com uma urna de 100 bolas numeradas de 0 a 99:

loteria	bola 0	bolas 1–10	bolas 11–99
L^a	50	50	50
L^b	0	250	50
M^a	50	50	0
M^b	0	250	0

Os pares (L^a, L^b) e (M^a, M^b) diferem entre si **apenas nas bolas 11–99** — um "ramo comum" que o axioma da independência manda ignorar. Logo $L^a \succeq L^b \implies M^a \succeq M^b$. (Diretamente pela utilidade esperada: de $u_{50} \geq 0{,}10\, u_{250} + 0{,}89\, u_{50} + 0{,}01\, u_0$, somando $0{,}89u_0 - 0{,}89u_{50}$ dos dois lados, $0{,}11u_{50} + 0{,}89u_0 \geq 0{,}10u_{250} + 0{,}90u_0$.) No entanto, experimentos de laboratório mostram escolhas majoritárias L^a e M^b — inconsistentes com a independência (curiosamente, o próprio Savage, participando do experimento de Allais (1953), escolheu L^a e M^b). É o **paradoxo de Allais**: a certeza tem um apelo que a mistura destrói.

Reações comuns ao paradoxo:

1. **Posição normativa** — a teoria mostra como os agentes *devem* agir. É interessante decompor o problema de modo que a independência seja consequência de hipóteses comportamentais fundamentais: consequencialismo (irrelevância de eventos passados e não ocorridos), consistência intertemporal, independência do contexto e redução — a violação da independência implica a violação de ao menos um desses pressupostos;
2. **Desprezar o problema**, já que está associado a probabilidades extremas — postura que torna questionável o uso da teoria em áreas importantes, como o cálculo de disposição a pagar por tratamentos de doenças de baixa incidência mas grande fatalidade;
3. **Definir a escolha sobre objetos mais complexos** (e.g., *regret theory*);
4. **Relaxar o axioma da independência** (teorias de utilidade não-esperada).

7.7 Laboratório computacional em R

Aversão a risco é concavidade de u. Com utilidade CRRA $u(w) = \frac{w^{1-\gamma}-1}{1-\gamma}$, computamos o **equivalente-certo**, o **prêmio de risco** exato e a aproximação de **Arrow-Pratt** $\pi \approx \frac{1}{2}\,\mathrm{Var}(w)\, A(\mathbb{E}w)$, com coeficiente absoluto $A(w) = \gamma / w$.

```
g <- 3
u    <- function(w) (w^(1-g) - 1)/(1-g)
uinv <- function(U) ((1-g)*U + 1)^(1/(1-g))
wl <- 80; wh <- 120; pr <- 0.5                    # loteria 50/50
EW <- pr*wh + (1-pr)*wl
EU <- pr*u(wh) + (1-pr)*u(wl)
```

```r
CE <- uinv(EU); premio <- EW - CE                    # prêmio de risco exato
varr <- pr*(wh-EW)^2 + (1-pr)*(wl-EW)^2
premio_ap <- 0.5*varr*(g/EW)                         # aproximação de Arrow-Pratt
round(c(EW = EW, EC = CE, premio = premio, premio_ArrowPratt = premio_ap), 4)
```

```
            EW             EC        premio premio_ArrowPratt
      100.0000       94.1357        5.8643            6.0000
```

```r
w <- seq(60, 140, length.out = 200); df <- data.frame(w, u = u(w))
ggplot(df, aes(w, u)) + geom_line(color = az) +
  annotate("segment", x = wl, xend = wh, y = u(wl), yend = u(wh), color = vm) +
  annotate("point", x = EW, y = EU, size = 2.2) +
  annotate("point", x = CE, y = u(CE), size = 2.2) +
  annotate("segment", x = CE, xend = CE, y = -Inf, yend = u(CE), linetype = "dashed", color = c
  annotate("segment", x = EW, xend = EW, y = -Inf, yend = EU, linetype = "dashed", color = cz)
  annotate("text", x = CE, y = min(df$u), label = "EC",   size = 3, vjust = -0.4) +
  annotate("text", x = EW, y = min(df$u), label = "E[w]", size = 3, vjust = -0.4) +
  labs(x = "riqueza w", y = "u(w)")
```

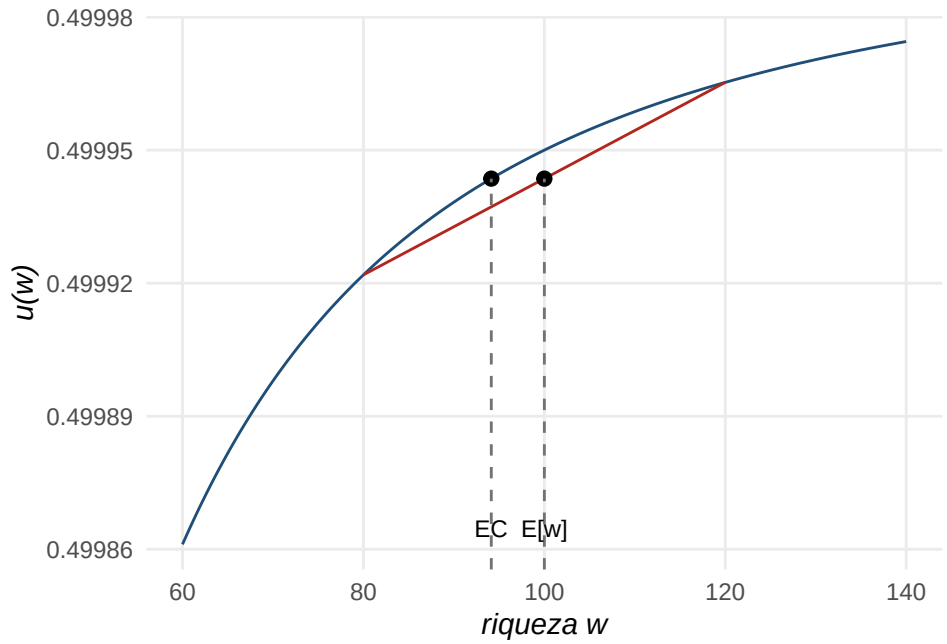

Figura 12: Aversão a risco: a corda (vermelha) fica abaixo de u (desigualdade de Jensen). O equivalente-certo EC está à esquerda de $\mathbb{E}[w]$; a distância é o prêmio de risco.

O prêmio exato (5,86) fica próximo da aproximação de Arrow-Pratt (6,00) porque o risco é pequeno; aumente o intervalo `wl`–`wh` e veja a aproximação piorar — ela é **local**, válida à primeira ordem na variância.

7.8 Exercícios

1. **Axiomas.** Mostre que, sob os Axiomas 1–4, vale a *propriedade de troca segura*: se $L \sim L'$, então $\alpha L + (1-\alpha)L'' \sim \alpha L' + (1-\alpha)L''$. Em seguida, usando continuidade e independência, mostre que existem uma melhor loteria $\bar{L}$ e uma pior $\underline{L}$, e que todo L é indiferente a $\alpha_L \bar{L} + (1-\alpha_L)\underline{L}$ para um único α_L — o embrião da prova do teorema de vNM.

2. **Unicidade afim.** Sejam U utilidade esperada e $V = \varphi(U)$ com φ estritamente crescente e *não-afim*. Mostre que V representa as mesmas preferências, mas **não** é linear em probabilidades. Conclua: a forma de utilidade esperada não é ordinalmente invariante — qual axioma "compra" a cardinalidade?

3. **Prêmios.** Para $u(x) = \sqrt{x}$ e a loteria que paga 1 ou 5 com probabilidade $1/2$ cada (Figura 11): calcule a utilidade esperada, o equivalente de certeza, o prêmio de risco exato e o aproximado por Arrow–Pratt. Compare e explique a diferença.

4. **CARA e CRRA.** (a) Verifique que r_A é constante na CARA e r_R constante na CRRA. (b) Mostre que, com CARA e ruído normal $\tilde{\varepsilon} \sim N(0, \sigma^2)$, o equivalente de certeza de $x + \tilde{\varepsilon}$ é *exatamente* $x - \alpha\sigma^2/2$ (a aproximação de Arrow–Pratt é exata). (c) Mostre que CRRA implica que a fração ótima da riqueza no ativo arriscado independe de w no problema de portfólio.

5. **Dominância.** Sejam F uniforme em $[1, 3]$ e G uniforme em $[0, 4]$. (a) Verifique que têm a mesma média e que nenhuma domina a outra em primeira ordem. (b) Mostre que F domina G em segunda ordem via critério das integrais das cdf's. (c) Exiba o mean-preserving spread que leva F em G.

6. **Rabin.** Reproduza o argumento de calibração: mostre que rejeitar (ganha 11 / perde 10, meio a meio) em toda renda implica $u'(w + 21n - 10) < (10/11)^n u'(w - 10)$, e use a soma da série geométrica para limitar o ganho G tal que o agente aceite (ganha G / perde 100). Discuta: qual hipótese você abandonaria — concavidade global, riqueza final como argumento, ou a própria utilidade esperada?

7. **Allais.** Escreva as quatro loterias de Allais como pontos do simplexo de $\mathbb{R}^3$ e desenhe (num triângulo de Marschak–Machina) as retas de indiferença de um agente vNM. Mostre que os pares (L^a, L^b) e (M^a, M^b) são ligados por *retas paralelas*, e que por isso nenhum feixe de retas paralelas racionaliza $L^a \succ L^b$ e $M^b \succ M^a$. Que forma teriam as curvas de indiferença de uma teoria que acomoda o paradoxo?

8 Produção

No Capítulo 5, estudamos a firma de *produto único* através da função de produção f e da função custo. Este capítulo generaliza: firmas que usam **muitos insumos para produzir muitos produtos**, descritas pela linguagem — devida a Debreu (1959) — que já usamos na definição de equilíbrio competitivo do Capítulo 4: conjuntos de produção e vetores de *netputs*. O ganho não é só generalidade; é também elegância: com a convenção de sinais certa, o problema da firma vira a maximização de **um único produto interno**, e toda a teoria — lucro, oferta, estática comparativa — sai de meia dúzia de argumentos de convexidade.

8.1 Tecnologia

! Definições — plano de produção e conjunto de possibilidades

Um **plano de produção** é um vetor

$$y \equiv (y_1, y_2, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m,$$

tal que $y_i > 0$ se i é um **produto** e $y_j < 0$ se j é um **insumo** (fator de produção).
O **conjunto de possibilidades de produção**, $\mathbb{Y} \subset \mathbb{R}^m$, caracteriza as tecnologias produtivas: um plano é **factível** (viável) quando $y \in \mathbb{Y}$; qualquer $y \notin \mathbb{Y}$ é dito inviável tecnologicamente. Por meio de $\mathbb{Y}$ particionamos o espaço de planos de produção em viáveis e inviáveis.

Uma tecnologia é descrita por meio das **propriedades de** $\mathbb{Y}$. As mais usadas:

- $\mathbb{Y} \neq \emptyset$ — *existe alguma produção factível*;
- **No free lunch**: $\mathbb{Y} \cap \mathbb{R}^L_+ \subseteq \{\mathbf{0}\}$ — não se pode produzir algo a partir de nada;
- $\mathbb{Y}$ é **fechado**: $y_n \to y$ com $y_n \in \mathbb{Y}$ para todo n implica $y \in \mathbb{Y}$ (hipótese de *continuidade*);
- **Free disposal**: $y \in \mathbb{Y}$ e $y' \leq y \Rightarrow y' \in \mathbb{Y}$ — quantidades adicionais de insumos (ou produto) podem ser descartadas sem custo;
- **Possibilidade de inação**: $\mathbf{0} \in \mathbb{Y}$;
- **Irreversibilidade**: $y \in \mathbb{Y} \Rightarrow -y \notin \mathbb{Y}$ (exemplo: se incluímos o tempo de disponibilidade na descrição dos bens, insumos devem ser usados *antes* de os produtos existirem);
- **Retornos de escala**: *não-crescentes* se $y \in \mathbb{Y} \Rightarrow \alpha y \in \mathbb{Y}$ para todo $\alpha \in [0,1]$ (a tecnologia é **divisível**); *não-decrescentes* se $y \in \mathbb{Y} \Rightarrow \alpha y \in \mathbb{Y}$ para todo $\alpha \geq 1$ (a tecnologia é **replicável**); *constantes* se é divisível e replicável;
- **Aditividade** (ou livre entrada): $y, y' \in \mathbb{Y} \Rightarrow y + y' \in \mathbb{Y}$;
- **Convexidade**: $y, y' \in \mathbb{Y} \Rightarrow \lambda y + (1-\lambda) y' \in \mathbb{Y}$ para todo $\lambda \in [0,1]$;
- $\mathbb{Y}$ **é um cone convexo**: $y, y' \in \mathbb{Y}$, $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ implicam $\alpha y + \beta y' \in \mathbb{Y}$ (equivale a convexidade + retornos constantes).

É útil dispor de uma descrição funcional. A **função de transformação** $F(\cdot)$ é definida por

$$\mathbb{Y} \equiv \{y \in \mathbb{R}^m ; F(y) \leq 0\},$$

com $F(y) = 0$ se y está na **fronteira de transformação**. Supondo F diferenciável, definimos a **Taxa Marginal de Transformação** do bem l pelo bem k,

$$\mathrm{TMgT}_{lk}(y) \equiv \frac{\partial_{y_l} F(y)}{\partial_{y_k} F(y)}$$

— em quanto a produção do bem k pode aumentar (ou o uso do insumo k ser reduzido) se for reduzida em uma unidade a produção do bem l (ou aumentada a quantidade do insumo l). A TMT unifica os objetos do Capítulo 5: entre dois insumos, é a TMgST; entre um insumo e um produto, a produtividade marginal; entre dois produtos, o custo de oportunidade na fronteira.

8.2 Maximização de lucro

O problema de maximização de lucro da firma é

$$\boxed{\max_{y \in \mathbb{Y}} \; p \cdot y}$$

— com a convenção de sinais, $p \cdot y$ *é* receita menos custo. Usando a função de transformação,

$$\max_{y} \; p \cdot y \quad \text{s.a.} \quad F(y) \leq 0,$$

donde a escolha ótima y^* é caracterizada por $p = \lambda \, \partial_y F(y^*)$: o vetor de preços é **normal à fronteira de transformação** — equivalentemente, $\text{TMgT}_{lk}(y^*) = p_l / p_k$ para todo par de bens. A firma leva a fronteira até o hiperplano de isolucro mais alto.

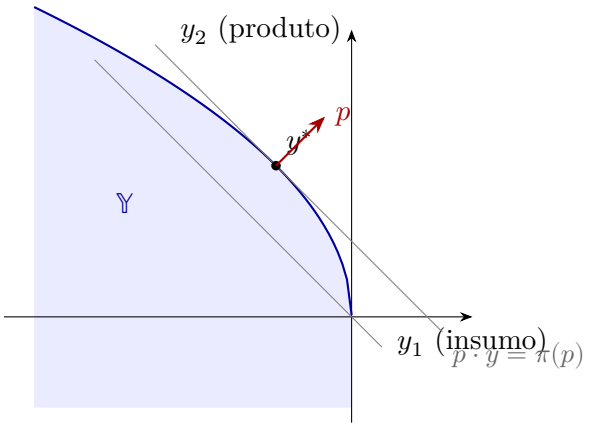

Figura 13: Maximização de lucro com um insumo ($y_1 < 0$) e um produto ($y_2 > 0$): a firma escolhe o ponto da fronteira de transformação que alcança a reta de isolucro mais alta; nele, p é normal à fronteira.

Existe solução? **Nem sempre** — retornos não-decrescentes com lucro positivo permitem replicar e escalar indefinidamente (o argumento do Capítulo 5, agora em geral: se $\mathbb{Y}$ é cone e $p \cdot y > 0$ para algum y, então $\sup p \cdot y = +\infty$). Supondo que exista uma solução, e que seja única, definimos a **função lucro** e a **função oferta**

$$\pi(p) \equiv \max_{y \in \mathbb{Y}} \; p \cdot y \qquad \text{e} \qquad y(p) \equiv \arg\max_{y \in \mathbb{Y}} \; p \cdot y.$$

8.2.1 Propriedades da função lucro

1. **Homogênea de grau 1 em** p: dobrar todos os preços dobra o lucro (a escolha ótima não muda);

2. π **recupera** $\mathbb{Y}$ (quando $\mathbb{Y}$ é convexo e fechado, com free disposal):

$$\mathbb{Y} = \{y \in \mathbb{R}^n;\ p \cdot y \leq \pi(p)\ \ \forall p \gg \mathbf{0}\}.$$

Ideia da demonstração: $-\mathbb{Y}$ é não-vazio, convexo e fechado; sua **função suporte** $\mu_{-\mathbb{Y}}(p) \equiv \inf\{p \cdot (-y); y \in \mathbb{Y}\}$ define, para cada p, um semi-espaço $\{y : p \cdot (-y) \geq \mu_{-\mathbb{Y}}(p)\}$ que contém $-\mathbb{Y}$; e se $\bar{y} \notin -\mathbb{Y}$, existe p com $-p \cdot \bar{y} < \mu_{-\mathbb{Y}}(p)$ (separação). Logo a interseção dos semi-espaços é exatamente $\mathbb{Y}$ — e $\pi(p) = -\mu_{-\mathbb{Y}}(p)$. Um conjunto convexo fechado *é* a interseção dos semi-espaços que o contêm: a função lucro carrega **toda** a informação da tecnologia (a dualidade, mais uma vez);

3. **Convexa em** p**.** *Demonstração:* tome p^0, p^1 e $p^t = tp^0 + (1-t)p^1$, $t \in (0,1)$, com escolhas ótimas y^0, y^1, y^t. Como y^t era factível aos outros preços, $p^0 \cdot y^0 \geq p^0 \cdot y^t$ e $p^1 \cdot y^1 \geq p^1 \cdot y^t$; combinando,

$$t\underbrace{p^0 \cdot y^0}_{\pi(p^0)} + (1-t)\underbrace{p^1 \cdot y^1}_{\pi(p^1)} \geq \underbrace{p^t \cdot y^t}_{\pi(p^t)}. \qquad \blacksquare$$

A intuição econômica da convexidade: quem pode *reagir* aos preços prefere preços voláteis a preços médios — a firma reotimiza em cada realização;

4. **Lema de Hotelling** (Hotelling 1932): se o conjunto $y(p)$ é unitário, $\pi(p)$ é diferenciável e

$$\boxed{\nabla\pi(p) = y(p).}$$

Demonstração: pelo teorema da dualidade, se $-\mathbb{Y}$ é convexo e fechado e $\mu_{-\mathbb{Y}}$ é sua função suporte, então existe um único $-\bar{y} \in -\mathbb{Y}$ com $\bar{p} \cdot (-\bar{y}) = \mu_{-\mathbb{Y}}(\bar{p})$ se e só se $\mu_{-\mathbb{Y}}$ é diferenciável em $\bar{p}$, com $\nabla\mu_{-\mathbb{Y}}(\bar{p}) = -\bar{y}$; como $\pi = -\mu_{-\mathbb{Y}}$, segue o resultado. (Alternativamente: envelope, como Roy e Shephard — Hotelling é o terceiro irmão.)

> **i** Ferramenta matemática — Máximo de funções lineares e hiperplanos
>
> Para cada y fixo, $p \mapsto p \cdot y$ é **linear**; $\pi(p) = \max_y p \cdot y$ é um **máximo de funções lineares** — e o máximo (envelope superior) de funções lineares/convexas é sempre **convexo**, com gradiente igual ao da função linear ativa (Hotelling). A recuperação de $\mathbb{Y}$ usa que conjunto convexo fechado = interseção de semi-espaços — a forma geométrica do **teorema do hiperplano separador**. *(Produto interno, hiperplanos e semi-espaços: capítulo* Álgebra Linear*; convexidade: capítulo* Otimização *das Notas de Matemática.)*

8.2.2 Propriedades da função oferta

1. Se $\mathbb{Y}$ é **convexo**, o conjunto $y(p)$ é convexo para todo p; se $\mathbb{Y}$ é **estritamente convexo**, $y(p)$ é um único ponto (ou é vazio). *Demonstração:* se $y_0, y_1 \in y(p)$, ambos rendem $\pi(p)$; qualquer combinação $y_2 = \lambda y_0 + (1-\lambda)y_1$ está em $\mathbb{Y}$ (convexidade) e rende o mesmo lucro (linearidade), logo $y_2 \in y(p)$. Sob convexidade estrita com $y_0 \neq y_1$, y_2 é *interior* — e bastaria escolher um plano com menos insumos ou mais produtos suficientemente próximo de y_2 para lucrar mais, contradição;

2. Se $y(\bar{p})$ é diferenciável em $\bar{p}$, então

$$\partial_p y(\bar{p}) = \partial^2_{pp}\pi(\bar{p}) \text{ é } \textbf{simétrica} \text{ e } \textbf{positiva semidefinida},$$

com $\partial^2_{pp}\pi(\bar{p})\,\bar{p} = \mathbf{0}$ ("semi", pois a homogeneidade de grau zero de $y(p)$ zera a matriz na direção dos próprios preços).

A positividade da diagonal é a **lei da oferta**: $\partial y_l/\partial p_l \geq 0$ — subiu o preço do produto, a oferta não cai; subiu o preço do insumo (p_l com $y_l < 0$), o uso não sobe. Note o contraste com o consumidor: **não há "efeito-renda" na firma**, e a lei vale *sem compensação nenhuma*. A matriz de Slutsky precisava ser compensada; a matriz de oferta, não.

8.3 Agregação

E a oferta *de mercado*? Sejam as funções lucro e as correspondências de oferta individuais, $\pi^j(p)$ e $y^j(p)$, $j = 1, \ldots, J$. A **função oferta agregada** é

$$y(p) \equiv \sum_j y^j(p) \equiv \left\{ y \in \mathbb{R}^L ; y = \sum_j y_j \text{ para algum } y_j \in y^j(p) \right\},$$

e o **conjunto de possibilidades de produção agregado** é $\mathbb{Y} \equiv \sum_j \mathbb{Y}_j$. Sejam $\pi^*(p)$ e $y^*(p)$ a função lucro e a oferta associadas a esse conjunto agregado. Duas observações imediatas: se cada $y^j(p)$ é diferenciável, cada $\partial_p y^j$ é simétrica e positiva semidefinida, e como essas propriedades são **preservadas pela adição**, $\partial_p y(p) = \sum_j \partial_p y^j(p)$ também o é. Mais forte:

> **!** Teorema — agregação exata
>
> Para todo $p \gg \mathbf{0}$:
>
> $$\text{(i)}\quad \pi^*(p) = \sum_j \pi^j(p); \qquad \text{(ii)}\quad y^*(p) = \sum_j y^j(p).$$

Demonstração. (i) Para qualquer escolha de planos individuais $\{y_j\}$ com $y_j \in \mathbb{Y}^j$, temos $\sum_j y_j \in \mathbb{Y}$, donde $\pi^*(p) \geq p \cdot \sum_j y_j = \sum_j p \cdot y_j$; tomando cada $y_j \in y^j(p)$, $\pi^*(p) \geq \sum_j \pi^j(p)$. Na direção oposta, qualquer $y \in \mathbb{Y}$ se decompõe como $y = \sum_j y_j$ com $y_j \in \mathbb{Y}^j$, e $p \cdot y = \sum_j p \cdot y_j \leq \sum_j \pi^j(p)$; como vale para todo y, vale para $y^*(p)$, e $\pi^*(p) \leq \sum_j \pi^j(p)$. (ii) segue do mesmo sanduíche: uma soma de ótimos individuais atinge π^* (logo está em y^*), e qualquer ótimo agregado precisa, na decomposição, dar $p \cdot y_j = \pi^j(p)$ para todo j (senão a soma não atingiria $\sum_j \pi^j$). ■

A leitura é importante: **no lado da produção, a agregação é perfeita**. A oferta agregada maximiza o lucro agregado como se a economia tivesse uma única "firma representativa" com tecnologia $\sum_j \mathbb{Y}_j$ — os preços *descentralizam* a alocação de produção entre as firmas de forma eficiente, sem que nenhum planejador precise decidir quem produz o quê. Contraste com o lado do consumo, onde Sonnenschein–Mantel–Debreu (Capítulo 3) destruiu qualquer esperança de um "consumidor representativo" sem hipóteses fortes: a diferença é que firmas maximizam a *mesma* função objetivo linear ($p \cdot y$), enquanto consumidores maximizam utilidades diferentes sob orçamentos que dependem da distribuição de renda.

8.4 Eficiência

! Definição e Teoremas — eficiência produtiva

Um vetor $y \in \mathbb{Y}$ é **eficiente** quando não existe nenhum outro $\hat{y} \in \mathbb{Y}$ tal que $\hat{y} > y$ (produzir mais de algo, ou usar menos de algo, sem piorar em nada).
Teorema 1. Se $y \in \mathbb{Y}$ maximiza lucros para algum vetor de preços $p \gg \mathbf{0}$, então y é eficiente.
Teorema 2 (recíproca, sob convexidade). Suponha que $\mathbb{Y}$ é convexo. Então, para todo y eficiente, y é a escolha maximizadora de lucro para algum vetor de preços $p > \mathbf{0}$.

Demonstração do Teorema 1. Suponha que não: tome $y \in y^*(p)$ e $\hat{y} \in \mathbb{Y}$ com $\hat{y} > y$. Como $p \gg \mathbf{0}$, $p \cdot \hat{y} - p \cdot y = p \cdot (\hat{y} - y) > 0$ — contradizendo $y \in y^*(p)$. ■

Demonstração do Teorema 2 (esboço). Tome y eficiente e defina $P_y \equiv \{\hat{y} \in \mathbb{R}^L; \hat{y} \gg y\}$. Pela eficiência, $\mathbb{Y} \cap P_y = \emptyset$. (i) Como P_y é convexo (e $\mathbb{Y}$ também), o **teorema do hiperplano separador** dá $p \neq \mathbf{0}$ com $p \cdot \hat{y} \geq p \cdot \hat{\hat{y}}$ para todo $\hat{y} \in P_y$, $\hat{\hat{y}} \in \mathbb{Y}$. (ii) $p > \mathbf{0}$: se algum $p_l < 0$, tomaríamos $\hat{y} \gg y$ com entrada $\hat{y}_l$ enorme e violaríamos $p \cdot (\hat{y} - y) \geq 0$. (iii) Para qualquer $\bar{y} \in \mathbb{Y}$, $p \cdot \hat{y} \geq p \cdot \bar{y}$ para todo $\hat{y} \in P_y$; como $\hat{y}$ pode ser escolhido arbitrariamente próximo de y, concluímos $p \cdot y \geq p \cdot \bar{y}$ para todo $\bar{y} \in \mathbb{Y}$ — y maximiza lucro a p. ■

O par de teoremas é a versão produtiva dos dois teoremas do bem-estar do Capítulo 4 — e com a mesma assimetria: a ida é de graça, a volta cobra **convexidade**. Com $\mathbb{Y}$ não-convexo (retornos crescentes), há planos eficientes que nenhum sistema de preços sustenta.

8.5 Sobre os objetivos da firma, de novo

Retomamos, agora com o instrumental completo, a justificativa do Capítulo 5 para a maximização de lucro. Toda firma j, caracterizada por $\mathbb{Y}^j$, é de propriedade de indivíduos, com participações θ^i_j ($\sum_i \theta^i_j = 1$); a restrição orçamentária do indivíduo i é $p \cdot x^i \leq p \cdot \bar{x}^i + \sum_j \theta^i_j \, p \cdot y^j$, e — para firmas tomadoras de preços — a escolha $y^j \in \arg\max_{y \in \mathbb{Y}^j} p \cdot y$ é **unanimemente** preferida pelos acionistas. As hipóteses implícitas eram três; vejamos o que acontece quando cada uma falha:

1. **Preços fixos.** Se os preços forem passíveis de manipulação pela firma (ambiente não-concorrencial), um novo canal de influência do comportamento da firma sobre os conjuntos de consumo factíveis (restrições orçamentárias) dos agentes aparece: o acionista-consumidor pode preferir lucro menor com preços mais favoráveis às suas compras. A unanimidade morre com o poder de mercado;
2. **Lucros determinísticos.** Se a produção é vendida antes ou depois de resolvida a incerteza, o lucro passa a ser incerto — e a pergunta relevante é: *será que a firma deve maximizar o lucro esperado?* Fluxos incertos devem ser "ajustados pelo risco". Porém, com **mercados incompletos** (conceitos que ficarão mais claros no estudo do equilíbrio geral com incerteza), não há unanimidade sobre o "valor do lucro": cada indivíduo pode atribuir um valor diferente a lucros que ocorram em estados da natureza distintos. Com mercados completos, os preços dos ativos contingentes dão o deflator comum e a unanimidade renasce;
3. **Acionistas administram a firma.** Em muitos casos os administradores não são os donos — e pode haver conflito de interesses entre os objetivos dos administradores e os dos donos. Parte importante dos estudos de **finanças corporativas** está relacionada aos contratos que permitem alinhar os interesses de administradores e acionistas.

8.6 Laboratório computacional em R

A tecnologia $f(k,l) = A\,k^a l^b$ tem **isoquantas** $l = (\bar{q}/(Ak^a))^{1/b}$, TMgST $= (a/b)(l/k)$ e retornos de escala 2^{a+b} — crescentes, constantes ou decrescentes conforme $a+b \gtrless 1$.

```
A <- 1; a <- 0.4; b <- 0.5
esc <- 2^(a + b)                                  # fator ao dobrar todos os insumos
g <- expand.grid(k = seq(0.3, 10, length.out = 300), q = c(1, 2, 3))
g$l <- (g$q/(A*g$k^a))^(1/b)                       # isoquantas
ggplot(subset(g, l <= 10), aes(k, l, group = factor(q))) +
  geom_line(color = az) +
  coord_cartesian(xlim = c(0, 10), ylim = c(0, 10)) +
  labs(x = "k", y = "l")
```

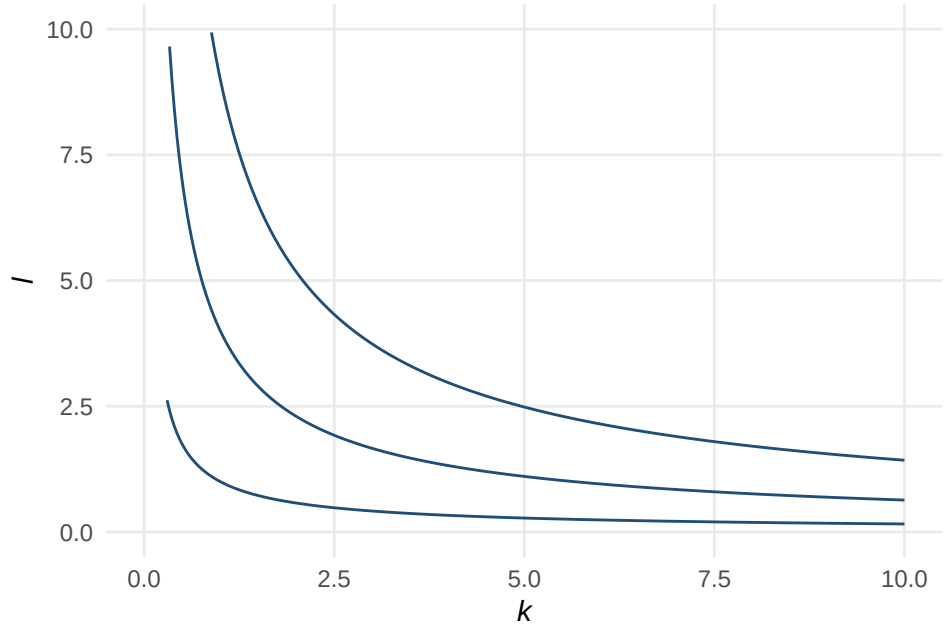

Figura 14: Isoquantas de $f(k,l) = k^{0,4}l^{0,5}$ para três níveis de produto: convexas para a origem, refletem TMST decrescente.

```
c(expoente_a_mais_b = a + b, fator_ao_dobrar_insumos = esc)
```

```
      expoente_a_mais_b fator_ao_dobrar_insumos
               0.900000                1.866066
```

Como $a+b = 0{,}9 < 1$, dobrar k e l multiplica o produto por $2^{0,9} \approx 1{,}87 < 2$: **retornos decrescentes de escala**. Ajuste `a` e `b` para $a+b = 1$ (constantes) ou > 1 (crescentes) e as isoquantas mudam de espaçamento.

8.7 Exercícios

1. **Propriedades de $\mathbb{Y}$.** Para a tecnologia de produto único $\mathbb{Y} = \{(-x_1, -x_2, y) : y \leq f(x_1, x_2),\ x_1, x_2 \geq 0\}$ com f Cobb-Douglas $x_1^\alpha x_2^\beta$: (a) verifique no free lunch, inação e free disposal; (b) mostre que $\mathbb{Y}$ é convexo se e só se $\alpha + \beta \leq 1$, e é um cone se e só se $\alpha + \beta = 1$; (c) relacione com retornos de escala.

2. **TMT.** Para a fronteira $F(y_1, y_2) = y_1^2 + y_2^2 - 1 = 0$ (dois produtos, insumos implícitos): calcule TMgT_{12} e resolva o problema da firma para $p = (p_1, p_2)$. Verifique o lema de Hotelling calculando $\pi(p)$ e diferenciando.

3. **Hotelling e Le Chatelier.** Usando $\nabla\pi = y(p)$ e a convexidade de π: (a) prove a lei da oferta $\partial y_l / \partial p_l \geq 0$; (b) explique por que a matriz $\partial_p y$ é simétrica — que "lei de reciprocidade" isso impõe entre o efeito do salário sobre a oferta de produto e o efeito do preço do produto sobre a demanda de trabalho?

4. **Recuperação da tecnologia.** Seja $\pi(p_1, p_2) = p_2^2/(4p_1)$ (um insumo, bem 1; um produto, bem 2). Recupere $y(p)$ por Hotelling e a fronteira de transformação eliminando os preços. Confirme que a tecnologia é $y_2 = \sqrt{-y_1}$.

5. **Agregação.** Duas firmas com custos $c_1(y) = y^2$ e $c_2(y) = 2y^2$ (produto único, preço p). (a) Calcule as ofertas e lucros individuais e agregados e verifique o teorema de agregação. (b) Mostre que a alocação de produção entre as firmas minimiza o custo total de produzir $y_1 + y_2$ — os preços descentralizam a eficiência produtiva.

6. **Eficiência sem preços.** Exiba uma tecnologia não-convexa e um plano eficiente que não maximiza lucro a preço algum. (Sugestão: fronteira $y_2 = g(-y_1)$ com g convexa em um trecho.) Qual passo da prova do Teorema 2 falha?

7. **Objetivos da firma.** Uma firma tem dois acionistas (50% cada) e escolhe entre os planos A, que rende lucro 10 nos dois estados da natureza, e B, que rende $(22, 0)$ nos estados (s_1, s_2). Não há mercados para transferir renda entre estados. O acionista 1 só valoriza consumo em s_1; o 2, em s_2. Mostre que não há unanimidade e discuta: que mercado, se existisse, a restauraria?

9 Tópicos em Teoria da Escolha

Fechamos o curso voltando ao ponto de partida — o consumidor dos Capítulos 1 e 2 — com o instrumental completo. Este capítulo é uma coleção de extensões, cada uma respondendo a uma pergunta prática que o modelo básico deixou em aberto: como *medir* em dinheiro o efeito de uma mudança de preços? O que muda quando a renda vem de uma **dotação** (trabalho, poupança) e não de um cheque? Como tratar orçamentos **não-lineares** (imposto de renda progressivo)? Por que demandas de **curto prazo** são menos elásticas que as de longo? E quando podemos **agregar bens** em índices ("alimentação", "transporte") sem violar a teoria? O fio comum: tudo se resolve com os objetos duais — v, e, demandas marshalliana e hicksiana — e o teorema do envelope.

9.1 Utilidade e bem-estar

A variação da utilidade quando os preços passam de p^0 para p^1 é $v(p^1, y) - v(p^0, y)$ — correta, porém em *utils*, uma unidade sem significado. Comecemos pelo caso em que somente um preço variou, o do bem i:

$$v(p^1, y) - v(p^0, y) = \int_{p^0}^{p^1} \partial_i v(p, y)\, dp_i = -\int_{p^0}^{p^1} \partial_y v(p, y)\, x_i(p, y)\, dp_i,$$

usando Roy na segunda igualdade. Suponhamos $\partial_y v(p, y)$ **constante**. Neste caso,

$$-\frac{1}{\partial_y v(p, y)} \int_{p^0}^{p^1} \partial_i v(p, y)\, dp_i = \int_{p^0}^{p^1} x_i(p, y)\, dp_i$$

— a variação no bem-estar é proporcional à variação na **área abaixo da curva de demanda**: o **excedente do consumidor**. A hipótese que sustenta o atalho é forte (utilidade marginal da renda constante — quase-linearidade, de novo); sem ela, o excedente marshalliano é só uma aproximação, e as medidas exatas são as que definimos no Capítulo 2:

- A **variação compensatória** CV da mudança de preço é definida por $v(p^1, y + CV) = v(p^0, y)$. Expressa pelas funções gasto (e usando $y = e(p^0, v(p^0, y))$):

$$CV = e(p^1, v^0) - e(p^0, v^0);$$

- A **variação equivalente** EV é definida por $v(p^1, y) = v(p^0, y - EV)$, donde

$$EV = e(p^1, v^1) - e(p^0, v^1).$$

Pelo lema de Shephard, ambas são **integrais de linha da demanda hicksiana** entre p^0 e p^1 — a mesma curva de demanda compensada, avaliada em utilidades de referência diferentes:

$$\boxed{CV = \int_{p^0}^{p^1} \chi(p, v^0) \cdot \frac{dp}{dt}\, dt, \qquad EV = \int_{p^0}^{p^1} \chi(p, v^1) \cdot \frac{dp}{dt}\, dt,}$$

onde escrevemos $\chi(p, u)$ para a demanda hicksiana. Para um único preço e bem normal, a demanda marshalliana corre entre as duas hicksianas, e $EV \le \Delta CS \le CV$ (para uma alta de preço): o excedente do consumidor é um compromisso entre as duas medidas exatas — e coincide com ambas no caso quase-linear.

i Ferramenta matemática — Integrais de linha e independência do caminho

Com vários preços mudando, CV é a integral do campo vetorial $\chi(p, v^0)$ ao longo de um caminho de p^0 a p^1. O valor **não depende do caminho** porque χ é um gradiente ($\chi = \nabla_p e$, Shephard) — e campos-gradiente têm integral de linha igual à diferença de potencial, $e(p^1, \cdot) - e(p^0, \cdot)$. A simetria da matriz de substituição (Young) é exatamente a condição de integrabilidade. A área sob a demanda *marshalliana*, em contraste, depende do caminho quando os efeitos-renda diferem entre bens — mais um motivo para preferir as medidas hicksianas. *(Gradientes e derivadas cruzadas: capítulo* Funções de Várias Variáveis*; integral como antiderivada: capítulo* Integral Definida *das Notas de Matemática.)*

9.2 Comprando e vendendo

Suponha que, em vez de uma renda, o agente possua uma **dotação inicial** $\bar{x}$ de bens que possa vender no mercado para comprar as mercadorias de seu interesse — o consumidor da economia de trocas do Capítulo 4. Neste caso,

$$\hat{v}(p; \bar{x}) \equiv \max_{x \in \mathbb{R}^n_+} u(x) \quad \text{s.t.} \quad p \cdot \bar{x} \geq p \cdot x,$$

com $\hat{x}(p; \bar{x})$ o argmax correspondente. A reta orçamentária agora **passa pela dotação** (consumir a própria dotação é sempre viável) e tem inclinação $-p_1/p_2$: mudanças de preço *giram* o orçamento em torno de $\bar{x}$.

O que acontece com a demanda de um bem j quando aumenta o preço do bem i? Primeiro, há o efeito tradicional medido pela demanda marshalliana, $\partial_i x_j$; segundo, a renda do agente também é afetada, de modo independente, pelo aumento de p_i. Seja $y \equiv p \cdot \bar{x}$. O efeito total é

$$\frac{dx_j}{dp_i} = \partial_i x_j(p, y) + \partial_y x_j(p, y)\, \bar{x}_i,$$

e substituindo a equação de Slutsky do Capítulo 2 ($\partial_i x_j = \partial_i \chi_j - \partial_y x_j\, x_i$):

$$\boxed{\frac{dx_j}{dp_i} = \partial_i \chi_j(p, u) - \partial_y x_j(p, y)\,(x_i - \bar{x}_i).}$$

É a **equação de Slutsky com dotação**: o efeito-renda agora é ponderado pela **demanda líquida** $x_i - \bar{x}_i$, não pela bruta. A diferença muda sinais e vidas: para um *vendedor líquido* do bem i ($x_i < \bar{x}_i$), uma alta de p_i tem efeito-renda **positivo** — o produtor de comida fica mais rico quando a comida encarece. Graficamente, a decomposição ganha um terceiro passo: substituição (giro compensado), efeito-renda ordinário e **efeito-renda da dotação** (a revalorização de $\bar{x}$).

9.2.1 Oferta de trabalho

Seja w o salário — i.e., o **preço do lazer**. A pessoa tem uma dotação inicial de $\bar{L}$ horas (e.g., 168 horas semanais); vende $\bar{L} - l$ no mercado de trabalho e consome l de lazer; com o salário recebido, consome bens a preços p. O problema do consumidor/trabalhador é

$$\hat{v}(p, w; \bar{L}) = \max_{l \in \mathbb{R}_+,\, x \in \mathbb{R}^{n-1}_+} u(x, l) \quad \text{s.t.} \quad w(\bar{L} - l) \geq p \cdot x.$$

Escrevendo $y = w\bar{L}$, a equação de Slutsky com dotação dá

$$\frac{dl}{dw} = \partial_w l^h(p, w, u) - \partial_y l(p, w, y)\,(l - \bar{L}).$$

O que acontece quando o lazer é **normal**? Como $l < \bar{L}$ (o agente é *vendedor* de tempo), o termo $-(l - \bar{L}) = \bar{L} - l > 0$: o efeito-renda é **positivo** para o lazer — e vai **contra** o efeito-substituição (que reduz o lazer quando seu preço w sobe). Salário mais alto torna o lazer mais caro (trabalhe mais!), mas enriquece o dono das horas (trabalhe menos!). Se o efeito-renda domina a partir de algum nível salarial, a curva de oferta de trabalho **verga para trás** (*backward-bending*).

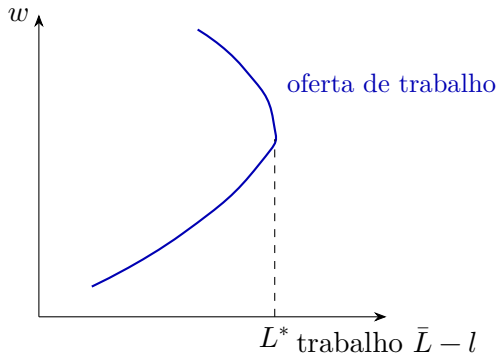

Figura 15: Oferta de trabalho *backward-bending*: para salários baixos domina a substituição (trabalha-se mais); para salários altos, o efeito-renda da dotação de tempo domina e a oferta recua.

9.2.2 Escolha intertemporal

O mesmo aparato lê a poupança. Com dois períodos, consumos x_1, x_2 e dotações $\bar{x}_1, \bar{x}_2$:

$$\hat{v}(1, R^{-1}; \bar{x}_1, \bar{x}_2) = \max_x \; u(x_1) + \beta u(x_2) \quad \text{s.t.} \quad x_1 + x_2 R^{-1} \leq \bar{x}_1 + \bar{x}_2 R^{-1},$$

em que a restrição deve ser lida como "o **valor presente** do consumo não pode ser maior do que o valor presente da renda". O vetor de preços é $p = (1, R^{-1})$, onde $R = 1 + r$ é a taxa de juros bruta. Duas coisas a compreender: (1) o aumento da taxa de juros é uma *redução* em um preço — o preço do consumo futuro; (2) o efeito-renda, mais uma vez, depende de o agente ser ofertante (**devedor**) ou demandante líquido (**poupador**) de consumo futuro: juros mais altos empobrecem o devedor (e o fazem consumir menos hoje por *dois* motivos) e enriquecem o poupador (para quem substituição e renda brigam — a resposta da poupança a juros é teoricamente ambígua).

9.3 Restrições orçamentárias não-lineares

Reescrevamos o efeito-renda como $\partial_y x_i\, dy$. Quando a restrição orçamentária do agente é walrasiana, $y = \sum_k p_k x_k$ e $dy = x_j\, dp_j$: a variação no preço afeta **todas** as unidades, marginais e inframarginais. O que acontece, porém, quando $p_j = \tilde{p}_j(x)$ — o preço depende da quantidade? A própria definição de "variação de preço" merece cuidado: qual preço, o *marginal* ou o *inframarginal*? No primeiro caso teremos novamente efeito-renda e efeito-substituição; no segundo, **somente efeito-renda** — e a fórmula do efeito-renda deve ser revista.

O exemplo canônico é o **imposto de renda progressivo**:

$$\max_{(c,l)\in\mathbb{R}^2_+} u(c,l) \quad \text{s.a.} \quad (\bar{L}-l)\,w\,(1-t^i)+c \le I^i,$$

em que, sendo $Y = Lw$ a renda tributável, a alíquota **marginal** varia por faixa:

$$t^i = \begin{cases} t_0 & \text{se } 0 \le Y < Y_1 \\ t_1 & \text{se } Y_1 \le Y < Y_2 \\ t_2 & \text{se } Y > Y_2 \end{cases}$$

(note que t_i denota a alíquota *marginal*, que difere do imposto total $T(Y)$ quando as alíquotas marginais são diferentes nas faixas superiores). O orçamento vira uma linha quebrada, e o truque é **linearizá-lo localmente**: em cada faixa, o agente age como se enfrentasse o salário líquido $(1-t^i)w$ e uma **renda virtual** $I^i = Y\tau - T(Y)$ — o intercepto da extensão da reta local. A oferta de trabalho é então função de $((1-t^i)w,\, I^i)$, e o efeito de mudar a alíquota da faixa j decompõe-se em

$$dl = \chi_{i=j}\,[\partial_w l]\,w\,dt^j + \partial_I l\;\partial_{t^j} I^i\,dt^j,$$

onde $\chi_{i=j}$ é a função indicador (1 se o agente está na faixa j). A análise separa uma parte **tradicional** — o termo entre colchetes, que só opera se a alíquota mudada é a *marginal* do agente — e uma parte de **não-linearidade**: mudar alíquotas de faixas *inferiores* à do agente altera apenas sua renda virtual (efeito-renda puro, sem substituição). A distinção é o pão de cada dia da economia do trabalho e das finanças públicas empíricas.

9.4 Demanda condicional e a segunda lei da demanda

Dividimos os bens em dois grupos, $x = (x_1, x_2)$, e consideramos o problema em que só o primeiro pode ser ajustado:

$$\max_{x_1} u(x_1,x_2) \quad \text{s.t.} \quad p_1 \cdot x_1 \le y,$$

cuja solução dá a **utilidade indireta condicional** $v(p_1, y; x_2)$ e a **demanda condicional** $x_1(p_1, y; x_2)$ — a demanda de "curto prazo", quando parte da cesta (a casa, o carro, o contrato) está travada. Como sempre, os resultados mais fortes são os hicksianos. Considere a minimização de despesas do indivíduo que **não pode ajustar** sua demanda do bem j:

$$\hat{E}(p_{-j}, \bar{u}; p_j x_j) \equiv p_j x_j + \min_{x_{-j}} p_{-j}\cdot x_{-j} \quad \text{s.t.} \quad u(x_{-j}, x_j) = \bar{u},$$

a **função despesa de curto prazo**. Naturalmente $\hat{E}(p_{-j}, \bar{u}; p_j x_j) \ge E(p, \bar{u})$, com igualdade quando x_j está no nível ótimo: $E(p,\bar{u}) \equiv \min_{x_j} \hat{E}(p_{-j}, \bar{u}; p_j x_j)$ — a mesma estrutura envelope do custo de curto e longo prazos da firma (Capítulo 5). A demanda hicksiana **condicional** $\hat{\chi}_{-j}(p_{-j}, \bar{u}, x_j)$ se relaciona com a hicksiana por $\hat{\chi}_{-j}(p_{-j}, \bar{u}, \chi_j(p,\bar{u})) = \chi_{-j}(p,\bar{u})$. Tomemos um bem $k \neq j$ e diferenciemos essa identidade em p_k e em p_j; combinando as duas equações (e usando $\partial_{x_j}\hat{\chi}_k \cdot \partial_j \chi_j = \partial_j \chi_k$):

$$\boxed{\partial_k \hat{\chi}_k(p_{-j}, \bar{u}, \chi_j) = \partial_k \chi_k(p,\bar{u}) - \frac{\partial_j \chi_k(p,\bar{u})\,\partial_k \chi_j(p,\bar{u})}{\partial_j \chi_j(p,\bar{u})}.}$$

A demanda hicksiana condicional é uma hicksiana com todas as suas propriedades usuais (é produto de uma minimização de despesas), em particular $\partial_k \hat{\chi}_k < 0$. E o último termo: o numerador é $(\partial_j \chi_k)^2 \geq 0$ pela **simetria** da demanda hicksiana, o denominador é negativo pela **negatividade** de $\partial_j \chi_j$ — logo o termo subtraído é ≤ 0 e

$$\partial_k \chi_k(p, \bar{u}) \leq \partial_k \hat{\chi}_k(p_{-j}, \bar{u}, \chi_j) < 0 :$$

"a elasticidade da demanda hicksiana de longo prazo é maior do que a elasticidade de curto prazo" — a *segunda lei da demanda*. Fixar uma margem de ajuste só pode amortecer a resposta: é o mesmo princípio de Le Chatelier que vimos na firma (demanda de insumos vs. condicional), agora do lado do consumo. Gasolina cara morde pouco no mês seguinte (o carro está na garagem) e muito em cinco anos (o carro, o bairro e o emprego mudam).

9.5 Demanda Frisch e variações transitórias dos preços

Slutsky compensa *renda*; Hicks compensa *utilidade*; há uma terceira compensação, útil sobretudo em macroeconomia: manter constante a **utilidade marginal da renda** — o nosso multiplicador de Lagrange λ. Definamos a **demanda Frisch**

$$x_i^f(p, \lambda) \equiv x_i(p, \phi(p, \lambda)),$$

onde $y = \phi(p, \lambda)$ inverte $\lambda \equiv \partial_y v(p, y)$ e $x_i(\cdot)$ é a demanda marshalliana. Diferenciando e usando o teorema da função implícita, $\partial_j \phi(p, \lambda) = -\partial^2_{yj} v / \partial^2_{yy} v$; da identidade de Roy, $\partial_j v = -\partial_y v \, x_j$, donde $\partial^2_{jy} v = -\partial^2_{yy} v \, x_j - \partial_y v \, \partial_y x_j$ e

$$\partial_j \phi(p, \lambda) = x_j(p, y) + \frac{\partial_y v(p, y)}{\partial^2_{yy} v(p, y)} \, \partial_y x_j(p, y).$$

Substituindo, temos a representação completa da demanda Frisch:

$$\partial_j x_i^f(p, \lambda) = \underbrace{\partial_j x_i + \partial_y x_i \, x_j}_{\partial_j \chi^i(p,u)} \; \underbrace{+ \; \frac{\partial_y v}{\partial^2_{yy} v}}_{-A^{-1}} \, \partial_y x_i \, \partial_y x_j$$

— o efeito-substituição hicksiano **mais** um termo de "recomposição da renda" governado pela curvatura de v em y. Se $i = j$ (e supondo $\partial^2_{yy} v < 0$),

$$\partial_i x_i^f(p, \lambda) = \partial_i \chi^i(p, u) - A^{-1} (\partial_y x_i)^2 < 0,$$

a demanda Frisch é a **mais elástica das três** (Frisch $\leq$ Hicks ≤ 0). E é **simétrica** também — o caminho rápido para ver isso: pela identidade de Roy, $\partial_p v = -\lambda x$; mantendo λ constante, $\partial^2_{pp} v = -\lambda \, \partial_p x^f$, simétrica pelo teorema de Young. A leitura econômica do título da seção: para **variações transitórias de preços**, um consumidor com acesso a poupança quase não ajusta λ (a utilidade marginal da riqueza de vida inteira mal se move) — a resposta observada é a Frisch, e é por isso que elasticidades-Frisch calibram os modelos macro de consumo e oferta de trabalho.

9.6 Separabilidade

Trabalhamos o curso inteiro com "bens"; na prática, estimam-se demandas por *grupos* — alimentação, vestuário, transporte. Quando isso é legítimo?

9.6.1 O teorema do bem composto

(Hicks, 1936.) Suponha que os preços possam ser particionados em dois grupos, $p \equiv (p_1, p_2)$, tais que o grupo p_2 sempre se mova **de forma conjunta**: $p_2 = \theta p_2^0$, onde θ é um escalar e p_2^0 um "valor inicial" do vetor de preços. Como p_2^0 é fixo, pode ser considerado um parâmetro, e definimos

$$\hat{E}(p_1, \theta, u) \equiv E(p_1, \theta p_2^0, u).$$

Pode-se mostrar que $\hat{E}(\cdot)$ é uma função despesa com todas as propriedades usuais — crescente, côncava e homogênea de grau 1 em (p_1, θ), crescente e ilimitada em u. Além disso,

$$\partial_\theta \hat{E}(p_1, \theta, u) = \sum_{p_i \in p_2} \partial_i E(p_1, \theta p_2^0, u)\, p_i^0 = \sum_{p_i \in p_2} \chi^i(p_1, \theta p_2^0, u)\, p_i^0,$$

que é o nosso equivalente ao lema de Shephard: o "bem composto" — cuja quantidade é o gasto no grupo a preços iniciais e cujo preço é θ — comporta-se **exatamente como um bem** da teoria. Preços relativos internos constantes são a licença para agregar.

9.6.2 Separabilidade fraca

Uma função utilidade é dita (fracamente) **separável** quando é possível particionar os bens $x \equiv (x_1, \ldots, x_m)$ de maneira a escrevê-la como

$$u(x) \equiv \hat{u}(v_1(x_1), v_2(x_2), \ldots, v_m(x_m)).$$

A primeira consequência: para dois bens do grupo G, a taxa marginal de substituição entre eles **é independente dos bens que não pertencem ao grupo**,

$$\frac{\partial_{x_i} u(x)}{\partial_{x_j} u(x)} = \frac{\partial_{x_i} v_G(x_G)}{\partial_{x_j} v_G(x_G)},$$

e portanto, *dado um valor total para a despesa no grupo*, a decisão de consumo dentro do grupo depende somente dos preços do grupo. A demanda marshalliana pode ser escrita como

$$x_i(p, y) = \hat{x}_i(p_G, \phi_G(p, y)) \quad \forall i \in G,$$

onde ϕ_G é a despesa alocada ao grupo. Duas implicações testáveis: (1) os preços dos *outros* grupos só afetam a demanda do bem i **através da despesa do grupo**, $\partial_j x_i = \partial_{y_G} \hat{x}_i \cdot \partial_j \phi_G$ para $j \notin G$ — restrições fortes sobre substitutibilidade entre grupos; (2) dentro do grupo, o efeito-preço decompõe-se em um **efeito direto** (com todas as propriedades da demanda marshalliana) e um **efeito indireto** via variação da despesa do grupo.

O mesmo vale para a hicksiana, $\chi^i(p, u) = \hat{x}_i(p_G, \psi_G(p, u))$, e aqui a simetria de Slutsky rende um resultado notável: para $i \in G$ e $j \in H$ (grupos distintos), $\partial_j \chi^i = \partial_i \chi^j$ força

$$\partial_j \chi^i(p, u) = \partial_{y_G} \hat{x}_i(p_G, \psi_G)\, \partial_{y_H} \hat{x}_j(p_H, \psi_H)\, \kappa_{GH},$$

com $\kappa_{GH} = \kappa_{HG}$ **comum a todos os pares** $(i, j) \in G \times H$: a substituição entre grupos é governada por um único número por par de grupos — **o efeito-substituição entre bens de grupos diferentes é proporcional aos efeitos-renda** ($\kappa_{GH} = \sum_{i \in G} \partial_i \psi_H\, p_i$ mede o efeito sobre os gastos totais no grupo H de uma variação proporcional de todos os preços do grupo G, mantendo a utilidade). Os κ_{IJ}, $I, J = 1, \ldots, m$, formam uma **matriz de Slutsky de grupos**. Apesar disso, não é possível definir uma regra de *alocação* entre os grupos a não ser que as condições do teorema do bem composto valham — ou sem *two-stage budgeting*.

9.6.3 Two-stage budgeting

O problema pode ser visto como

$$\max_{\bar{v}} \ \hat{u}(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_m) \quad \text{s.t.} \quad \sum_{G=1}^{m} E_G(p_G, \bar{v}_G) \leq y$$

— escolher "quantidades" $\bar{v}_G$ de cada subutilidade pagando o gasto mínimo E_G para atingi-las. O que torna difícil o estágio mais alto é que os "preços" dos "bens" $\bar{v}_G$ **não são constantes**. Uma forma de contornar: supor que

$$E_G(p_G, \bar{v}_G) \equiv e_G(p_G)\, \bar{v}_G$$

— o gasto é linear na subutilidade, com $e_G(p_G)$ fazendo papel de **índice de preços do grupo** (é o caso quando cada v_G é homotética). Então o problema se divide em dois estágios: (II) no estágio de baixo, determinam-se os índices $e_G(p_G)$ e a alocação *dentro* de cada grupo; (I) no de cima, tomando os índices como preços, escolhe-se a cesta de grupos:

$$\max_{\bar{v}} \ \hat{u}(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_m) \quad \text{s.t.} \quad \sum_{G=1}^{m} p_G \bar{v}_G \leq y, \qquad p_G = e_G(p_G)$$

— e o consumidor de n bens vira, legitimamente, um consumidor de m "bens compostos". É a justificativa teórica de toda cesta de índices (IPCA e afins) e dos sistemas de demanda estimados por estágios.

9.6.4 Separabilidade forte (ou aditiva)

Neste caso,

$$u(x) \equiv \hat{u}(v_1(x_1) + v_2(x_2) + \cdots + v_m(x_m)).$$

A principal consequência adicional é que $\kappa_{IJ} = \kappa$ para todo I e todo J — **um único** parâmetro de substituição entre todos os pares de grupos. É uma camisa de força poderosa (e testável): com aditividade, conhecer os efeitos-renda praticamente determina a matriz de substituição inteira — a base do modelo de demanda linear de gastos (Stone-Geary) e das calibrações macro com utilidade aditiva no tempo, onde os "grupos" são períodos e κ vira a elasticidade de substituição intertemporal.

9.7 Laboratório computacional em R

A **preferência revelada** é testável diretamente sobre dados de escolha. Geramos escolhas de um consumidor Cobb-Douglas sob três sistemas de preços — que, por virem de maximização, devem satisfazer o **axioma fraco (WARP)** — e checamos a consistência par a par.

```
aa <- 0.5; y <- 12
P <- rbind(c(1, 2), c(2, 1), c(1, 1))                       # três sistemas de preços
X <- t(apply(P, 1, function(p) c(aa*y/p[1], (1-aa)*y/p[2]))) # escolhas ótimas
Cost <- P %*% t(X)                                          # Cost[t,j] = p_t . x_j
RP <- sweep(Cost, 1, diag(Cost), "<=")                      # x_j factível quando comprou x_t?
viola <- FALSE
```

```r
for (s in 1:3) for (j in 1:3)
  if (s != j && RP[s, j] && RP[j, s] && any(abs(X[s, ] - X[j, ]) > 1e-9)) viola <- TRUE
list(escolhas = round(X, 3), viola_WARP = viola)
```

```
$escolhas
     [,1] [,2]
[1,]    6    3
[2,]    3    6
[3,]    6    6

$viola_WARP
[1] FALSE
```

Nenhuma violação — como tinha de ser, já que as escolhas vieram de uma utilidade. Troque uma linha de `X` "na mão" e o teste acusa a inconsistência: é assim que se confronta a teoria com dados reais de consumo, sem nunca observar a utilidade.

9.8 Exercícios

1. **CV, EV e CS.** Para $u(x_1, x_2) = \ln x_1 + x_2$ e uma alta de $p_1^0 = 1$ para $p_1^1 = 2$ ($p_2 = 1$, y grande): calcule CV, EV e ΔCS e verifique que coincidem. Repita com $u = x_1^{1/2} x_2^{1/2}$ e mostre que $EV < \Delta CS < CV$. O que explica a diferença?

2. **Slutsky com dotação.** Um agricultor consome e vende arroz (x_1, dotação $\bar{x}_1$) e compra o resto (x_2). Mostre que uma alta no preço do arroz pode *aumentar* seu consumo de arroz sem que arroz seja um bem de Giffen. Que condição sobre $x_1 - \bar{x}_1$ e o efeito-renda gera isso?

3. **Oferta de trabalho.** Com $u(c, l) = c^{\alpha} l^{1-\alpha}$ e dotação $\bar{L}$: (a) derive a oferta de trabalho e mostre que é *vertical* (substituição e renda se cancelam exatamente); (b) adicione renda não-salarial $y_0 > 0$ e mostre que a oferta passa a ser crescente no salário. Interprete via equação de Slutsky com dotação.

4. **Imposto progressivo.** Um agente enfrenta alíquotas $t_0 < t_1$ com limite de faixa Y_1. (a) Desenhe o conjunto orçamentário (l, c) e identifique a renda virtual da segunda faixa. (b) Mostre que uma redução de t_0 (faixa inferior à do agente) gera *só* efeito-renda sobre sua oferta de trabalho, e preveja o sinal. (c) Por que muitos contribuintes se acumulam exatamente na quebra Y_1 (*bunching*)?

5. **Segunda lei da demanda.** Prove, a partir da identidade $\hat{\chi}_k(p_{-j}, \bar{u}, \chi_j(p, \bar{u})) = \chi_k(p, \bar{u})$, a fórmula da demanda condicional e conclua $|\partial_k \hat{\chi}_k| \leq |\partial_k \chi_k|$. Compare, termo a termo, com o resultado de Le Chatelier da firma (Capítulo 5) — o que faz o papel de $\partial^2_{yy} c$?

6. **Frisch.** Para $u = \sum_i \beta_i \ln x_i$: (a) calcule as demandas marshalliana, hicksiana e Frisch do bem i e ordene as três elasticidades-preço próprias; (b) verifique a simetria de $\partial_p x^f$; (c) explique por que a elasticidade-Frisch é a relevante para um choque de preço *de um mês* para um consumidor com poupança.

7. **Separabilidade.** Suponha $u = \hat{u}(v_A(x_A), v_B(x_B))$ com v_A, v_B homotéticas. (a) Construa os índices $e_A(p_A)$, $e_B(p_B)$ e resolva o problema em dois estágios para $\hat{u}$ Cobb-Douglas. (b) Verifique a restrição $\partial_j \chi^i = \partial_{y_A} \hat{x}_i \, \partial_{y_B} \hat{x}_j \, \kappa_{AB}$ para um par de bens. (c) Que padrão de substituição entre um bem de A e os bens de B essa estrutura *proíbe*?

10 Gabaritos das Listas de Exercícios

Este capítulo reúne as **soluções comentadas** das duas listas de exercícios da disciplina (monitor: Eudes Augusto Barros Torres). O objetivo não é só "dar a resposta", mas mostrar *como* cada resultado se encaixa na teoria dos Capítulos 1 (*A Escolha Individual*) e 2 (*O Problema do Consumidor*): toda a Lista 1 é **otimização do consumidor** (montar o problema, aplicar a tangência $\text{TMgS} = p_1/p_2$, ler a demanda marshalliana); a Lista 2 explora a **dualidade** — Stone-Geary, hicksiana, dispêndio, Shephard, Slutsky, utilidade indireta e Roy. Recomenda-se tentar cada questão com lápis na mão *antes* de ler a solução.

10.1 Lista 1 — Restrição, preferências e demanda

10.1.1 Questão 1 — A reta orçamentária

Com dois bens, a fronteira do conjunto orçamentário $\mathbb{B} = \{x \in \mathbb{R}^n_+ : p_1x_1 + p_2x_2 \leq y\}$ é a reta

$$x_2 = \frac{y}{p_2} - \frac{p_1}{p_2}\,x_1,$$

de **inclinação** $-p_1/p_2$ (o preço relativo) e **interceptos** y/p_1 (eixo x_1) e y/p_2 (eixo x_2).

- **(a)** $p_1 = p_2 = 10,\ y = 30$: interceptos $(3,0)$ e $(0,3)$, inclinação -1.
- **(b)** $p_1 = p_2 = 10,\ y = 60$: interceptos $(6,0)$ e $(0,6)$, inclinação -1.
- **(c)** $p_1 = 30,\ p_2 = 10,\ y = 30$: interceptos $(1,0)$ e $(0,3)$, inclinação -3.

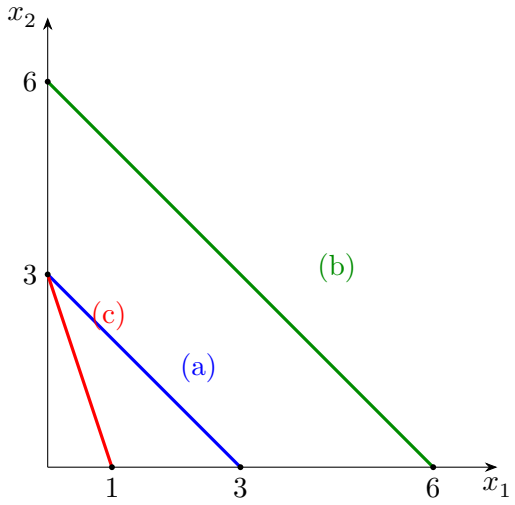

Figura 16: As três retas orçamentárias. De (a) para (b), só a renda dobra: deslocamento *paralelo* para fora. De (a) para (c), só p_1 triplica: a reta *gira* em torno do intercepto $x_2 = y/p_2$ (que não muda), ficando mais íngreme.

(d) Comparação. Uma variação da **renda** y altera apenas os interceptos, mantendo a inclinação $-p_1/p_2$: a reta se desloca **paralelamente** — para fora se y sobe (caso a→b), para dentro se cai. É o efeito de "abrir/fechar" o conjunto de escolhas sem mexer no *trade-off* entre os bens. Já uma variação nos **preços relativos** muda a inclinação: em (c), como só p_1 subiu, a reta **gira** em torno

do intercepto do eixo x_2 (o bem cujo preço não mudou, $y/p_2 = 3$, é fixo) e fica mais inclinada. Note que (a) e (c) partilham o mesmo intercepto vertical — é a assinatura de uma mudança de preço relativo, distinta do deslocamento paralelo da renda. *(Estes são exatamente os movimentos que dão a homogeneidade de grau zero da demanda: escalar p e y juntos leva à mesma reta.)*

10.1.2 Questão 2 — Por que curvas de indiferença não se cruzam

Suponha, por absurdo, que duas curvas de indiferença **distintas** I e I' se interceptem num ponto A. Escolha $B \in I$ e $C \in I'$ de modo que B tenha **estritamente mais de todos os bens** que C (i.e. $B \gg C$) — sempre é possível, pois as curvas são distintas e cada uma se estende. Então:

$$\underbrace{A \sim B}_{\text{mesma curva } I}, \qquad \underbrace{A \sim C}_{\text{mesma curva } I'} \overset{\text{transitividade}}{\Longrightarrow} B \sim C.$$

Mas, por **monotonicidade estrita** (mais é melhor), $B \gg C \Rightarrow B \succ C$. Chegamos a $B \sim C$ **e** $B \succ C$ ao mesmo tempo — contradição. Logo, curvas de indiferença **não podem se cruzar**.

> **i** Ferramenta matemática — os axiomas em ação
>
> A inconsistência é lógica, não geométrica: ela usa exatamente **transitividade** (Axioma 2) para concluir $B \sim C$ e **monotonicidade** (Axioma 4′) para concluir $B \succ C$. Sem transitividade, o cruzamento não geraria contradição — e "a melhor cesta" poderia nem existir. Ver Cap. 1, *Os dois axiomas de racionalidade*.

10.1.3 Questão 3 — Racionalidade e a condição de tangência

(a) "O maior e mais rápido". A regra ordena jogadores por **dominância vetorial**: $A \succeq B$ se, e só se, A é *ao mesmo tempo* maior e mais rápido que B. Essa relação é **transitiva** (se A domina B e B domina C, então A domina C), mas **não é completa**: se A é maior porém mais lento que B, os dois são **incomparáveis** — a regra é silenciosa. Como racionalidade exige completeza *e* transitividade, a preferência do técnico **não é racional**: falha na completeza. (É uma ordem parcial estrita — o tipo de "preferência" que reaparece no critério de Pareto no Cap. 4.)

(b) Enquanto $\text{TMgS} \neq p_1/p_2$**, dá para melhorar.** A afirmação é **verdadeira**. Considere uma realocação que respeita o orçamento: gaste dx_1 a mais do bem 1 e financie-o cortando o bem 2 exatamente na proporção que mantém o gasto constante,

$$p_1\,dx_1 + p_2\,dx_2 = 0 \implies dx_2 = -\frac{p_1}{p_2}\,dx_1.$$

A variação de utilidade dessa troca (bens diferenciáveis) é

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1}\,dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}\,dx_2 = \frac{\partial u}{\partial x_2}\left(\frac{\partial u/\partial x_1}{\partial u/\partial x_2} - \frac{p_1}{p_2}\right)dx_1 = \frac{\partial u}{\partial x_2}\left(\text{TMgS}_{12} - \frac{p_1}{p_2}\right)dx_1.$$

Como $\partial u/\partial x_2 > 0$, o **sinal de** du é o de $(\text{TMgS}_{12} - p_1/p_2)\,dx_1$. Logo:

- se $\text{TMgS}_{12} > p_1/p_2$, escolha $dx_1 > 0$ (mais do bem 1) e $du > 0$;
- se $\text{TMgS}_{12} < p_1/p_2$, escolha $dx_1 < 0$ (menos do bem 1) e ainda $du > 0$.

Em qualquer dos casos, **enquanto** $\mathrm{TMgS}_{12} \neq p_1/p_2$ **existe uma troca factível que eleva a utilidade** — o consumidor ainda não está no ótimo. A melhora só se esgota quando $\boxed{\mathrm{TMgS}_{12} = p_1/p_2}$, a **tangência** entre curva de indiferença e reta orçamentária (Cap. 2, *condições de Kuhn-Tucker*). ■

10.1.4 Questão 4 — Complementares perfeitos (Leontief)

Com $u(x_1, x_2) = \min\{\alpha x_1, \beta x_2\}$, a utilidade só cresce se **ambos** os termos crescem: gastar num bem além do ponto em que $\alpha x_1 = \beta x_2$ é desperdício, pois o min não sobe. Logo, no ótimo, os bens são consumidos em **proporção fixa**:

$$\alpha x_1 = \beta x_2 \iff x_2 = \frac{\alpha}{\beta}\, x_1.$$

(Não há tangência aqui — o *kink* do min torna a função não-diferenciável; usamos a estrutura de complementaridade.) Substituindo na restrição, que a monotonicidade fraca deixa **ativa** ($p_1 x_1 + p_2 x_2 = y$):

$$p_1 x_1 + p_2 \frac{\alpha}{\beta}\, x_1 = y \implies x_1 \left(\frac{\beta p_1 + \alpha p_2}{\beta} \right) = y.$$

Daí as **demandas marshallianas**:

$$\boxed{x_1(p, y) = \frac{\beta\, y}{\beta p_1 + \alpha p_2}, \qquad x_2(p, y) = \frac{\alpha\, y}{\beta p_1 + \alpha p_2}.}$$

São homogêneas de grau zero em (p, y) e exaurem a renda, como manda o Cap. 1. Não há efeito-substituição: uma alta em p_1 reduz *ambas* as demandas via puro efeito-renda.

10.1.5 Questão 5 — Cobb-Douglas

(a) Demanda marshalliana. Para $u = x_1^{\alpha} x_2^{\beta}$, as utilidades marginais dão

$$\mathrm{TMgS}_{12} = \frac{\partial u/\partial x_1}{\partial u/\partial x_2} = \frac{\alpha x_1^{\alpha-1} x_2^{\beta}}{\beta x_1^{\alpha} x_2^{\beta-1}} = \frac{\alpha}{\beta}\, \frac{x_2}{x_1}.$$

A tangência $\mathrm{TMgS}_{12} = p_1/p_2$ dá $\dfrac{\alpha}{\beta}\dfrac{x_2}{x_1} = \dfrac{p_1}{p_2}$, ou seja $p_2 x_2 = \dfrac{\beta}{\alpha}\, p_1 x_1$. Levando à restrição $p_1 x_1 + p_2 x_2 = y$:

$$p_1 x_1 \left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right) = y \implies p_1 x_1\, \frac{\alpha + \beta}{\alpha} = y.$$

Portanto

$$\boxed{x_1(p, y) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}\, \frac{y}{p_1}, \qquad x_2(p, y) = \frac{\beta}{\alpha + \beta}\, \frac{y}{p_2}.}$$

A Cobb-Douglas gasta **frações fixas** da renda em cada bem: $w_1 = p_1 x_1 / y = \alpha/(\alpha + \beta)$ e $w_2 = \beta/(\alpha + \beta)$. É a fórmula que a Lista 2 reutiliza.

(b) Preferências homotéticas. Uma preferência é **homotética** quando $x \sim y \Rightarrow \lambda x \sim \lambda y$ para todo $\lambda > 0$ — os raios que partem da origem cortam todas as curvas de indiferença com a mesma inclinação. A Cobb-Douglas é **homogênea de grau** $\alpha + \beta$:

$$u(\lambda x) = (\lambda x_1)^{\alpha}(\lambda x_2)^{\beta} = \lambda^{\alpha+\beta} x_1^{\alpha} x_2^{\beta} = \lambda^{\alpha+\beta} u(x).$$

Logo, se $u(x) = u(y)$ então $u(\lambda x) = \lambda^{\alpha+\beta} u(x) = \lambda^{\alpha+\beta} u(y) = u(\lambda y)$, isto é, $\lambda x \sim \lambda y$. Toda utilidade homogênea (a menos de transformação monótona) representa preferências homotéticas. Consequência operacional: a demanda é **linear na renda**, $x_i = (\text{fração})\, y/p_i$, então o **caminho de expansão** é um raio pela origem. ■

(c) TMgS **constante ao longo de um raio.** Sobre um raio $x_2 = t\, x_1$ com $t > 0$ fixo,

$$\text{TMgS}_{12} = \frac{\alpha}{\beta}\frac{x_2}{x_1} = \frac{\alpha}{\beta}\, t = \text{constante}.$$

A TMgS depende **só da razão** x_2/x_1, não da escala — que é a leitura infinitesimal exata da homoteticidade do item (b). ■

10.1.6 Questão 6 — Utilidade CES

Seja $u(x) = \left(x_1^{\rho} + x_2^{\rho}\right)^{1/\rho}$, $x \in \mathbb{R}^n_{++}$.

(a) Problema do consumidor. As utilidades marginais são $\partial_i u = \left(x_1^{\rho} + x_2^{\rho}\right)^{1/\rho - 1} x_i^{\rho-1}$, de modo que

$$\text{TMgS}_{12} = \frac{x_1^{\rho-1}}{x_2^{\rho-1}} = \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{\rho-1}.$$

A tangência $\text{TMgS}_{12} = p_1/p_2$ dá $\dfrac{x_1}{x_2} = \left(\dfrac{p_1}{p_2}\right)^{1/(\rho-1)}$, isto é $x_1 = x_2\,(p_1/p_2)^{1/(\rho-1)}$. Substituindo em $p_1 x_1 + p_2 x_2 = y$ e agrupando as potências de preço (usando $p_1 \cdot p_1^{1/(\rho-1)} = p_1^{\rho/(\rho-1)}$):

$$x_2\, p_2^{-1/(\rho-1)}\left(p_1^{\rho/(\rho-1)} + p_2^{\rho/(\rho-1)}\right) = y.$$

Daí a **demanda marshalliana da CES**:

$$\boxed{x_i(p,y) = \frac{p_i^{1/(\rho-1)}}{p_1^{\rho/(\rho-1)} + p_2^{\rho/(\rho-1)}}\, y, \qquad i = 1, 2.}$$

É exatamente a fórmula que a Lista 2 (Questão 3) toma como ponto de partida. Ela é homogênea de grau zero em (p, y) e exaure a renda.

(b) $\rho = 1$**: indiferença linear.** Com $\rho = 1$, $u(x) = x_1 + x_2$ (bens **substitutos perfeitos**). As curvas de indiferença são as retas $x_1 + x_2 = \bar{u}$, de inclinação **constante** -1. A $\text{TMgS}_{12} = (x_1/x_2)^0 = 1$ não varia, o que confirma a linearidade — e faz a solução ser tipicamente de **canto** (compra-se só o bem mais barato), não interior.

! Convexidade exige $\rho \leq 1$

A fórmula acima vem da condição de tangência, que só localiza o **máximo** quando as preferências são **convexas** — o que, para a CES, requer $\rho \leq 1$ (com $\rho \to 0$ recuperando a Cobb-Douglas e $\rho \to -\infty$ a Leontief). Para $\rho > 1$ (como o $\rho = \frac{3}{2}$ da Lista 2) o conjunto contorno superior é **não-convexo**, a tangência é um *mínimo* e o verdadeiro ótimo do consumidor é um **canto**. A Lista 2, no entanto, chama a expressão acima de "a demanda marshalliana" para explorar suas propriedades **algébricas** (homogeneidade, simetria de Slutsky), que valem para qualquer $\rho \neq 1$ — é nesse sentido restrito que a usamos lá.

10.1.7 Questão 7 — Transformação monótona

(a) Escolhas ótimas. Para $u(x_1, x_2) = \alpha \ln x_1 + \beta \ln x_2$,

$$\mathrm{TMgS}_{12} = \frac{\alpha/x_1}{\beta/x_2} = \frac{\alpha}{\beta}\,\frac{x_2}{x_1}.$$

A tangência é **idêntica** à da Questão 5, e a mesma álgebra leva a

$$\boxed{x_1(p,y) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\,\frac{y}{p_1}, \qquad x_2(p,y) = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\,\frac{y}{p_2}.}$$

(b) Comparação com a Questão 5. As demandas são **exatamente as mesmas**. A razão é que

$$\alpha \ln x_1 + \beta \ln x_2 = \ln(x_1^{\alpha} x_2^{\beta}) = \ln u_{\mathrm{CD}}(x),$$

ou seja, a utilidade log é uma **transformação monótona crescente** (ln) da Cobb-Douglas. Como a utilidade é **ordinal** (Cap. 1, *A utilidade é ordinal*), ambas representam **as mesmas preferências** e, portanto, geram a mesma TMgS, o mesmo ótimo e a mesma demanda. A escolha da representação é uma conveniência de cálculo — aqui o ln transforma o produto num soma e simplifica as derivadas. ■

10.2 Lista 2 — Dualidade, Slutsky e formas funcionais

10.2.1 Questão 1 — Utilidade Stone-Geary (o sistema de gasto linear)

Com $u(x) = \prod_{i=1}^{n} (x_i - a_i)^{b_i}$, $b_i \geq 0$, $\sum_i b_i = 1$, e $a_i \geq 0$ o nível de **subsistência** do bem i, maximizar u equivale a maximizar $\ln u = \sum_i b_i \ln(x_i - a_i)$ (transformação monótona). O Lagrangeano da restrição $\sum_i p_i x_i = y$ é

$$\mathcal{L} = \sum_i b_i \ln(x_i - a_i) + \lambda\Big(y - \sum_i p_i x_i\Big),$$

com condições de primeira ordem

$$\frac{b_i}{x_i - a_i} = \lambda\, p_i \implies p_i(x_i - a_i) = \frac{b_i}{\lambda}.$$

Somando em i e usando $\sum_i b_i = 1$:

$$\sum_i p_i(x_i - a_i) = \frac{1}{\lambda}\sum_i b_i = \frac{1}{\lambda}.$$

Mas o lado esquerdo é $\sum_i p_i x_i - \sum_i p_i a_i = y - p\cdot a$, logo $\lambda = \dfrac{1}{y - p\cdot a}$. Substituindo de volta em $p_i(x_i - a_i) = b_i/\lambda$:

$$\boxed{x_i(p,y) = a_i + \frac{b_i}{p_i}\Big(y - \textstyle\sum_j p_j a_j\Big).}$$

> **Interpretação — Linear Expenditure System (LES)**
>
> A demanda tem duas parcelas: o consumidor primeiro compra o **mínimo de subsistência** a_i de cada bem (gasto $p\cdot a$) e depois reparte a **renda supranumerária** $y - p\cdot a$ entre os bens em **frações fixas** b_i — pois $p_i(x_i - a_i) = b_i\,(y - p\cdot a)$. É o **sistema de gasto linear** (Stone-Geary), a espinha dorsal de muitas calibrações empíricas. Requer $y > p\cdot a$ (renda suficiente para a subsistência). Note que, com $a_i = 0$, ele colapsa na Cobb-Douglas da Lista 1.

10.2.2 Questão 2 — Demanda marshalliana, hicksiana e a função dispêndio

Seja $u(x_1,x_2) = 2x_1^{1/2} + 4x_2^{1/2}$, com $p_1, p_2 > 0$.

(a) Demanda marshalliana. As utilidades marginais são $\partial_1 u = x_1^{-1/2}$ e $\partial_2 u = 2x_2^{-1/2}$, logo

$$\mathrm{TMgS}_{12} = \frac{x_1^{-1/2}}{2x_2^{-1/2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{1/2}.$$

A tangência $\mathrm{TMgS}_{12} = p_1/p_2$ dá $\left(\dfrac{x_2}{x_1}\right)^{1/2} = \dfrac{2p_1}{p_2}$, ou seja $x_2 = \dfrac{4p_1^2}{p_2^2}\,x_1$. Levando à restrição $p_1x_1 + p_2x_2 = y$:

$$p_1x_1 + \frac{4p_1^2}{p_2}\,x_1 = y \implies p_1x_1\left(\frac{p_2 + 4p_1}{p_2}\right) = y.$$

Portanto

$$\boxed{x_1(p,y) = \frac{p_2\,y}{p_1\,(p_2 + 4p_1)}, \qquad x_2(p,y) = \frac{4p_1\,y}{p_2\,(p_2 + 4p_1)}.}$$

(b) Demanda hicksiana. O problema dual minimiza $p\cdot x$ sujeito a $u(x) \geq u$; a tangência é a **mesma** ($x_2 = 4(p_1/p_2)^2 x_1$, donde $x_2^{1/2} = 2(p_1/p_2)x_1^{1/2}$), mas agora a *restrição ativa* é o nível de utilidade $2x_1^{1/2} + 4x_2^{1/2} = u$. Substituindo:

$$u = 2x_1^{1/2} + 8\frac{p_1}{p_2}x_1^{1/2} = 2x_1^{1/2}\,\frac{p_2 + 4p_1}{p_2} \implies x_1^{1/2} = \frac{u\,p_2}{2\,(p_2 + 4p_1)}.$$

Elevando ao quadrado e obtendo x_2^h a partir de $x_2^{1/2} = 2(p_1/p_2)x_1^{1/2}$:

$$\boxed{x_1^h(p,u) = \frac{u^2\,p_2^2}{4\,(p_2 + 4p_1)^2}, \qquad x_2^h(p,u) = \frac{u^2\,p_1^2}{(p_2 + 4p_1)^2}.}$$

(c) Função dispêndio e Lema de Shephard. Por definição $e(p,u) = p_1 x_1^h + p_2 x_2^h$:

$$e(p,u) = \frac{u^2}{(p_2+4p_1)^2}\left[\frac{p_1 p_2^2}{4} + p_2 p_1^2\right] = \frac{u^2\, p_1 p_2}{(p_2+4p_1)^2}\cdot\frac{p_2+4p_1}{4} = \boxed{\frac{u^2\, p_1 p_2}{4\,(p_2+4p_1)}.}$$

Verificamos o **Lema de Shephard**, $\partial_i e(p,u) = x_i^h(p,u)$. Derivando em p_1 (usando $\partial_{p_1}[p_1/(p_2+4p_1)] = p_2/(p_2+4p_1)^2$):

$$\frac{\partial e}{\partial p_1} = \frac{u^2}{4}\, p_2 \cdot \frac{p_2}{(p_2+4p_1)^2} = \frac{u^2 p_2^2}{4(p_2+4p_1)^2} = x_1^h(p,u).\ \checkmark$$

E em p_2 (com $\partial_{p_2}[p_2/(p_2+4p_1)] = 4p_1/(p_2+4p_1)^2$):

$$\frac{\partial e}{\partial p_2} = \frac{u^2}{4}\, p_1 \cdot \frac{4p_1}{(p_2+4p_1)^2} = \frac{u^2 p_1^2}{(p_2+4p_1)^2} = x_2^h(p,u).\ \checkmark$$

As duas derivadas devolvem exatamente as hicksianas do item (b), confirmando o lema (Cap. 2, *Lema de Shephard*). ■

> **i** Ferramenta matemática — por que Shephard funciona
>
> O Lema de Shephard é o **teorema do envelope** aplicado à função-valor do EMP: como $e(p,u) = \min_x\{p\cdot x : u(x)\geq u\}$, derivar em p_i pega só a aparição **direta** do preço no objetivo, $\partial_{p_i}(p\cdot x) = x_i$, avaliada no ótimo x^h. É a versão dual e mais limpa da identidade de Roy. Ver Cap. 2 e o capítulo *Otimização* das Notas de Matemática.

10.2.3 Questão 3 — CES: homogeneidade e simetria de Slutsky ($\rho = \frac{3}{2}$)

Da Lista 1 (Questão 6), a demanda marshalliana da CES é $x_i = p_i^{1/(\rho-1)} y/(p_1^{\rho/(\rho-1)} + p_2^{\rho/(\rho-1)})$. Com $\rho = \frac{3}{2}$ temos $1/(\rho-1) = 2$ e $\rho/(\rho-1) = 3$, logo, escrevendo $D \equiv p_1^3 + p_2^3$:

$$x_1(p,y) = \frac{p_1^2\, y}{p_1^3+p_2^3} = \frac{p_1^2 y}{D}, \qquad x_2(p,y) = \frac{p_2^2\, y}{D}.$$

(a) Homogeneidade de grau zero. Escalando $(p,y)\mapsto(tp,ty)$, $t>0$:

$$x_1(tp,ty) = \frac{(tp_1)^2\,(ty)}{(tp_1)^3+(tp_2)^3} = \frac{t^3\, p_1^2 y}{t^3\,(p_1^3+p_2^3)} = \frac{p_1^2 y}{D} = x_1(p,y),$$

e igualmente para x_2. As potências de t se cancelam (t^3 em cima e embaixo): a demanda é **homogênea de grau zero**. Economicamente, multiplicar todos os preços e a renda pelo mesmo fator não muda o conjunto orçamentário — logo, não muda a escolha (Cap. 1). ■

(b) Simetria da matriz de Slutsky. O elemento (i,j) da matriz de Slutsky é

$$s_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial p_j} + \frac{\partial x_i}{\partial y}\, x_j.$$

Precisamos de $s_{12} = s_{21}$. As derivadas relevantes (com $\partial_{p_j} D = 3p_j^2$):

$$\frac{\partial x_1}{\partial y} = \frac{p_1^2}{D}, \quad \frac{\partial x_2}{\partial y} = \frac{p_2^2}{D}, \quad \frac{\partial x_1}{\partial p_2} = p_1^2 y \cdot \frac{-3p_2^2}{D^2} = -\frac{3p_1^2 p_2^2\, y}{D^2}, \quad \frac{\partial x_2}{\partial p_1} = -\frac{3p_1^2 p_2^2\, y}{D^2}.$$

Então

$$s_{12} = -\frac{3p_1^2 p_2^2 y}{D^2} + \frac{p_1^2}{D} \cdot \frac{p_2^2 y}{D} = -\frac{3p_1^2 p_2^2 y}{D^2} + \frac{p_1^2 p_2^2 y}{D^2} = -\frac{2p_1^2 p_2^2\, y}{D^2},$$

$$s_{21} = -\frac{3p_1^2 p_2^2 y}{D^2} + \frac{p_2^2}{D} \cdot \frac{p_1^2 y}{D} = -\frac{2p_1^2 p_2^2\, y}{D^2}.$$

Logo $\boxed{s_{12} = s_{21}}$: a matriz de Slutsky é **simétrica**. ■

> **i** Por que a simetria não é coincidência
>
> A simetria de Slutsky **não** depende do valor $\rho = \frac{3}{2}$: é uma consequência da racionalidade. Pela equação de Slutsky, $s_{ij} = \partial_j x_i^h$ — o efeito-substituição —, que é a Hessiana da função dispêndio e; e Hessianas de funções C^2 são simétricas pelo **teorema de Young**, $\partial_{ij}^2 e = \partial_{ji}^2 e$. A conta acima é a verificação direta, num caso concreto, de um teorema geral (Cap. 2, *A equação de Slutsky*).

10.2.4 Questão 4 — Utilidade indireta da Cobb-Douglas e identidade de Roy

Da Lista 1, a demanda Cobb-Douglas é $x_1 = \dfrac{\alpha y}{(\alpha+\beta)p_1}$, $x_2 = \dfrac{\beta y}{(\alpha+\beta)p_2}$. A **utilidade indireta** é o valor de u na cesta ótima:

$$v(p,y) = x_1^\alpha x_2^\beta = \left(\frac{\alpha y}{(\alpha+\beta)p_1}\right)^\alpha \left(\frac{\beta y}{(\alpha+\beta)p_2}\right)^\beta = \underbrace{\frac{\alpha^\alpha \beta^\beta}{(\alpha+\beta)^{\alpha+\beta}}}_{\equiv K} \frac{y^{\alpha+\beta}}{p_1^\alpha p_2^\beta}.$$

Ou seja $\boxed{v(p,y) = K\,\dfrac{y^{\alpha+\beta}}{p_1^\alpha p_2^\beta}}$ com $K = \alpha^\alpha\beta^\beta/(\alpha+\beta)^{\alpha+\beta}$ constante.

(a) Homogeneidade de grau zero. Escalando $(p,y) \mapsto (tp, ty)$:

$$v(tp,ty) = K\,\frac{(ty)^{\alpha+\beta}}{(tp_1)^\alpha (tp_2)^\beta} = K\,\frac{t^{\alpha+\beta} y^{\alpha+\beta}}{t^{\alpha+\beta} p_1^\alpha p_2^\beta} = v(p,y). \checkmark$$

(b) Monotonicidade. Como $\alpha, \beta > 0$ e $K > 0$,

$$\frac{\partial v}{\partial y} = (\alpha+\beta)\,\frac{v}{y} > 0, \qquad \frac{\partial v}{\partial p_1} = -\alpha\,\frac{v}{p_1} < 0, \qquad \frac{\partial v}{\partial p_2} = -\beta\,\frac{v}{p_2} < 0.$$

Estritamente **crescente na renda** (mais orçamento, mais bem-estar) e **decrescente nos preços** (bens mais caros, menos bem-estar) — como toda utilidade indireta (Cap. 2, *Propriedades da utilidade indireta*). ✓

(c) Identidade de Roy. Recupera-se a demanda dividindo as derivadas acima:

$$-\frac{\partial v/\partial p_1}{\partial v/\partial y} = -\frac{-\alpha\, v/p_1}{(\alpha+\beta)\, v/y} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\,\frac{y}{p_1} = x_1(p,y),$$

e, do mesmo modo, $-\dfrac{\partial_{p_2} v}{\partial_y v} = \dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\dfrac{y}{p_2} = x_2(p,y)$. A **identidade de Roy** devolve exatamente a demanda marshalliana de partida — fechando a dualidade sem reotimizar. ■

> **i** Ferramenta matemática — Roy pelo envelope
>
> A identidade de Roy, $x_i = -\dfrac{\partial_{p_i} v}{\partial_y v}$, também é o teorema do envelope: $\partial_{p_i} v = -\lambda x_i$ e $\partial_y v = \lambda$, cujo quociente elimina o multiplicador λ. Aqui verificamos, na Cobb-Douglas, essa identidade geral. Ver Cap. 2, *Identidade de Roy*.

10.3 Verificação numérica em R

As contas simbólicas da Lista 2 podem ser conferidas por **diferenças numéricas** — se o código concorda com a fórmula fechada, a álgebra está certa. Usamos a função `jac` do preâmbulo.

Questão 2 — Lema de Shephard. As derivadas da função dispêndio devem devolver as hicksianas:

```
e  <- function(p, u) u^2*p[1]*p[2] / (4*(p[2] + 4*p[1]))                # dispêndio
xh <- function(p, u) c(u^2*p[2]^2 / (4*(p[2]+4*p[1])^2),                # hicksianas
                       u^2*p[1]^2 / (p[2]+4*p[1])^2)
p <- c(2, 3); u <- 5
rbind(shephard = as.numeric(jac(function(pp) e(pp, u), p)),
      hicksiana = xh(p, u))
```

```
              [,1]      [,2]
shephard  0.464876 0.8264463
hicksiana 0.464876 0.8264463
```

Questão 3 — simetria de Slutsky da CES ($\rho = \frac{3}{2}$).

```
Dd   <- function(p) p[1]^3 + p[2]^3
xces <- function(p, y) c(p[1]^2*y/Dd(p), p[2]^2*y/Dd(p))
p <- c(2, 3); y <- 10
Dp <- jac(function(pp) xces(pp, y), p)
Dy <- (xces(p, y+1e-4) - xces(p, y-1e-4)) / (2e-4)
x  <- xces(p, y); S <- Dp + outer(Dy, x)
S
```

```
           [,1]       [,2]
[1,]  0.8816327 -0.5877551
[2,] -0.5877551  0.3918367
```

```r
c(simetrica = isSymmetric(round(S, 7)),
  negativa_semidefinida = all(eigen(S)$values <= 1e-9))
```

```
             simetrica negativa_semidefinida
                  TRUE                 FALSE
```

A matriz sai **simétrica** — como pede o item (b) —, mas repare que ela **não** é negativa semidefinida (a diagonal é positiva). Isso não é erro: é a assinatura do alerta feito na Lista 1, Questão 6 — com $\rho = \frac{3}{2} > 1$ as preferências são **não-convexas**, e a "demanda" da CES não vem de uma genuína maximização de utilidade. A simetria é uma identidade algébrica; a negatividade semidefinida exigiria a convexidade que falta aqui.

11 Referências

Allais, Maurice. 1953. "Le Comportement de l'Homme Rationnel devant le Risque: Critique des Postulats et Axiomes de l'École Américaine". *Econometrica* 21 (4): 503–46.

Anscombe, Francis J., e Robert J. Aumann. 1963. "A Definition of Subjective Probability". *The Annals of Mathematical Statistics* 34 (1): 199–205.

Arrow, Kenneth J. 1965. *Aspects of the Theory of Risk-Bearing*. (Helsinki).

Arrow, Kenneth J., e Gerard Debreu. 1954. "Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy". *Econometrica* 22 (3): 265–90.

Coase, Ronald H. 1937. "The Nature of the Firm". *Economica* 4 (16): 386–405.

Debreu, Gerard. 1959. *Theory of Value: An Axiomatic Analysis of Economic Equilibrium*. Yale University Press.

Debreu, Gerard. 1974. "Excess Demand Functions". *Journal of Mathematical Economics* 1 (1): 15–21.

Hotelling, Harold. 1932. "Edgeworth's Taxation Paradox and the Nature of Demand and Supply Functions". *Journal of Political Economy* 40 (5): 577–616.

Jehle, Geoffrey A., e Philip J. Reny. 2011. *Advanced Microeconomic Theory*. 3º ed. Pearson / Addison-Wesley.

Mantel, Rolf R. 1974. "On the Characterization of Aggregate Excess Demand". *Journal of Economic Theory* 7 (3): 348–53.

Marshall, Alfred. 1920. *Principles of Economics*. 8º ed. Macmillan.

Mas-Colell, Andreu, Michael D. Whinston, e Jerry R. Green. 1995. *Microeconomic Theory*. Oxford University Press.

McKenzie, Lionel W. 1954. "On Equilibrium in Graham's Model of World Trade and Other Competitive Systems". *Econometrica* 22 (2): 147–61.

Neumann, John von, e Oskar Morgenstern. 1944. *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton University Press.

Pratt, John W. 1964. "Risk Aversion in the Small and in the Large". *Econometrica* 32 (1/2): 122–36.

Rabin, Matthew. 2000. "Risk Aversion and Expected-Utility Theory: A Calibration Theorem". *Econometrica* 68 (5): 1281–92.

Roy, René. 1947. "La Distribution du Revenu Entre les Divers Biens". *Econometrica* 15 (3): 205–25.

Samuelson, Paul A. 1938. "A Note on the Pure Theory of Consumer's Behaviour". *Economica* 5 (17): 61–71.

Savage, Leonard J. 1954. *The Foundations of Statistics*. John Wiley & Sons.

Slutsky, Eugen. 1915. "Sulla Teoria del Bilancio del Consumatore". *Giornale degli Economisti* 51: 1–26.

Sonnenschein, Hugo. 1973. "Do Walras' Identity and Continuity Characterize the Class of Community Excess Demand Functions?" *Journal of Economic Theory* 6 (4): 345–54.

Starr, Ross M. 2009. *General Equilibrium Theory: An Introduction*. 2º ed. Cambridge University Press.

Varian, Hal R. 2015. *Microeconomia: Princípios Básicos*. 9º ed. Elsevier.

Walras, Léon. 1874. *Éléments d'économie politique pure*. L. Corbaz.