

Notas de Aula de Matemática para o Mestrado e Doutorado em Economia

EPGE/FGV — Professora Silvia Matos

Vitor Wilher¹

¹Bacharel e Mestre em Economia pela UFF, Candidato ao PhD em Economia pela EPGE/FGV. É Especialista em Ciências de Dados e Inteligência Artificial Generativa pela PUC-Rio. Atualmente, exerce a função de Data Tech Lead na Análise Macro (<http://analisemacro.com.br>). Saiba mais em <https://github.com/vitorwilher>.

Índice

1	Introdução	15
1.1	O que vamos estudar	15
1.2	Como usar estas notas	15
2	Nivelamento: Conjuntos e Funções	16
2.1	Motivação Econômica	16
2.2	Conjuntos	16
2.2.1	Definições Básicas	16
2.2.2	Exercícios Resolvidos	17
2.3	Funções Lineares	19
2.3.1	Revisão	19
2.3.2	Exercícios Resolvidos	19
2.4	Funções Quadráticas	20
2.4.1	Revisão	20
2.4.2	Exercícios Resolvidos	21
2.5	Funções Exponenciais e Logarítmicas	22
2.5.1	Revisão	22
2.5.2	Exercícios Resolvidos	23
2.6	Operações com Funções	24
2.6.1	Revisão	24
2.6.2	Exercícios Resolvidos	25
3	Limites e Continuidade	28
3.1	Motivação Econômica	28
3.2	Limite Lateral	28
3.3	Definição de Limite	29
3.4	Limites Infinitos e no Infinito	29
3.4.1	Limite Infinito	29
3.4.2	Limite no Infinito	30
3.5	Continuidade	30
3.5.1	Tipos de Descontinuidade	31
3.5.2	Propriedades da Continuidade	31
3.5.3	Continuidade e Diferenciabilidade	31
4	Derivadas	32
4.1	Motivação Econômica	32
4.2	Definição Formal	33
4.2.1	Taxa de Variação Média	33
4.2.2	Derivada	33
4.2.3	Notação	33
4.2.4	Exemplo: $f(x) = x^2$	33
4.3	Interpretação Econômica	33
4.3.1	Exemplo: Custo Marginal	34
4.4	Regras de Derivação	34
4.4.1	Derivadas Elementares	34
4.4.2	Regras Algébricas	35
4.4.3	Exemplos	36
4.4.4	Derivadas pela Definição de Limite	36
4.5	Regra da Cadeia	39
4.5.1	Definição	39
4.5.2	Prova	39
4.5.3	Intuição Geométrica	40

4.5.4	Exemplos	40
4.5.5	Aplicação Econômica: Elasticidade	42
4.6	Derivada Segunda e Concavidade	42
4.6.1	Definição	42
4.6.2	Concavidade	42
4.6.3	Exemplo: $f(x) = x^3 - 3x^2$	43
4.7	Gráficos de Funções	43
4.7.1	Critérios de Análise	43
4.7.2	Exemplo Completo: $f(x) = x^3 - 3x^2$	44
4.7.3	Condições Necessárias vs. Suficientes	44
4.7.4	Funções Definidas por Partes	45
4.7.5	Exemplos Adicionais de Análise Completa	46
5	Monitoria 1	48
5.1	Revisão de Funções	48
5.1.1	Tipos de Funções	48
5.2	Revisão de Derivadas	49
5.2.1	Conceito	49
5.2.2	Regras de Derivação	50
5.3	Exercícios Resolvidos	50
5.3.1	Derivadas de Funções Polinomiais	50
5.3.2	Regra do Produto	50
5.3.3	Regra do Quociente	51
5.3.4	Regra da Cadeia	51
5.3.5	Aplicações: Estudo de Funções	52
5.3.6	Aplicação Econômica: Otimização de Lucro	52
6	Monitoria 2	54
6.1	Exercícios Resolvidos	54
6.1.1	Exercício 1 — Derivada pela Definição: $f(x) = \frac{7}{\sqrt{x-5}}$	54
6.1.2	Exercício 2 — Análise Completa: $f(x) = x(x-4)^3$ (Teste 1 — 2022)	55
7	Monitoria 3	56
7.1	Exercícios Resolvidos	56
7.1.1	Exercício 1 — Domínio e Derivada pela Definição: $f(x) = \frac{5}{(2x-3)^2} - \sqrt{2x-3}$	56
7.1.2	Exercício 2 — Produto com Cadeia Dupla: $g(x) = 3x\sqrt{x^2 - \sqrt{x^2 + x}}$	57
7.1.3	Exercício 3 — Análise Completa: $f(x) = (x-1)(x-4)(x-5)$ (Teste 1 — 2022)	58
8	Testes Anteriores - Teste 1	60
8.1	Teste 1 — 16 de março de 2024	60
8.1.1	Questão 1 (3 pontos)	60
8.1.2	Questão 2 (3 pontos)	61
8.1.3	Questão 3 (4 pontos)	62
8.2	Teste 1 — 29 de março de 2025	64
8.2.1	Questão 1 (3 pontos)	64
8.2.2	Questão 2 (3 pontos)	65
8.2.3	Questão 3 (4 pontos)	66
8.3	Teste 1 — 28 de março de 2026	68
8.3.1	Questão 1 (3 pontos)	68
8.3.2	Questão 2 (3 pontos)	69
8.3.3	Questão 3 (4 pontos)	70

9 Antiderivadas (Integral Indefinida)	72
9.1 Motivação Econômica	72
9.2 Definição	72
9.3 Regras de Antiderivação	73
9.3.1 Potências	73
9.3.2 Linearidade	73
9.3.3 Tabela Resumo	73
9.4 Exercícios Resolvidos	74
9.4.1 Exercício 4: $\int \frac{3}{x^5} dx$	74
9.4.2 Exercício 6: $\int 10\sqrt[3]{x^2} dx$	74
9.4.3 Exercício 28: $\int \frac{27x^3 - 1}{\sqrt[3]{x}} dx$	74
9.4.4 Exercício 27-extra: $\int \sqrt{x} \left(x + \frac{1}{x}\right) dx$	74
9.5 Método de Substituição	75
9.5.1 Motivação	75
9.5.2 Exemplo 1: $\int \sqrt{3x + 9} dx$	75
9.5.3 Exemplo 2: $\int \sqrt{1 - 9x} dx$	75
9.5.4 Exemplo 3: $\int x\sqrt{x + 2} dx$	75
10 Integral Definida	76
10.1 Motivação Econômica	76
10.2 Operador Somatório	77
10.2.1 Propriedades	77
10.3 Cálculo de Área: Motivação	78
10.3.1 Somas de Riemann	78
10.3.2 Exemplo: $f(x) = x^2$ em $[0, 3]$	78
10.4 Definição Formal da Integral Definida	79
10.4.1 Propriedades da Integral Definida	79
10.5 Teorema do Valor Médio para Integrais	80
10.6 Teoremas Fundamentais do Cálculo	80
10.6.1 Primeiro Teorema Fundamental	81
10.6.2 Segundo Teorema Fundamental (Regra de Barrow)	81
10.7 Exemplos com a Regra de Barrow	82
10.7.1 Exemplo 1: $\int_0^3 x^2 dx$	82
10.7.2 Exemplo 2: $\int_1^4 \sqrt{x} dx$	82
10.7.3 Exemplo 3: $\int_0^2 (3x^2 - 2x + 1) dx$	82
10.8 Integral Definida com Substituição	82
10.8.1 Exemplo: $\int_0^1 x e^{x^2} dx$	82
10.9 Exercícios Resolvidos	83
10.9.1 Exercício 1 — $\int_0^4 (x^3 - x^2 + 1) dx$	83
10.9.2 Exercício 2 — $\int_{-1}^3 \frac{dx}{(x + 2)^3}$	83

10.9.3	Exercício 3 — $\int_0^3 x\sqrt{1+x} dx$	84
11	Monitoria 4	85
11.1	Conexão entre Derivada e Integral	85
11.2	Teorema Fundamental do Cálculo	86
11.3	Regras de Integração	86
11.4	Exemplos	86
11.4.1	Exemplo 1: $\int_0^2 x^2 dx$	86
11.4.2	Exemplo 2: $\int_1^2 4x^3 dx$	86
11.4.3	Exemplo 3: $\int_1^2 (2x - x^2 - x^4) dx$	87
12	Monitoria 5	88
12.1	Revisão — Derivadas de $e^{f(x)}$ e $\ln f(x)$	88
12.2	Exercícios (Teste 2 — 2024)	88
12.2.1	Exercício 2a — $\int \frac{(\ln x)^2}{x} dx$	88
12.2.2	Exercício 2b — $\int \frac{\sqrt{3 + \frac{2}{x}}}{x^2} dx$	89
12.2.3	Exercício 3a — $\int_1^2 (x^2 - 1)^3 x dx$	89
12.2.4	Exercício 3b — $\int_1^{e+1} \frac{x+2}{x-1} dx$	90
13	Função Logaritmo Natural	91
13.1	Motivação Econômica	91
13.2	Definição via Integral	92
13.3	Propriedades do Logaritmo Natural	93
13.3.1	Prova de $\ln(ab) = \ln a + \ln b$	93
13.3.2	Prova de $\ln(a/b) = \ln a - \ln b$	93
13.3.3	Prova de $\ln a^r = r \ln a$ (para r inteiro)	93
13.4	Antiderivada de $1/x$	94
13.5	Exercícios — Derivadas com \ln	94
13.5.1	Exercício 1 — $f(x) = \ln(4 + 5x)$	94
13.5.2	Exercício 2 — $f(x) = x \ln x$	94
13.5.3	Exercício 3 — $f(x) = \frac{x}{\ln x}$	94
13.5.4	Exercício 4 — $f(x) = \sqrt[3]{\ln x^3}$	95
13.5.5	Exercício 5 — $f(x) = \sqrt{x+1} - \ln(1 + \sqrt{x+1})$	95
13.6	Exercícios — Integrais com \ln	95
13.6.1	Exercício 6 — $\int \frac{x^2}{x^3+1} dx$	95
13.6.2	Exercício 7 — $\int \frac{dx}{3-2x}$	96
13.6.3	Exercício 8 — $\int \frac{x dx}{2-x^2}$	96
13.6.4	Exercício 9 — $\int \frac{\ln x}{x} dx$	96

14 Função Inversa	97
14.1 Motivação Econômica	97
14.2 Definição	97
14.3 Condição de Existência	98
14.4 Gráfico de f^{-1}	98
14.5 Exemplos	98
14.5.1 Exemplo 1 — $f(x) = 7 - 2x$	98
14.5.2 Exemplo 2 — $f(x) = -\frac{2}{x-5}$	99
14.5.3 Exemplo 3 — $f(x) = 4x + 3$	99
14.5.4 Exemplo 4 — $f(x) = \frac{1}{x-1}, x \neq 1$	100
14.6 Teorema da Função Inversa	100
14.7 Exemplo Completo — $f(x) = \frac{1}{x+1}, x \neq -1$	101
14.7.1 a) Verificação de que f possui inversa	101
14.7.2 b) Cálculo de f^{-1}	101
14.7.3 c) Verificação das composições	102
14.7.4 d) Derivada de f^{-1} pelo Teorema da Função Inversa	102
14.7.5 e) Gráficos de f e f^{-1}	102
15 Funções Exponenciais	104
15.1 Motivação Econômica	104
15.2 Função Exponencial Natural e^x	104
15.2.1 Definição como Inversa do Logaritmo	104
15.2.2 Propriedades de e^x	105
15.2.3 Derivada e Antiderivada	105
15.2.4 Exemplos — Derivadas	106
15.2.5 Exemplo — Antiderivada	106
15.3 Segunda Definição de e	108
15.4 Diferenciação Logarítmica — $f(x) = x^x$	108
15.5 Funções Exponenciais em Outras Bases	109
15.5.1 Definição e Derivada	109
15.5.2 Propriedades de a^x	109
15.5.3 Exemplos	109
15.6 Logaritmo em Outras Bases e Mudança de Base	110
15.6.1 Definição	110
15.6.2 Derivada	110
16 Integração por Partes	111
16.1 Motivação Econômica	111
16.2 Derivação da Fórmula	112
16.3 Exemplos com Logaritmo	112
16.3.1 Exemplo 1 — $\int \ln x \, dx$	112
16.3.2 Exemplo 2 — $\int x \ln x \, dx$	113
16.3.3 Exemplo 3 — $\int x^n \ln x \, dx$ (fórmula geral)	113
16.3.4 Exemplo 4 — $\int (\ln x)^2 \, dx$	114
16.4 Exemplos com Exponencial	114
16.4.1 Exemplo 5 — $\int x e^x \, dx$	114
16.4.2 Exemplo 6 — $\int x^2 e^x \, dx$	115

16.4.3	Exemplo 7 — $\int xe^{-3x} dx$	115
17	Monitoria 6	116
17.1	Resumo das Regras	116
17.1.1	Derivadas	116
17.1.2	Integrais	116
17.2	Exercício 1 — Regra do Produto com Logaritmo e Raiz	117
17.2.1	$f(x) = \ln(\sqrt{x}) \cdot \sqrt{x+1}$	117
17.3	Exercício 2 — Regra do Quociente	117
17.3.1	$g(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x \ln x}$	117
17.4	Exercício 3 — Regra da Cadeia com Funções Aninhadas	118
17.4.1	$h(x) = \sqrt{1+x+\sqrt{x^2+1}}$	118
17.5	Exercício 4 — Logaritmo de Função Composta com Raiz	119
17.5.1	$f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - a^2})$, $ x > a > 0$	119
17.6	Exercício 5 — Aplicação do Teorema da Função Inversa	119
18	Monitoria 7	121
18.1	Resumo das Regras	121
18.1.1	Derivadas	121
18.1.2	Integrações	121
18.2	Regra D — Diferenciação Logarítmica (Potência Geral)	121
18.3	Exemplos — Potência Geral	122
18.3.1	Exemplo 1 — $f(x) = x^x$	122
18.3.2	Exemplo 2 — $g(x) = (\ln(2x+1))^{x-3}$	122
18.3.3	Exemplo 3 — $h(x) = \left(\frac{x^2-x}{3+x^2}\right)^{x^2}$	123
18.4	Derivação da Fórmula de Integração por Partes	123
18.5	Exemplos — Integração por Partes	124
18.5.1	Exemplo 4 — $\int xe^x dx$	124
18.5.2	Exemplo 5 — $\int \ln x dx$	124
19	Monitoria 9	125
19.1	Resumo das Regras de Derivação	125
19.2	Exercício 1 — Parte (a)	125
19.2.1	Estratégia: simplificar antes de derivar	126
19.3	Exercício 1 — Parte (b)	126
19.3.1	Termo 1: $x^2 3^x$	126
19.3.2	Termo 2: $\sqrt[3]{x^{e^x}} - \ln x^{e^x}$	127
19.3.3	Resposta final	127
19.4	Questão 02 — Exame 2025	127
19.4.1	Passo 1 — Diferenciação logarítmica do envelope f^x	128
19.4.2	Passo 2 — Derivada de f_1 pela regra do quociente e do produto	128
19.4.3	Passo 3 — Derivadas de cada bloco	128
19.4.4	Passo 4 — Montagem final	129
19.5	Verificação Numérica	129
20	Testes Anteriores — Teste 2	130
20.1	Teste 2 (2026) — 11 de abril de 2026	130
20.1.1	Questão 1 — Derivadas	130
20.1.2	Questão 2 — Integrais Indefinidas	132

20.1.3	Questão 3 — Integrais Definidas	133
20.2	Teste 2 (2025) — 7 de abril de 2025	134
20.2.1	Questão 1 — Derivadas	134
20.2.2	Questão 2 — Integrais	135
20.2.3	Questão 3 — Função Inversa de $f(x) = \frac{1}{x-1}$	136
21	Testes Anteriores — Teste 3	138
21.1	Teste 3 (2026) — 25 de abril de 2026	138
21.1.1	Questão 1 — Derivadas	138
21.1.2	Questão 2 — Integrais	140
21.2	Teste 3 (2025) — 14 de abril de 2025	142
21.2.1	Questão 1 — Derivadas	142
21.2.2	Questão 2 — Integrais	143
21.2.3	Questão 3 — EDOs	144
21.3	Teste 3 (2024) — 13 de abril de 2024	146
21.3.1	Questão 1 — Derivadas	146
21.3.2	Questão 2 — Integrais	148
22	Equações Diferenciais Ordinárias	149
22.1	Motivação Econômica	149
22.2	EDO de 1ª Ordem com Coeficiente Constante	150
22.2.1	Forma Geral	150
22.2.2	Solução Homogênea	150
22.2.3	Solução Particular	150
22.2.4	Solução Geral e Condição Inicial	151
22.2.5	Estabilidade	151
22.2.6	Diagrama de Fase	151
22.3	EDO de 1ª Ordem com Coeficiente Variável	151
22.3.1	Forma Geral	151
22.3.2	Método do Fator Integrante	152
22.3.3	Exemplos Resolvidos — Coeficiente Variável	152
22.4	EDO de 2ª Ordem com Coeficientes Constantes	154
22.4.1	Forma Geral	154
22.4.2	Solução Homogênea — Solução Tentativa	155
22.4.3	Caso 1: $\Delta > 0$ — Duas Raízes Reais Distintas	155
22.4.4	Caso 2: $\Delta = 0$ — Raiz Real Repetida	155
22.4.5	Funções Trigonômicas e Fórmula de Euler	156
22.4.6	Caso 3: $\Delta < 0$ — Raízes Complexas Conjugadas	157
22.4.7	Solução Particular — Caso Constante	158
22.4.8	Solução Geral e Condição Inicial	158
22.5	Solução Particular com Termo Variável	158
22.5.1	Regra de Escolha da Solução Tentativa	159
22.5.2	Exemplo — $f(t) = e^{rt}$	159
22.5.3	Exemplo — $f(t) = \sin(\omega t)$	160
22.6	Exemplos Resolvidos	160
22.6.1	Exemplo 1 — $\Delta > 0$	160
22.6.2	Exemplo 2 — $\Delta = 0$	161
22.6.3	Exemplo 3 — $\Delta < 0$	162
22.6.4	Exemplo 4 — $\Delta = 0$ com termo constante e condição em $t \neq 0$	163
22.7	Estabilidade das EDOs de 2ª Ordem	163
22.8	Sistemas de EDOs de 1ª Ordem	164
22.8.1	Forma Geral	164
22.8.2	Conexão com EDO de 2ª Ordem: Toda 2ª Ordem é um Sistema 2×1	164
22.8.3	Estabilidade via Traço e Determinante	165

22.8.4	Por que Importa: Sistemas Genuinamente Acoplados	165
22.8.5	Exemplo Numérico	165
23	Monitoria 10	167
23.1	Receita para EDO de 2ª Ordem com Coeficientes Constantes	167
23.2	Exercício — P1, 2025	167
23.2.1	Passo 1 — Solução homogênea	167
23.2.2	Passo 2 — Solução particular	168
23.2.3	Passo 3 — Solução geral	168
23.2.4	Passo 4 — Condições iniciais	168
23.2.5	Solução	168
23.2.6	Verificação	169
23.3	Visualização	169
24	Funções de Várias Variáveis Reais	171
24.1	Motivação Econômica	171
24.2	Introdução	171
24.2.1	Definição Formal	171
24.2.2	Conceitos Fundamentais	172
24.2.3	Exemplo Simples: Custo Total	172
24.3	A Função de Produção	172
24.3.1	Motivação	172
24.3.2	A Função Cobb-Douglas	173
24.3.3	Capital Fixo: f como Função de L	173
24.3.4	Retornos de Escala	174
24.4	Curvas de Nível	174
24.4.1	Definição	174
24.4.2	Interpretação Econômica: Isoquantas	175
24.4.3	Circunferências e a Equação Geral	175
24.4.4	Exemplos Gráficos	175
24.4.5	Translações e Reflexões	176
24.4.6	Outras Formas de Superfície	177
24.5	Exemplo: $f(x, y) = x^2 + y^2$	178
24.5.1	Domínio e Imagem	178
24.5.2	Curvas de Nível	178
24.5.3	Avaliação em Pontos	179
24.5.4	Gráfico	179
24.6	Exemplo: $f(x, y) = \frac{1}{x - y^2}$	180
24.6.1	Domínio	180
24.6.2	Imagem	181
24.6.3	Curvas de Nível	181
24.6.4	Gráfico	181
24.7	Exemplo: $f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$	182
24.7.1	Domínio e Imagem	182
24.7.2	Curvas de Nível	182
24.7.3	Gráfico	182
24.8	Derivadas Parciais	183
24.8.1	Definição	183
24.8.2	Notação	183
24.8.3	Interpretação Geométrica	184
24.8.4	Cálculo Prático	184
24.8.5	Exemplos	184
24.8.6	Interpretação Econômica	185

24.8.7	Ilustração Gráfica	185
24.9	Derivadas Parciais de Segunda Ordem	185
24.9.1	Definição e Notação	185
24.9.2	Teorema de Young	186
24.9.3	A Matriz Hessiana	187
24.9.4	Exemplos	187
24.9.5	Interpretação Econômica	189
24.9.6	Ilustração: Curvatura via f_{xx} e f_{yy}	189
24.10	Aproximação Linear de uma Função	189
24.10.1	Caso Univariado	189
24.10.2	Caso Multivariado	190
24.11	Funções Explícitas e Implícitas	190
24.11.1	Funções Explícitas	190
24.11.2	Funções Implícitas	191
24.11.3	Por que isso importa	191
24.12	O Teorema da Função Implícita	191
24.12.1	Caso de uma Equação e Duas Variáveis	191
24.12.2	Derivação	192
24.12.3	Exemplo: O Círculo Unitário	192
24.12.4	Aplicação Econômica: Taxa Marginal de Substituição (TMS)	193
24.12.5	Generalização: Várias Variáveis Exógenas	194
24.13	Sistemas de Funções Implícitas	195
24.13.1	Generalização: m Endógenas e n Exógenas	195
24.13.2	Solução via Cramer	196
24.13.3	Aplicação Econômica: Estática Comparativa do IS/LM	196
25	Álgebra Linear	200
25.1	Motivação Econômica	200
25.2	Introdução	200
25.3	Determinantes	201
25.3.1	Definição Informal	201
25.3.2	Contagem dos Termos	201
25.3.3	A Regra dos Sinais: Inversões	202
25.3.4	Definição Formal	202
25.3.5	Caso $n = 3$: Enumerando as Permutações	202
25.3.6	Regra de Sarrus ($n = 3$)	203
25.3.7	Exemplo Numérico	203
25.3.8	Propriedades	204
25.3.9	Síntese das Propriedades	206
25.3.10	Aplicação: Cálculo Eficiente via Escalonamento	206
25.3.11	Expansão de Laplace por Cofatores	207
25.3.12	Interpretação Geométrica (Adiantamento)	211
25.4	Sistemas Lineares e Regra de Cramer	211
25.4.1	Motivação	211
25.4.2	Forma Matricial	212
25.4.3	Classificação	212
25.4.4	Sistema Homogêneo	213
25.4.5	Regra de Cramer	214
25.4.6	Exemplo Numérico	214
25.4.7	Quando Usar Cramer?	216
25.4.8	Aplicação Econômica: Modelo de Insumo-Produto de Leontief	216
25.4.9	Aplicação Econômica: Equilíbrio IS-LM e Estática Comparativa	217
25.5	Operações com Matrizes	219
25.5.1	Tipos de Matriz	219

25.5.2	Soma e Multiplicação por Escalar	219
25.5.3	Produto de Matrizes	220
25.5.4	Transposta	221
25.5.5	Matriz Identidade	221
25.5.6	Traço	222
25.6	A Matriz Inversa	222
25.6.1	Definição	222
25.6.2	Critério de Existência	223
25.6.3	Fórmula via Matriz Adjunta	223
25.6.4	Demonstração da Fórmula	223
25.6.5	Exemplo Numérico	224
25.6.6	Propriedades da Inversa	225
25.6.7	Aplicação: Solução de Sistemas via Inversa	226
25.6.8	Aplicação Econômica: Inversa de Leontief Revisitada	226
25.7	Formas Lineares e Quadráticas	227
25.7.1	Forma Linear	227
25.7.2	Forma Quadrática	227
25.7.3	Gradiente da Forma Quadrática	228
25.7.4	Sinal da Forma Quadrática	228
25.8	Autovalores e Autovetores	229
25.8.1	Motivação	229
25.8.2	Definição	229
25.8.3	Equação Característica	229
25.8.4	Caso 2×2	230
25.8.5	Exemplo Resolvido	231
25.8.6	Aplicação Econômica: Estabilidade da EDO de 2ª Ordem	232
25.9	Aplicação: Sistemas de EDO Lineares e Estabilidade	233
25.9.1	Motivação	233
25.9.2	Sistema Linear de EDO de 1ª Ordem com Duas Variáveis	233
25.9.3	Da EDO de 2ª Ordem ao Sistema de 1ª Ordem	233
25.9.4	Estabilidade via Determinante e Traço	234
25.9.5	Diagrama de Fase	235
25.9.6	Aplicação Econômica: Versão Dinâmica do IS-LM	238
26	Otimização sem Restrição	239
26.1	Motivação Econômica	239
26.2	Otimização de Funções de Uma Variável	239
26.2.1	Teorema de Rolle	239
26.2.2	Teorema do Valor Médio (TVM)	240
26.2.3	Expansão de Taylor	241
26.2.4	Condições Necessárias	243
26.2.5	Condições Suficientes	243
26.2.6	Exemplo Computacional	244
26.3	Otimização de Funções de Várias Variáveis	245
26.3.1	Parametrização Direcional	245
26.3.2	Cálculo de $F'(0)$	246
26.3.3	Cálculo de $F''(0)$	246
26.3.4	Expansão de Taylor Multivariada	247
26.3.5	Condições de Primeira Ordem	247
26.3.6	Condições de Segunda Ordem	247
26.3.7	Exemplos: Formas Quadráticas Puras	249
26.3.8	Exemplo: Classificando Pontos Críticos	250

27 Otimização com Restrição de Igualdade	252
27.1 Motivação Econômica	252
27.2 Intuição via Substituição (TFI)	252
27.3 A Função Lagrangeana	253
27.4 Exemplo: Restrição Linear sobre Forma Quadrática	254
27.5 Condições de Segunda Ordem: o Hessiano Orlado	254
27.5.1 Forma Quadrática Restrita	257
27.5.2 O Determinante do Hessiano Orlado	257
27.5.3 Caso Geral	258
27.6 Teorema do Envelope	258
27.6.1 Enunciado	258
27.6.2 Intuição: Por que os Efeitos Indiretos Cancelam	258
27.6.3 Prova	259
27.6.4 Interpretação do Multiplicador como Preço-Sombra	259
27.6.5 Aplicações Canônicas	260
28 Aplicações Econômicas	266
28.1 Motivação	266
28.2 Parte I — Aplicações Sem Restrição	266
28.2.1 Firma Competitiva: Caso Univariado	266
28.2.2 O Monopolista	267
28.2.3 Monopolista com Discriminação de Preços	268
28.2.4 Maximização de Lucro com Dois Insumos	269
28.3 Parte II — Aplicações Com Restrição	272
28.3.1 Maximização de Utilidade do Consumidor	272
28.3.2 Minimização de Custo da Firma	276
29 Testes Anteriores — Teste 4	283
29.1 Teste 4 (2026) — 16 de maio de 2026	283
29.1.1 Questão 1 — EDOs de 2ª Ordem com Coeficientes Constantes	283
29.1.2 Questão 2 — Derivadas Parciais até Segunda Ordem de $f(x, y) = y^{x^2}$	285
29.1.3 Questão 3 — Curvas de Nível de $f(x, y) = \frac{x^2 - 3x}{y}$	286
29.2 Teste 4 (2025) — 28 de abril de 2025	287
29.2.1 Questão 1 — Derivadas Parciais até Segunda Ordem	287
29.2.2 Questão 2 — Curvas de Nível de $f(x, y) = y/x^2$	291
29.2.3 Questão 3 — Modelo IS-LM Não-Linear	293
29.3 Teste 4 (2024) — 20 de abril de 2024	295
29.3.1 Questão 1 — Equações Diferenciais	295
29.3.2 Questão 2 — Curvas de Nível	297
29.3.3 Questão 3 — Derivadas Parciais	299
29.4 Teste 4 (2023) — 11 de setembro de 2023	300
29.4.1 Questão 1 — Modelo IS-LM Não-Linear	300
29.4.2 Questão 2 — Extremos Locais	303
30 Testes Anteriores — Teste 5	305
30.1 Teste 5 (2026) — 29 de maio de 2026	305
30.1.1 Questão 1 — Modelo IS-LM Não-Linear	305
30.1.2 Questão 2 — Maximização de Lucro da Firma com Dois Insumos	308
31 Mapa da Matéria da Prova	310
32 Parte I — Simulado 1 (10,0 pontos)	311
32.1 Questão 1 (1,0 ponto)	311
32.2 Questão 2 (1,5 ponto)	311

32.3	Questão 3 (2,0 pontos)	311
32.4	Questão 4 (1,5 ponto) — Gráfico / Análise	311
32.5	Questão 5 (4,0 pontos) — Minimização de Custo da Firma	311
33	Parte II — Simulado 2 (10,0 pontos) — Teoria do Consumidor	313
33.1	Questão 1 (1,0 ponto)	313
33.2	Questão 2 (1,5 ponto)	313
33.3	Questão 3 (2,0 pontos)	313
33.4	Questão 4 (5,5 pontos) — O Consumidor por Inteiro	313
34	Parte III — Bateria por Tópico	314
34.1	Tópico A — Derivação	314
34.2	Tópico B — Antiderivada (Integração por Partes e Substituição)	314
34.3	Tópico C — EDO de 2ª Ordem	314
34.4	Tópico D — Análise de Função / Gráfico	314
34.5	Tópico E — Otimização sem Restrição (Máx. Lucro)	315
34.6	Tópico F — Otimização com Restrição (Min. Custo // Min. Despesa)	315
35	Parte IV — Gabarito	316
35.1	Regras de derivação e estratégia (referência)	316
35.2	Gabarito — Simulado 1	317
35.2.1	Questão 1 — Condições necessárias e suficientes (mínimo)	317
35.2.2	Questão 2 — Derivada	318
35.2.3	Questão 3a — $\int x^3 \ln(x^2 + 2) dx$	319
35.2.4	Questão 3b — $y'' + 6y' + 9y = 5$	320
35.2.5	Questão 4 — Análise de $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$	321
35.2.6	Questão 5 — Minimização de custo da firma	321
35.3	Gabarito — Simulado 2 (Teoria do Consumidor)	324
35.3.1	Questão 1 — Condições para máximo	324
35.3.2	Questão 2 — Derivada	324
35.3.3	Questão 3a — $\int x^2 \ln x dx$	325
35.3.4	Questão 3b — $y'' - 3y' + 2y = 4$	325
35.3.5	Questão 4 — O consumidor por inteiro	326
35.4	Gabarito — Bateria	329
35.4.1	Tópico A — Derivação	329
35.4.2	Tópico B — Integração por partes	330
35.4.3	Tópico C — EDO de 2ª ordem	333
35.4.4	Tópico D — Análise de função	334
35.4.5	Tópico E — Máx. lucro	334
35.4.6	Tópico F — Min. custo / Min. despesa	335
36	Parte V — Checklist de Véspera	338
37	Parte VI — Gabaritos de Provas Anteriores	339
37.1	Prova 2 — 5 de novembro de 2022	340
37.1.1	Questão 1 — Condições de otimalidade na minimização	340
37.1.2	Questão 2 — Maximização de utilidade	340
37.1.3	Questão 3 — Minimização de custo da firma	343
37.2	Avaliação Substitutiva — 18 de novembro de 2022	345
37.2.1	Questão 1 — Regra da cadeia	345
37.2.2	Questão 2 — Integral definida $\int_0^6 (2 + 5x)e^{x/3} dx$	345
37.2.3	Questão 3 — EDO $y'' + 5y' + 4y = 1$	346
37.2.4	Questão 4 — Análise de $f(x) = x^3 + 3x^2 + 2x$	346
37.2.5	Questão 5 — Minimização de despesa	347

37.3 Prova — 4 de maio de 2024	349
37.3.1 Questão 1 — Regra do produto	349
37.3.2 Questão 2 — Derivada	349
37.3.3 Questão 3 — Integral e EDO	350
37.3.4 Questão 4 — Maximização de utilidade	350
37.4 Prova Substitutiva — 25 de maio de 2024	352
37.4.1 Questão 1 — Regra do quociente	352
37.4.2 Questão 2 — EDO e integral	352
37.4.3 Questão 3 — Derivadas parciais de $f(x, y) = x^y + e^{x^2+y^2}$	353
37.4.4 Questão 4 — Minimização de custo	353
37.5 Prova — 10 de maio de 2025	355
37.5.1 Questão 1 — Condições necessárias de mínimo	355
37.5.2 Questão 2 — Derivada (diferenciação logarítmica)	355
37.5.3 Questão 3 — Integral e EDO	356
37.5.4 Questão 4 — Minimização de despesa	356
37.6 Prova — 11 de maio de 2025	358
37.6.1 Questão 1 — Condições necessárias e suficientes de máximo	358
37.6.2 Questão 2 — Derivada	358
37.6.3 Questão 3 — Integral e EDO	359
37.6.4 Questão 4 — Minimização de custo	359
38 Prova — Matemática (2026)	361
38.1 Prova (2026) — 30 de maio de 2026	361
38.1.1 Questão 1 (1,0 ponto) — Condições Necessárias para Máximo Relativo	361
38.1.2 Questão 2 (1,25 ponto) — Derivada por Diferenciação Logarítmica	361
38.1.3 Questão 3	363
38.1.4 Questão 4 — Teoria do Consumidor	364
39 Referências	369

1 Introdução

Economia é, em essência, o estudo de decisões — de consumidores, firmas, governos e mercados. Para entender essas decisões com precisão, precisamos de uma linguagem que permita formalizá-las, manipulá-las e extrair conclusões que não seriam visíveis a olho nu. Essa linguagem é a matemática.

O objetivo destas notas não é desenvolver matemática pela matemática. É o oposto: usar a matemática como instrumento para iluminar questões econômicas concretas. Por que o consumidor escolhe determinada cesta de bens? Como a firma decide quanto produzir? O que acontece com o emprego quando a taxa de juros sobe? Essas perguntas têm respostas precisas — e a matemática é o caminho para chegar a elas.

1.1 O que vamos estudar

O curso é organizado em torno de três grandes blocos:

Cálculo diferencial e integral. A derivada mede como uma variável reage a uma mudança marginal em outra — é a formalização da ideia de “custo marginal”, “receita marginal” e “propensão marginal a consumir”. A integral acumula essas variações ao longo do tempo ou de um intervalo — e aparece naturalmente em modelos de crescimento, excedentes e valor presente. Equações diferenciais ordinárias descrevem dinâmicas: como a inflação evolui, como o estoque de capital se acumula, como um mercado converge para o equilíbrio.

Funções de várias variáveis. O mundo econômico é multidimensional. A utilidade depende de vários bens; a produção depende de capital e trabalho; o lucro depende de preço, salário e custo do capital. Derivadas parciais, curvas de nível e o gradiente são as ferramentas que permitem navegar nesse espaço.

Otimização. A maior parte dos modelos econômicos é, no fundo, um problema de otimização: maximizar utilidade sujeito a uma restrição orçamentária; maximizar lucro dado um custo de produção; minimizar custo para uma dada meta de produção. As condições de primeira e segunda ordem, o método de Lagrange e as condições de Kuhn-Tucker são o vocabulário desse problema.

1.2 Como usar estas notas

Cada seção abre com uma motivação econômica antes de desenvolver os conceitos formais. A ideia é que o estudante saiba, desde o início, *para que serve* o que está aprendendo. Os exemplos são retirados de microeconomia, macroeconomia e finanças — não porque a matemática seja diferente em cada área, mas porque os problemas de cada área ajudam a dar concretude ao fundamental.

As referências principais são Chiang e Wainwright (2005) para métodos matemáticos aplicados à economia, Simon e Blume (1994) para otimização e álgebra linear com rigor, e Leithold (1994) para os fundamentos de cálculo. Ao longo do texto, indicamos onde cada referência aprofunda os tópicos tratados.

2 Nivelamento: Conjuntos e Funções

2.1 Motivação Econômica

Antes de derivar e integrar, precisamos de uma linguagem precisa para descrever os objetos com os quais a Economia trabalha. Essa linguagem é fornecida pela teoria de conjuntos e funções.

- **Conjuntos como conjuntos de escolha.** O conjunto orçamentário de um consumidor — todas as cestas (x_1, x_2) que ele pode comprar dado seu orçamento $p_1x_1 + p_2x_2 \leq m$ — é um subconjunto de \mathbb{R}_+^2 . A interseção de dois conjuntos orçamentários com preços distintos é o conjunto de cestas acessíveis em ambas as situações.
- **Funções como relações econômicas.** A função de demanda $q = D(p)$ associa a cada preço p uma quantidade demandada q . A função de produção $Q = F(K, L)$ associa a cada par (capital, trabalho) um nível de produto. A utilidade $U = u(x_1, x_2)$ associa a cada cesta um número real que representa a satisfação do consumidor.
- **Domínio e imagem como restrições.** O domínio de uma função de produção é \mathbb{R}_+^2 (insumos não negativos); sua imagem é $[0, +\infty)$ (produto não negativo). Reconhecer domínio e imagem corretamente evita erros como aplicar resultados de otimização fora do intervalo relevante.
- **Composição e elasticidade.** A elasticidade-preço da demanda usa composição de funções: $\varepsilon = \frac{d \ln D}{d \ln p}$, em que se compõem \ln e D .

2.2 Conjuntos

2.2.1 Definições Básicas

Um **conjunto** é uma coleção bem definida de objetos, chamados de **elementos**. Dado um conjunto universo X , as principais operações entre subconjuntos $A, B \subseteq X$ são:

Operação	Notação	Definição
União	$A \cup B$	$\{x \in X : x \in A \text{ ou } x \in B\}$
Interseção	$A \cap B$	$\{x \in X : x \in A \text{ e } x \in B\}$
Diferença	$A \setminus B$	$\{x \in X : x \in A \text{ e } x \notin B\}$
Complementar	A^c	$\{x \in X : x \notin A\}$

Propriedades úteis:

- **Comutatividade:** $A \cup B = B \cup A$ e $A \cap B = B \cap A$. A ordem dos conjuntos não altera o resultado da união ou da interseção.
- **Lei de De Morgan (complementar da união):** $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$. O complementar da união é a interseção dos complementares — “não está em A nem em B ”.
- **Lei de De Morgan (complementar da interseção):** $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$. O complementar da interseção é a união dos complementares — “não está em A , ou não está em B ”.

- **Distributividade:** $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$. A interseção distribui sobre a união, analogamente à multiplicação sobre a adição.

2.2.2 Exercícios Resolvidos

Exercício 1. Calcule $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$ e $(A \cup B)^c$.

(a) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{-1, 0, 2, 5\}$, $X = \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{-1, 0, 1, 2, 3, 5\} \\ A \cap B &= \{2\} \\ A \setminus B &= \{1, 3\} \\ B \setminus A &= \{-1, 0, 5\} \\ (A \cup B)^c &= \mathbb{Z} \setminus \{-1, 0, 1, 2, 3, 5\} \end{aligned}$$

(b) $A = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$ (ímpares), $B = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$ (pares), $X = \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} A \cup B &= \mathbb{N} \setminus \{0\} = \{1, 2, 3, \dots\} \\ A \cap B &= \emptyset \\ A \setminus B &= A, \quad B \setminus A = B \\ (A \cup B)^c &= \{0\} \end{aligned}$$

(c) $A = \mathbb{R}_- = (-\infty, 0)$, $B = [-1, 1]$, $X = \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} A \cup B &= (-\infty, 1] \\ A \cap B &= [-1, 0) \\ A \setminus B &= (-\infty, -1) \\ B \setminus A &= [0, 1] \\ (A \cup B)^c &= (1, +\infty) \end{aligned}$$

(d) $A = [-1, 1)$, $B = (1, 2]$, $X = \mathbb{R}$.

Os dois conjuntos não se tocam (A termina em 1 exclusive, B começa em 1 exclusive):

$$\begin{aligned}A \cup B &= [-1, 1) \cup (1, 2] \\A \cap B &= \emptyset \\A \setminus B &= [-1, 1), \quad B \setminus A = (1, 2] \\(A \cup B)^c &= (-\infty, -1) \cup \{1\} \cup (2, +\infty)\end{aligned}$$

(e) $A = (-7, -1)$, $B = (-2, 2)$, $X = \mathbb{R}$.

A interseção é $(-2, -1)$:

$$\begin{aligned}A \cup B &= (-7, 2) \\A \cap B &= (-2, -1) \\A \setminus B &= (-7, -2] \\B \setminus A &= [-1, 2) \\(A \cup B)^c &= (-\infty, -7] \cup [2, +\infty)\end{aligned}$$

(f) $A = [0, \log(1)]$, $B = (e^0, +\infty)$, $X = \mathbb{R}$.

Observando que $\log(1) = 0$ e $e^0 = 1$:

$$\begin{aligned}A &= [0, 0] = \{0\}, \quad B = (1, +\infty) \\A \cup B &= \{0\} \cup (1, +\infty) \\A \cap B &= \emptyset \\A \setminus B &= \{0\}, \quad B \setminus A = (1, +\infty) \\(A \cup B)^c &= (-\infty, 0) \cup (0, 1]\end{aligned}$$

2.3 Funções Lineares

2.3.1 Revisão

Uma **função linear** (ou afim) tem a forma $f(x) = ax + b$, onde a é a **inclinação** (coeficiente angular) e b é o **intercepto** (coeficiente linear). O gráfico é uma reta.

- $a > 0$: reta crescente; $a < 0$: reta decrescente; $a = 0$: reta horizontal.
- A reta passa por $(0, b)$ e tem inclinação $\Delta y / \Delta x = a$.
- Dados dois pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) : $a = (y_2 - y_1) / (x_2 - x_1)$.

2.3.2 Exercícios Resolvidos

Exercício 1. Esboce o gráfico das funções abaixo.

- (a) $f(x) = -2x + 1$: inclinação -2 , intercepto 1 .
- (b) $y - x + 5 = 0 \Rightarrow f(x) = x - 5$: inclinação 1 , intercepto -5 .
- (c) $f(x) = -\frac{x}{3} + 4$: inclinação $-1/3$, intercepto 4 .
- (d) $f(x) = ax + b$, com $f(-1) = 0$ e $f(2) = -1$:

$$\begin{cases} -a + b = 0 \\ 2a + b = -1 \end{cases} \Rightarrow b = a \text{ e } 3a = -1 \Rightarrow a = -\frac{1}{3}, b = -\frac{1}{3}.$$

$$\boxed{f(x) = -\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}}$$

- (e) $f(x) = ax + b$, gráfico passa por $(1, 0)$ e $f(2) = 1$:

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ 2a + b = 1 \end{cases} \Rightarrow a = 1, b = -1.$$

$$\boxed{f(x) = x - 1}$$

- (f) $f(x) = -2x + 4$ e $g(x) = x^2 - 1$. Dados $A = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > 0\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) < 0\}$, determine $A \cap B^c$.

$$f(x) > 0 \Rightarrow -2x + 4 > 0 \Rightarrow x < 2 \Rightarrow A = (-\infty, 2)$$

$$g(x) < 0 \Rightarrow x^2 - 1 < 0 \Rightarrow -1 < x < 1 \Rightarrow B = (-1, 1)$$

$$B^c = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$

$$A \cap B^c = (-\infty, 2) \cap ((-\infty, -1] \cup [1, +\infty)) = (-\infty, -1] \cup [1, 2)$$

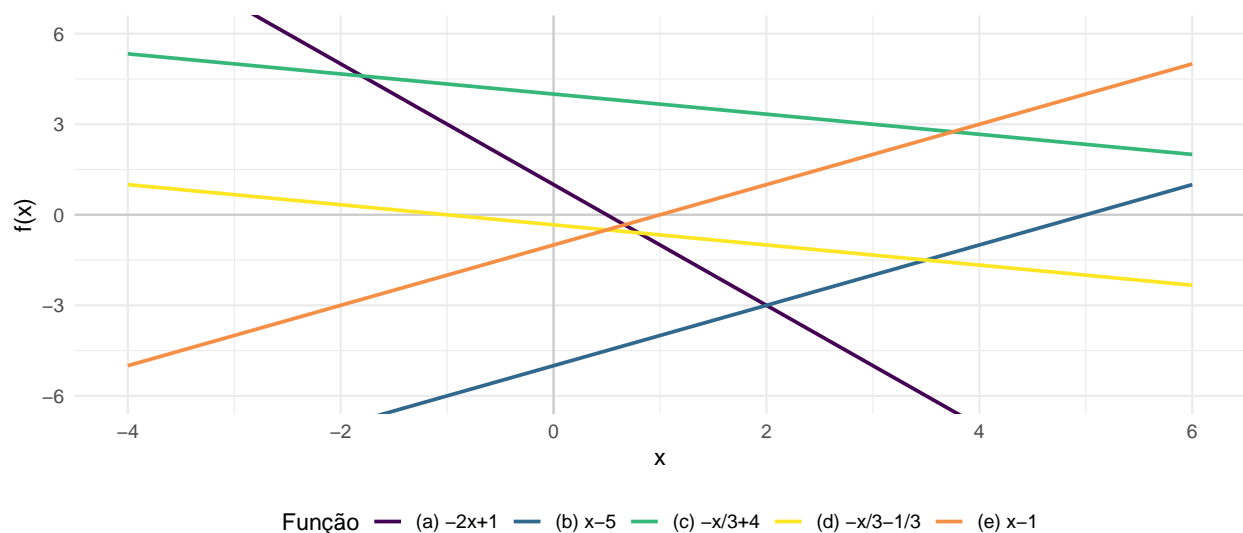


Figura 1: Funções lineares dos itens (a) a (e)

2.4 Funções Quadráticas

2.4.1 Revisão

Uma **função quadrática** tem a forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$. O gráfico é uma **parábola**. Os elementos essenciais para esboçá-la são:

- **Concavidade:** determinada pelo sinal de a .
 - $a > 0$: parábola côncava para cima, com **mínimo** no vértice.
 - $a < 0$: parábola côncava para baixo, com **máximo** no vértice.

- **Vértice:** ponto de mínimo ou máximo da parábola, dado por:

$$x_v = -\frac{b}{2a}, \quad y_v = f(x_v).$$

- **Discriminante e raízes:** o discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$ determina o número de raízes reais.
 - $\Delta > 0$: duas raízes reais distintas $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.
 - $\Delta = 0$: raiz real dupla $x_v = -b/(2a)$ (parábola tangente ao eixo x).
 - $\Delta < 0$: sem raízes reais (parábola não toca o eixo x).
- **Forma fatorada:** quando $\Delta \geq 0$, podemos escrever $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$, o que facilita a análise de sinal.

2.4.2 Exercícios Resolvidos

Exercício 1. Esboce o gráfico das funções:

(a) $f(x) = x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$

Raízes: $x = 2$ e $x = 3$. Vértice: $x_v = 5/2$, $f(5/2) = 25/4 - 25/2 + 6 = -1/4$. Côncava para cima.

(b) $g(x) = -x^2 + 9 = -(x - 3)(x + 3)$

Raízes: $x = \pm 3$. Vértice: $x_v = 0$, $g(0) = 9$. Côncava para baixo.

(c) $h(x) = x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$

Raiz dupla: $x = -3$. Vértice: $(-3, 0)$. Côncava para cima (tangente ao eixo x em $x = -3$).

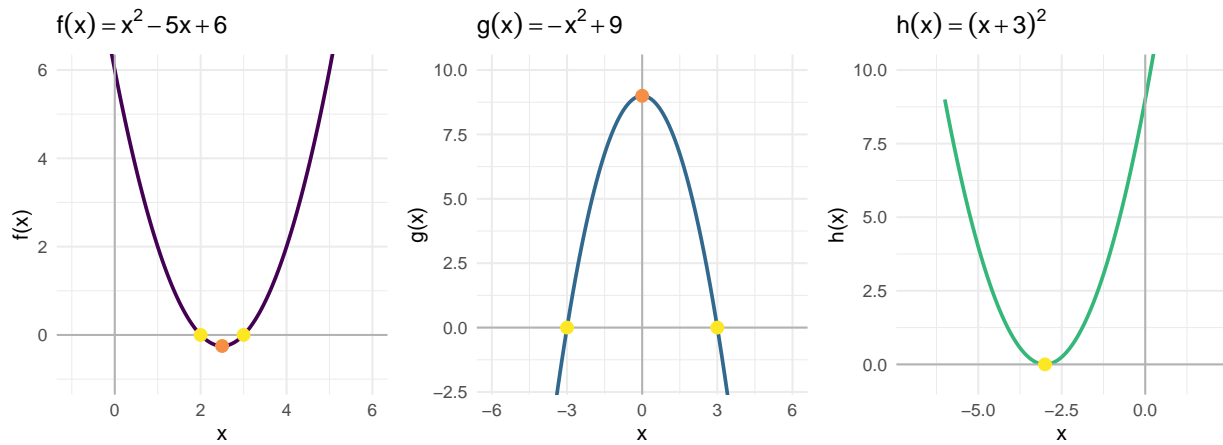


Figura 2: Funções quadráticas f , g e h

Exercício 2. Dados f , g e h acima, com $A = \left\{x : \frac{f(x)}{g(x)} > 0\right\}$, $B = \{x : f(x)h(x) < 0\}$ e $C = \{x : (x + 5)g(x) = 0\}$.

Determinando A:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{(x - 2)(x - 3)}{-(x - 3)(x + 3)} = -\frac{x - 2}{x + 3}, \quad x \neq 3, x \neq -3.$$

A fração $-\frac{x - 2}{x + 3} > 0 \Leftrightarrow \frac{x - 2}{x + 3} < 0$, o que ocorre quando $-3 < x < 2$:

$$A = (-3, 2)$$

Determinando B:

$$f(x)h(x) = (x-2)(x-3)(x+3)^2.$$

Como $(x+3)^2 \geq 0$, o sinal depende de $(x-2)(x-3)$:

- $(x-2)(x-3) < 0 \Leftrightarrow 2 < x < 3$ (e $x \neq -3$, mas $-3 \notin (2, 3)$).

$$B = (2, 3)$$

Determinando C:

$$(x+5)g(x) = (x+5) \cdot (-(x-3)(x+3)) = 0 \Rightarrow x \in \{-5, -3, 3\}.$$

$$C = \{-5, -3, 3\}$$

(a) $A \cup B = (-3, 2) \cup (2, 3)$

(b) $B \cap C$: $B = (2, 3)$ (aberto) e $C = \{-5, -3, 3\}$. O único candidato seria $x = 3$, mas $3 \notin (2, 3)$.

$$B \cap C = \emptyset$$

(c) Usando distributividade: $(A \cup C) \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$.

Como $A = (-3, 2)$ e $B = (2, 3)$ são disjuntos: $A \cap B = \emptyset$.

$$(A \cup C) \cap (B \cup C) = C = \{-5, -3, 3\}$$

$$((A \cup C) \cap (B \cup C))^c = \mathbb{R} \setminus \{-5, -3, 3\}$$

2.5 Funções Exponenciais e Logarítmicas

2.5.1 Revisão

Função	Domínio	Imagem	Comportamento
e^x	\mathbb{R}	$(0, +\infty)$	Crescente
$a^x, a > 1$	\mathbb{R}	$(0, +\infty)$	Crescente
$a^x, 0 < a < 1$	\mathbb{R}	$(0, +\infty)$	Decrescente
$\ln x$	$(0, +\infty)$	\mathbb{R}	Crescente
$\log_a x, a > 1$	$(0, +\infty)$	\mathbb{R}	Crescente

Propriedades do logaritmo: $\ln(ab) = \ln a + \ln b$, $\ln(a/b) = \ln a - \ln b$, $\ln(a^r) = r \ln a$, $\ln(e^x) = x$, $e^{\ln x} = x$.

2.5.2 Exercícios Resolvidos

Exercício 1. Determine domínio, imagem e esboce o gráfico.

(a) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1}$

Como $1/3 = 3^{-1}$: $f(x) = 3^{-(2x+1)}$, exponencial com base < 1 — decrescente.

- **Domínio:** \mathbb{R}
- **Imagem:** $(0, +\infty)$

(b) $g(x) = -e^{-x/2}$

- **Domínio:** \mathbb{R}
- **Imagem:** $(-\infty, 0)$ (negativa pois há o sinal $-$)

(c) $h(x) = \ln(x^2 - 4) - \ln(x + 2)$

Usando propriedades:

$$h(x) = \ln\left(\frac{x^2 - 4}{x + 2}\right) = \ln\left(\frac{(x - 2)(x + 2)}{x + 2}\right) = \ln(x - 2), \quad x \neq -2.$$

Para que $\ln(x^2 - 4)$ e $\ln(x + 2)$ estejam definidos: $-x^2 - 4 > 0$: $x < -2$ ou $x > 2$ - $x + 2 > 0$:
 $x > -2$

Interseção: $x > 2$.

- **Domínio:** $(2, +\infty)$
- **Imagem:** \mathbb{R} (pois $\ln(x - 2)$ assume todos os valores reais para $x > 2$)

(d) $k(x) = \left(\frac{1}{9}\right)^{-x/2} + \ln\left(\frac{1}{x(x^2 - 3)}\right) + \ln(e^{x^3} - 3e^x)$

Analisando cada parcela:

- $\left(\frac{1}{9}\right)^{-x/2} = 9^{x/2}$: definido para todo $x \in \mathbb{R}$.
- $\ln\left(\frac{1}{x(x^2 - 3)}\right) = -\ln(x(x^2 - 3))$: precisa $x(x^2 - 3) > 0$, i.e., $x(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) > 0$.

Raízes em $-\sqrt{3}$, 0 e $\sqrt{3}$. Análise de sinal:

$$x(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, +\infty).$$

- $\ln(e^{x^3} - 3e^x)$: precisa $e^{x^3} - 3e^x > 0 \Leftrightarrow e^{x^3} > 3e^x \Leftrightarrow x^3 - x > \ln 3$.

Definindo $\varphi(x) = x^3 - x - \ln 3$, numericamente $\ln 3 \approx 1.099$. A função φ tem raiz em $x^* \approx 1.37$.

O domínio de k é a interseção das três condições:

$$D_k = \{x \in (\sqrt{3}, +\infty) : x^3 - x > \ln 3\} = (\sqrt{3}, +\infty).$$

(Para $x > \sqrt{3} \approx 1.732$, temos $x^3 - x > 1.732^3 - 1.732 \approx 3.46 > \ln 3$.)

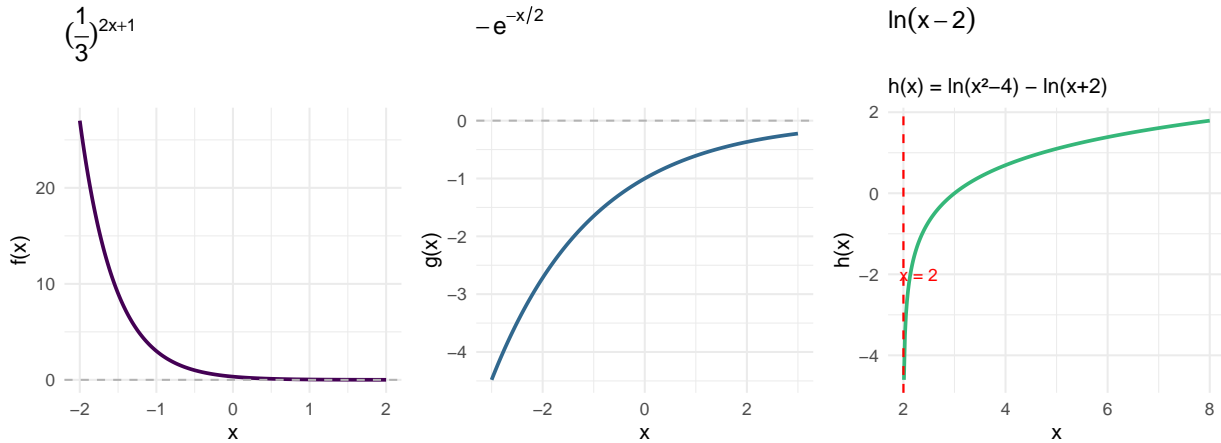


Figura 3: Funções exponenciais e logarítmicas dos itens (a), (b) e (c)

2.6 Operações com Funções

2.6.1 Revisão

Dadas $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : A \rightarrow \mathbb{R}$, as operações algébricas entre funções são:

- **Soma e diferença:** $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$. Definida em todo ponto onde ambas as funções estão definidas.
- **Produto:** $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$. Também definida no domínio comum de f e g .
- **Quociente:** $(f/g)(x) = f(x)/g(x)$, com a restrição $g(x) \neq 0$. O domínio exclui os zeros de g .
- **Composição:** $(f \circ g)(x) = f(g(x))$. Aplica-se g primeiro e depois f . A ordem importa: em geral $f \circ g \neq g \circ f$.

Classificação de funções. Uma função $f : A \rightarrow B$ é classificada quanto à relação entre domínio e imagem:

- **Injetora** (ou 1-1): cada elemento do contradomínio tem **no máximo** um pré-imagem. Formalmente: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$. Geometricamente: toda reta horizontal cruza o gráfico **no máximo uma vez**.

- **Sobrejetora** (ou onto): cada elemento do contradomínio tem **ao menos** um pré-imagem. Formalmente: $\forall y \in B, \exists x \in A$ tal que $f(x) = y$. Em outras palavras: a imagem de f coincide com B inteiro.
- **Bijetora**: injetora e sobrejetora simultaneamente. Cada elemento de B tem **exatamente** um pré-imagem em A . Funções bijetoras possuem inversa $f^{-1} : B \rightarrow A$.

2.6.2 Exercícios Resolvidos

Exercício 1. Encontre o domínio das funções.

(a) $f(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{x-3}$: precisa $x-2 \geq 0$ e $x-3 \neq 0$.

$$D = [2, 3) \cup (3, +\infty)$$

(b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+3x}}$: precisa $x^2+3x > 0$, i.e., $x(x+3) > 0$.

$$D = (-\infty, -3) \cup (0, +\infty)$$

(c) $f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x^2+5x}\right)$: precisa $\frac{x-1}{x(x+5)} > 0$.

Raízes do numerador e denominador: $x \in \{-5, 0, 1\}$. Tabela de sinais:

Intervalo	$x-1$	x	$x+5$	Quociente
$x < -5$	-	-	-	-
$-5 < x < 0$	-	-	+	+
$0 < x < 1$	-	+	+	-
$x > 1$	+	+	+	+

$$D = (-5, 0) \cup (1, +\infty)$$

(d) $f(x) = \ln(\ln(x^2-x-6))$: a função interna $\ln(x^2-x-6)$ precisa ser > 0 , logo $x^2-x-6 > 1$, i.e., $x^2-x-7 > 0$.

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{29}}{2} \Rightarrow D = \left(-\infty, \frac{1-\sqrt{29}}{2}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{29}}{2}, +\infty\right)$$

(e) $f(x) = \ln(1-\sqrt{x-1})$: precisa $x \geq 1$ (raiz definida) e $1-\sqrt{x-1} > 0$, i.e., $x < 2$.

$$D = [1, 2)$$

(f) $f(x) = \frac{\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{1-x}}$: precisa $x \leq 1$ (raiz definida) e $\sqrt{1-x} \neq 1$, i.e., $x \neq 0$.

$$D = (-\infty, 0) \cup (0, 1]$$

Exercício 2. Sejam $f(x) = 2x + 1$ e $g(x) = x^2$.

(a) $f(0) = 1; f(-1) = -1; g(1) = 1; g(2) = 4.$

(b)

$$f(x) + g(x) = x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$$

$$f(x) - g(x) = -x^2 + 2x + 1$$

$$f(x) \cdot g(x) = x^2(2x + 1) = 2x^3 + x^2$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2x + 1}{x^2}, \quad x \neq 0$$

(c)

$$f(g(x)) = f(x^2) = 2x^2 + 1$$

$$g(f(x)) = g(2x + 1) = (2x + 1)^2 = 4x^2 + 4x + 1$$

(d)

$$f(f(x)) = f(2x + 1) = 2(2x + 1) + 1 = 4x + 3$$

$$g(f(x) + 1) = g(2x + 2) = (2x + 2)^2 = 4x^2 + 8x + 4$$

$$g(\sqrt{f(x)}) = (\sqrt{2x + 1})^2 = 2x + 1, \quad x \geq -\frac{1}{2}$$

Exercício 3. Classifique $f(x) = 2x + 1$ e $g(x) = x^2$ quanto à injetividade, sobrejetividade e bijetividade.

(a) $A = \mathbb{R}_+, B = \mathbb{R}$:

- f : estritamente crescente em $\mathbb{R}_+ \rightarrow$ **injetora**. Imagem = $(1, +\infty) \subsetneq \mathbb{R} \rightarrow$ **não sobrejetora**. Não bijetora.
- g : estritamente crescente em $\mathbb{R}_+ \rightarrow$ **injetora**. Imagem = $(0, +\infty) \subsetneq \mathbb{R} \rightarrow$ **não sobrejetora**. Não bijetora.

(b) $A = B = \mathbb{R}_+$:

- f : injetora. Imagem = $(1, +\infty) \subsetneq \mathbb{R}_+ = (0, +\infty) \rightarrow$ **não sobrejetora**. Não bijetora.
- g : injetora. Imagem = $(0, +\infty) = B \rightarrow$ **sobrejetora**. Logo **bijetora**.

(c) $A = \mathbb{R}_-$, $B = \mathbb{R}_+$:

- f : estritamente crescente em $\mathbb{R}_- = (-\infty, 0) \rightarrow$ **injetora**. Imagem = $(-\infty, 1)$, mas $B = (0, +\infty)$. Como f mapeia \mathbb{R}_- em $(-\infty, 1)$, e apenas $(0, 1) \subset B$ está coberto, f **não é sobrejetora** sobre B . Não bijetora.
- g : $g(-x) = g(x)$ para todo $x \rightarrow$ **não injetora** em \mathbb{R}_- sozinha? Na verdade em $\mathbb{R}_- = (-\infty, 0)$, g é estritamente decrescente, logo **injetora**. Imagem = $(0, +\infty) = B \rightarrow$ **sobrejetora**. Logo **bijetora**.

3 Limites e Continuidade

3.1 Motivação Econômica

O conceito de limite é a fundação matemática de toda análise marginal em Economia. Intuitivamente, o custo marginal é o que acontece com o custo total quando produzimos uma unidade **infinitamente pequena** a mais — ou seja, é o limite da variação média quando o incremento de quantidade tende a zero:

$$CMg(q) = \lim_{\Delta q \rightarrow 0} \frac{C(q + \Delta q) - C(q)}{\Delta q} = C'(q).$$

Outros exemplos onde limites aparecem de forma central:

- **Equilíbrio de mercado como limite de ajustamento.** Em modelos de ajustamento de preços tipo Walras, o preço converge para o equilíbrio p^* à medida que o tempo tende ao infinito: $\lim_{t \rightarrow \infty} p(t) = p^*$. A existência desse limite é condição de estabilidade do equilíbrio.
- **Continuidade como pressuposto comportamental.** Funções de demanda e utilidade são geralmente supostas contínuas: pequenas variações de preço ou renda não geram saltos na demanda. A descontinuidade teria implicações fortes (por exemplo, mercados que “somem” com variações de preço infinitesimais).
- **Assíntotas e mercados monopolistas.** A receita marginal de um monopólio com demanda $P(q)$ pode tender a $-\infty$ quando q cresce sem limite — indicando que aumentar indefinidamente a oferta destrói a receita.

3.2 Limite Lateral

Dado um ponto $b \in \mathbb{R}$, podemos nos aproximar dele pela direita ($x \rightarrow b^+$) ou pela esquerda ($x \rightarrow b^-$). Esses dois limites podem diferir.

Limite pela direita: $\lim_{x \rightarrow b^+} f(x) = L$ — valores de x maiores que b , se aproximando de b .

Limite pela esquerda: $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = M$ — valores de x menores que b , se aproximando de b .

Se $L \neq M$, os limites laterais existem mas são distintos, e o limite bilateral $\lim_{x \rightarrow b} f(x)$ **não existe**.

Exemplo. Considere $f(x) = \begin{cases} 3 + x & \text{se } x \leq 1 \\ 3 - x & \text{se } x > 1 \end{cases}$.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 4, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2.$$

Como $4 \neq 2$, o limite em $x = 1$ não existe, embora $f(1) = 4$.

3.3 Definição de Limite

O limite bilateral existe se e somente se os dois limites laterais existem e coincidem:

$$\exists \lim_{x \rightarrow b} f(x) \iff \lim_{x \rightarrow b^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} f(x).$$

Nesse caso, o valor comum é o limite: $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = L$.

Observação. O limite descreve o comportamento de f **nas vizinhanças** de b , independentemente do valor de $f(b)$ — ou mesmo de $f(b)$ existir.

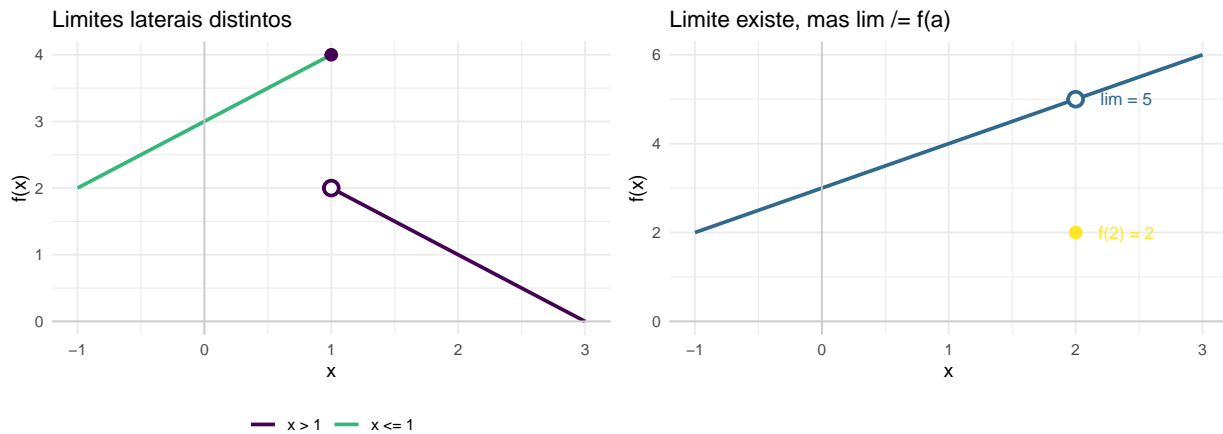


Figura 4: Limites laterais distintos (esq.) e limite bilateral existente (dir.)

3.4 Limites Infinitos e no Infinito

3.4.1 Limite Infinito

Dizemos que $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = +\infty$ quando $f(x)$ cresce sem limite à medida que $x \rightarrow b$. Nesse caso, a reta $x = b$ é uma **assíntota vertical** do gráfico de f .

Exemplo. Para $f(x) = \frac{1}{x}$, temos $\mathbb{D} = \mathbb{R}^*$ e:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty.$$

A reta $x = 0$ é assíntota vertical; como os limites laterais divergem, o limite em $x = 0$ não existe.

3.4.2 Limite no Infinito

Quando x cresce (ou decresce) sem limite, $f(x)$ pode convergir para um valor L . Nesse caso, $y = L$ é uma **assíntota horizontal**.

Para $f(x) = \frac{1}{x}$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0^+, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0^-.$$

A reta $y = 0$ é assíntota horizontal.

Exemplo com deslocamento. Para $f(x) = \frac{1}{x-2} + 2$:

- Assíntota vertical em $x = 2$ (denominador nulo).
- Assíntota horizontal em $y = 2$ (limite no infinito).

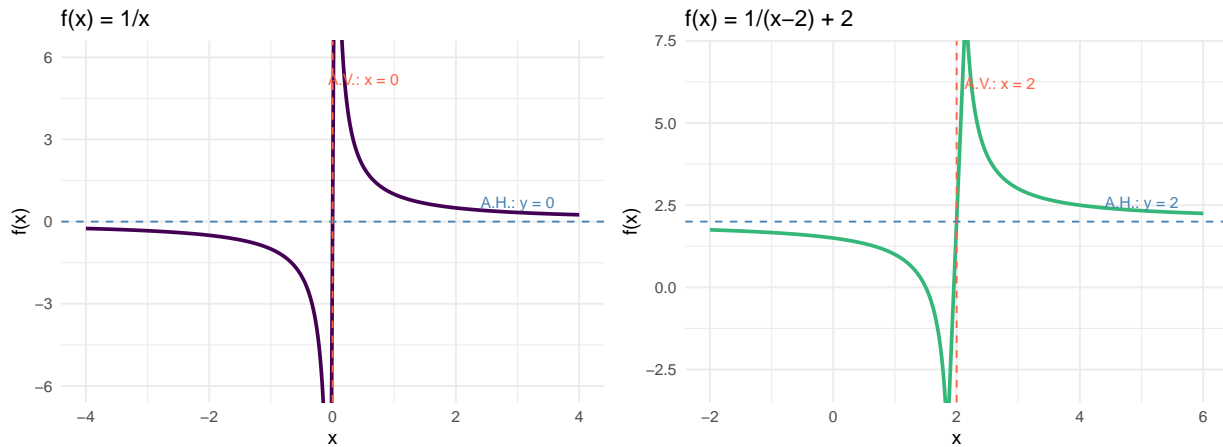


Figura 5: Hipérbole $f(x) = 1/x$ e variante com assíntotas deslocadas

3.5 Continuidade

Uma função f é **contínua em** $x = a$ quando três condições são satisfeitas simultaneamente:

1. $f(a)$ existe (o ponto está no domínio).
2. $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe (os limites laterais coincidem).
3. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ (o limite coincide com o valor da função).

Se qualquer uma dessas condições falhar, f é **descontínua** em $x = a$.

3.5.1 Tipos de Descontinuidade

Descontinuidade removível: $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe, mas $\neq f(a)$ (ou $f(a)$ não existe). O “buraco” pode ser preenchido.

Descontinuidade de salto: os limites laterais existem mas são diferentes. O gráfico “salta” em $x = a$.

Descontinuidade essencial: pelo menos um dos limites laterais é infinito (assíntota vertical).

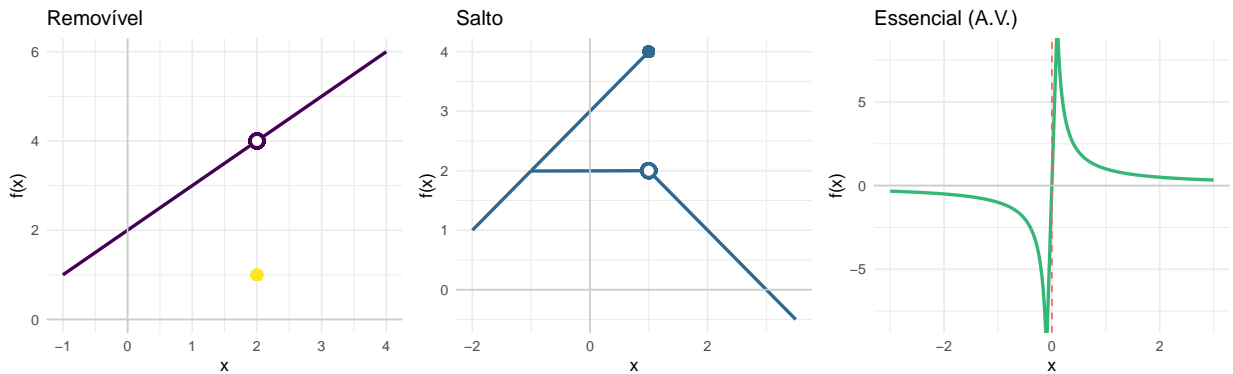


Figura 6: Tipos de descontinuidade: removível, salto e essencial

3.5.2 Propriedades da Continuidade

Se f e g são contínuas em $x = a$, então também são contínuas em a :

- **Soma e diferença:** $f(x) \pm g(x)$.
- **Produto:** $f(x) \cdot g(x)$.
- **Quociente:** $f(x)/g(x)$, desde que $g(a) \neq 0$.
- **Composição:** $f(g(x))$, se g é contínua em a e f é contínua em $g(a)$.

Classes de funções contínuas em todo o seu domínio: polinômios, funções racionais (exceto zeros do denominador), exponenciais, logarítmicas, trigonométricas.

3.5.3 Continuidade e Diferenciabilidade

Uma conexão fundamental com derivadas: **diferenciabilidade implica continuidade**, mas a recíproca é falsa.

Teorema. Se $f'(a)$ existe, então f é contínua em a .

Contraexemplo. $f(x) = |x|$ é contínua em $x = 0$, mas não é diferenciável ali — os limites laterais da razão incremental divergem:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|h|}{h} = 1 \neq -1 = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|h|}{h}.$$

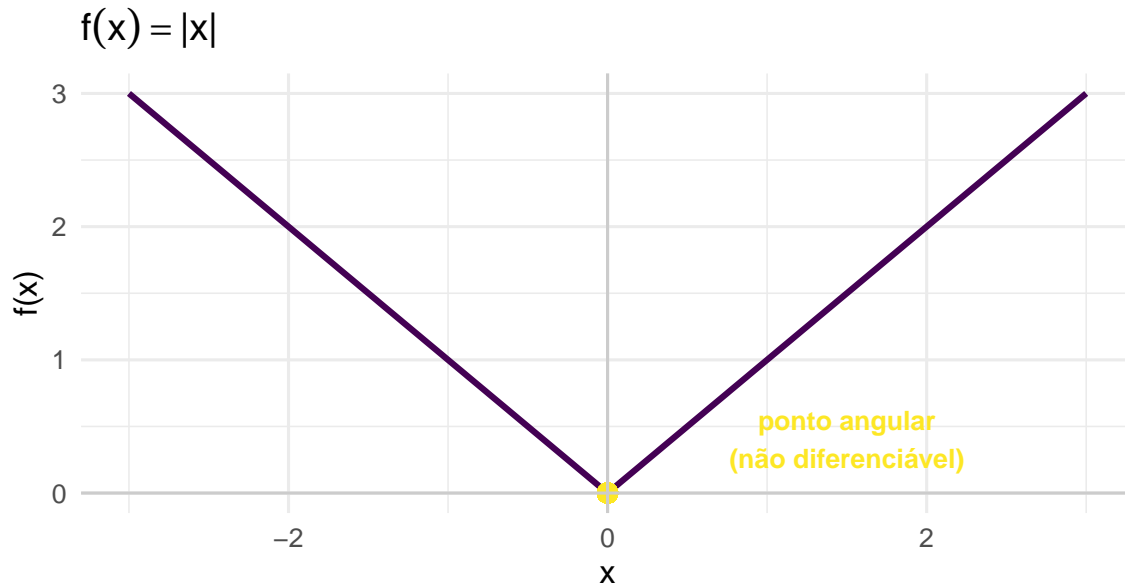


Figura 7: Função $|x|$: contínua mas não diferenciável em $x = 0$

4 Derivadas

4.1 Motivação Econômica

O conceito de derivada surge da necessidade de medir a **taxa de variação instantânea** de uma função. Em Economia, essa ideia está presente em toda parte: o custo marginal é a taxa de variação do custo total em relação à quantidade produzida; a utilidade marginal é a variação da utilidade ao consumir uma unidade adicional de um bem; a produtividade marginal do trabalho mede o acréscimo de produto decorrente de uma unidade extra de trabalho.

A derivada generaliza o conceito de **inclinação de uma reta** para funções arbitrárias: em vez de medir a inclinação entre dois pontos fixos, medimos a inclinação da reta tangente ao gráfico em um ponto.

Exemplos econômicos centrais:

- **Maximização de lucro.** A firma maximiza $\pi(q) = R(q) - C(q)$ igualando receita marginal e custo marginal: $\pi'(q^*) = R'(q^*) - C'(q^*) = 0$. A condição de segunda ordem ($\pi''(q^*) < 0$) garante que é máximo.
- **Elasticidade.** A elasticidade-preço da demanda mede a sensibilidade percentual da quantidade ao preço: $\varepsilon = \frac{dq}{dp} \cdot \frac{p}{q}$. Bens com $|\varepsilon| > 1$ são elásticos; com $|\varepsilon| < 1$, inelásticos.
- **Estática comparativa.** Como o equilíbrio $q^*(p, m)$ muda quando o preço p ou a renda m mudam? A resposta é dada pelas derivadas $\partial q^*/\partial p$ e $\partial q^*/\partial m$.
- **Produtividade marginal decrescente.** Na função de produção $Q(L)$, a hipótese $Q'' < 0$ captura a lei dos rendimentos decrescentes: cada unidade adicional de trabalho contribui menos que a anterior.

4.2 Definição Formal

4.2.1 Taxa de Variação Média

Dada uma função $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, a **taxa de variação média** de f no intervalo $[x_0, x_0 + h]$ é:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}, \quad h \neq 0.$$

Geometricamente, essa é a inclinação da **reta secante** que passa pelos pontos $(x_0, f(x_0))$ e $(x_0 + h, f(x_0 + h))$.

4.2.2 Derivada

A **derivada de f no ponto x_0** é o limite da taxa de variação média quando $h \rightarrow 0$:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

desde que esse limite exista. Quando existe, dizemos que f é **diferenciável** em x_0 .

A derivada é a inclinação da **reta tangente** ao gráfico de f no ponto $(x_0, f(x_0))$.

4.2.3 Notação

Para $y = f(x)$, todas as notações abaixo são equivalentes:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = Df(x) = \dot{y}.$$

4.2.4 Exemplo: $f(x) = x^2$

Aplicando a definição:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) = 2x.$$

4.3 Interpretação Econômica

A derivada é a formalização matemática do conceito de **marginal** em Economia.

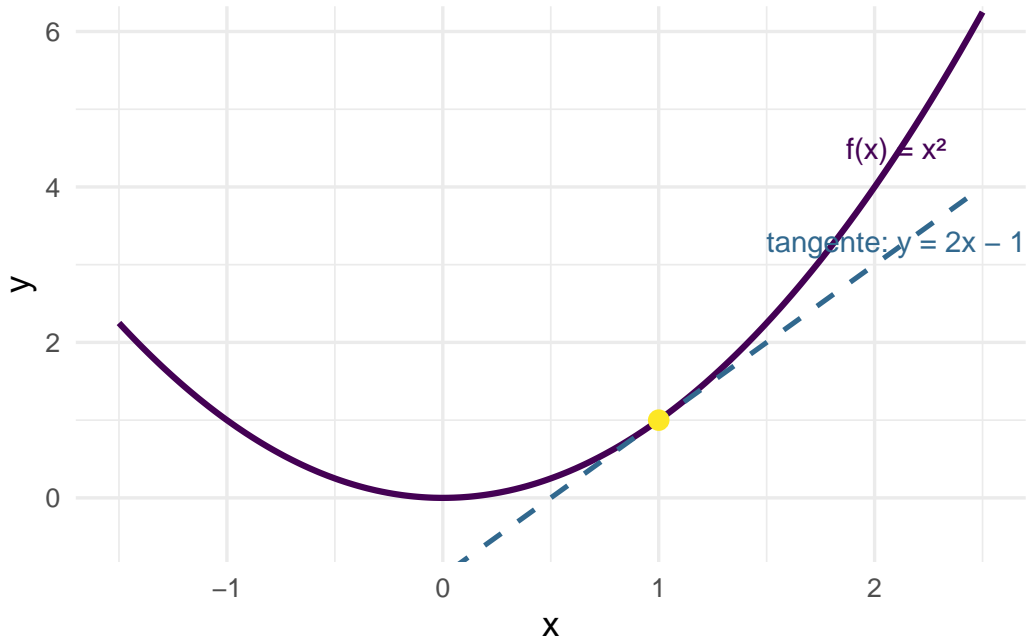


Figura 8: Reta tangente a $f(x) = x^2$ no ponto $x_0 = 1$: inclinação $f'(1) = 2$

Função $f(x)$	Derivada $f'(x)$
Custo total $C(q)$	Custo marginal $CMg(q)$
Receita total $R(q)$	Receita marginal $RMg(q)$
Lucro $\pi(q)$	Lucro marginal $\pi'(q)$
Função de produção $Q(L)$	Produto marginal do trabalho $PMgL$
Função utilidade $U(x)$	Utilidade marginal $UMg(x)$

4.3.1 Exemplo: Custo Marginal

Seja o custo total $C(q) = q^3 - 6q^2 + 15q + 10$. O custo marginal é:

$$CMg(q) = C'(q) = 3q^2 - 12q + 15.$$

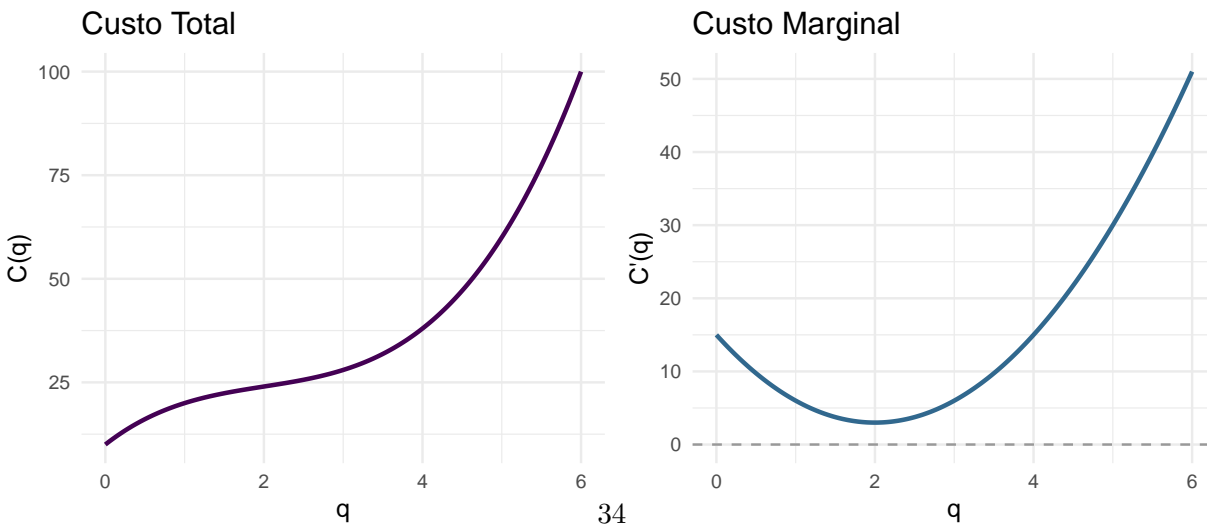


Figura 9: Custo total e custo marginal

Função $f(x)$	Derivada $f'(x)$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$

4.4.2 Regras Algébricas

Sejam f e g funções diferenciáveis e $c \in \mathbb{R}$.

Soma e diferença:

$$[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x).$$

Multiplicação por escalar:

$$[c \cdot f(x)]' = c \cdot f'(x).$$

Produto:

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Quociente:

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}, \quad g(x) \neq 0.$$

4.4.2.1 Provas a partir da Definição

Prova — Regra da Soma.

$$\begin{aligned} [f + g]'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(x+h) + g(x+h)] - [f(x) + g(x)]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f'(x) + g'(x). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Prova — Regra do Produto. *Esta prova cai na prova.*

O truque é somar e subtrair o termo $f(x)g(x+h)$ no numerador:

$$\begin{aligned} [fg]'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(x+h) - f(x)]g(x+h) + f(x)[g(x+h) - g(x)]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot g(x+h) + f(x) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \end{aligned}$$

$$= f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x). \quad \blacksquare$$

(Usamos que $g(x+h) \rightarrow g(x)$ quando $h \rightarrow 0$, pois g é diferenciável e portanto contínua.)

Prova — Regra do Quociente.

$$\left[\frac{f}{g} \right]'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)} \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{h g(x+h)g(x)}.$$

Somando e subtraindo $f(x)g(x)$ no numerador:

$$\begin{aligned} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(x+h) - f(x)]g(x) - f(x)[g(x+h) - g(x)]}{h g(x+h)g(x)} \\ &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

4.4.3 Exemplos

4.4.3.1 Produto: $h(x) = x^2 e^x$

$$h'(x) = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x = x e^x (2 + x).$$

4.4.3.2 Quociente: $h(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$

$$h'(x) = \frac{2x(x-1) - (x^2+1) \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2}.$$

4.4.4 Derivadas pela Definição de Limite

Os exercícios a seguir ilustram como calcular a derivada diretamente da definição, sem usar as regras algébricas — um treinamento fundamental para compreender o conceito.

4.4.4.1 $f(x) = x^3$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (3x^2 + 3xh + h^2) = 3x^2.$$

4.4.4.2 $f(x) = \sqrt{x-1}$

Racionalizamos multiplicando numerador e denominador por $\sqrt{x+h-1} + \sqrt{x-1}$:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h-1} - \sqrt{x-1}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h-1) - (x-1)}{h(\sqrt{x+h-1} + \sqrt{x-1})} = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}.$$

4.4.4.3 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{x+h}} - \frac{1}{\sqrt{x}}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x+h}}{h\sqrt{x}\sqrt{x+h}}.$$

Racionalizando o numerador:

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x - (x+h)}{h\sqrt{x}\sqrt{x+h}(\sqrt{x} + \sqrt{x+h})} = \frac{-1}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} \cdot 2\sqrt{x}} = -\frac{1}{2x^{3/2}}.$$

4.4.4.4 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+3}}$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2x+3} - \sqrt{2x+2h+3}}{h\sqrt{2x+3}\sqrt{2x+2h+3}}.$$

Racionalizando o numerador por $\sqrt{2x+3} + \sqrt{2x+2h+3}$:

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2h}{h\sqrt{2x+3}\sqrt{2x+2h+3}(\sqrt{2x+3} + \sqrt{2x+2h+3})} = \frac{-2}{(2x+3) \cdot 2\sqrt{2x+3}} = -\frac{1}{(2x+3)^{3/2}}.$$

4.4.4.5 $f(x) = x^{1/3}$ e a Reta Tangente Vertical

Usamos a identidade $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ com $a = (x+h)^{1/3}$ e $b = x^{1/3}$:

$$(x+h)^{1/3} - x^{1/3} = \frac{h}{(x+h)^{2/3} + (x+h)^{1/3}x^{1/3} + x^{2/3}}.$$

Portanto:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^{1/3} - x^{1/3}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{(x+h)^{2/3} + (x+h)^{1/3}x^{1/3} + x^{2/3}} = \frac{1}{3x^{2/3}}, \quad x \neq 0.$$

Reta tangente vertical em $x = 0$. Quando $x \rightarrow 0$, $f'(x) = \frac{1}{3x^{2/3}} \rightarrow +\infty$. A reta tangente existe no sentido geométrico (é a reta vertical $x = 0$), mas a derivada não é finita. Portanto, $f(x) = x^{1/3}$ é contínua em \mathbb{R} , mas não é diferenciável em $x = 0$.

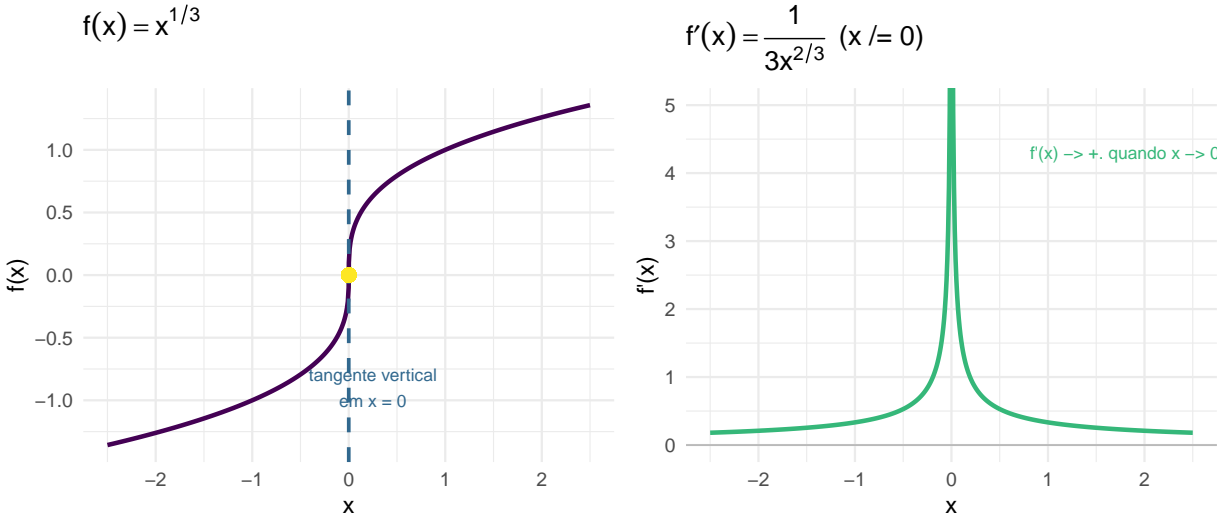


Figura 10: $f(x) = x^{1/3}$: contínua em todo \mathbb{R} , mas com reta tangente vertical em $x = 0$ — não diferenciável nesse ponto.

4.4.4.6 $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2} + \sqrt{x}$ — Linearidade do Limite

Para uma soma, o limite distribui-se:

$$f'(x) = \left[\frac{1}{(x-1)^2} \right]' + [\sqrt{x}]'$$

Derivada de $\frac{1}{(x-1)^2}$. Fatorando o numerador como diferença de quadrados:

$$\left[\frac{1}{(x-1)^2} \right]' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x-1)^2 - (x+h-1)^2}{h(x+h-1)^2(x-1)^2}.$$

$$(x-1)^2 - (x+h-1)^2 = [(x-1) - (x+h-1)][(x-1) + (x+h-1)] = (-h)(2x+h-2).$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h(2x+h-2)}{h(x+h-1)^2(x-1)^2} = \frac{-(2x-2)}{(x-1)^4} = -\frac{2}{(x-1)^3}.$$

Derivada de \sqrt{x} : $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ (calculada anteriormente). Logo:

$$f'(x) = -\frac{2}{(x-1)^3} + \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Domínio: \sqrt{x} exige $x \geq 0$; $(x-1)^{-2}$ exige $x \neq 1$:

$$\text{Dom}(f) = [0, 1) \cup (1, +\infty).$$

4.5 Regra da Cadeia

4.5.1 Definição

Se g é diferenciável em x e f é diferenciável em $g(x)$, então a composição $h(x) = f(g(x))$ é diferenciável em x e:

$$h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Em notação de Leibniz, com $y = f(u)$ e $u = g(x)$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

A ideia é: **derivar a função externa avaliada na interna, multiplicado pela derivada da interna.**

4.5.2 Prova

Como f é diferenciável em $u = g(x)$, podemos escrever, para qualquer Δu :

$$f(u + \Delta u) - f(u) = f'(u) \Delta u + \varepsilon(\Delta u) \Delta u,$$

onde $\varepsilon(\Delta u) \rightarrow 0$ quando $\Delta u \rightarrow 0$. Isso é simplesmente a definição de derivada reescrita com um erro residual ε .

Agora, seja $\Delta u = g(x + \Delta x) - g(x)$. Dividindo por $\Delta x \neq 0$:

$$\frac{h(x + \Delta x) - h(x)}{\Delta x} = \frac{f(g(x + \Delta x)) - f(g(x))}{\Delta x} = [f'(u) + \varepsilon(\Delta u)] \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Tomando o limite quando $\Delta x \rightarrow 0$:

- $\frac{\Delta u}{\Delta x} \rightarrow g'(x)$, pois g é diferenciável em x .
- $\Delta u \rightarrow 0$ (pois g é contínua, consequência da diferenciabilidade).
- Portanto $\varepsilon(\Delta u) \rightarrow 0$.

Concluimos:

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{h(x + \Delta x) - h(x)}{\Delta x} = [f'(g(x)) + 0] \cdot g'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x). \quad \blacksquare$$

Observação. A “prova ingênua” multiplica e divide por Δu , mas isso falha se $\Delta u = 0$ para algum $\Delta x \neq 0$. A prova acima, via erro residual ε , contorna esse problema.

4.5.3 Intuição Geométrica

A regra da cadeia é uma consequência direta da **linearidade local** das funções diferenciáveis. Perto de qualquer ponto, uma função diferenciável se comporta como uma reta — e inclinações se multiplicam ao longo de uma cadeia.

Formalmente: se Δx é pequeno,

$$\Delta u \approx g'(x) \Delta x \quad \text{e} \quad \Delta y \approx f'(u) \Delta u.$$

Substituindo:

$$\Delta y \approx f'(u) \cdot g'(x) \Delta x \implies \frac{\Delta y}{\Delta x} \approx f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

O gráfico abaixo ilustra essa amplificação em cadeia para $g(x) = x^2$ e $f(u) = e^u$, com $h(x) = e^{x^2}$, avaliado em $x_0 = 1$.

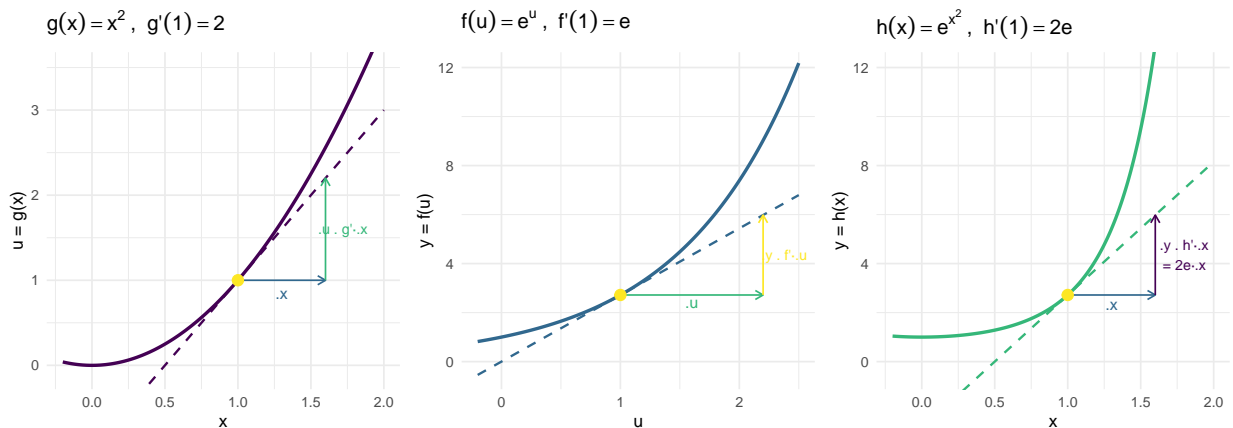


Figura 11: Intuição geométrica da regra da cadeia: $h(x) = e^{x^2}$, avaliada em $x_0 = 1$. Uma perturbação Δx é amplificada por $g'(x_0) = 2$ e depois por $f'(u_0) = e$, dando $h'(x_0) = 2e$.

4.5.4 Exemplos

4.5.4.1 $h(x) = e^{x^2}$

Identificamos $f(u) = e^u$ e $g(x) = x^2$:

$$h'(x) = e^{x^2} \cdot 2x = 2x e^{x^2}.$$

4.5.4.2 $h(x) = \ln(1 + x^2)$ Com $f(u) = \ln u$ e $g(x) = 1 + x^2$:

$$h'(x) = \frac{1}{1+x^2} \cdot 2x = \frac{2x}{1+x^2}.$$

4.5.4.3 $h(x) = (3x^2 + 5)^4$ Com $f(u) = u^4$ e $g(x) = 3x^2 + 5$:

$$h'(x) = 4(3x^2 + 5)^3 \cdot 6x = 24x(3x^2 + 5)^3.$$

4.5.4.4 $h(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ Reescrevendo $h(x) = (x^2 + 1)^{1/2}$:

$$h'(x) = \frac{1}{2}(x^2 + 1)^{-1/2} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

4.5.4.5 $g(x) = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + x^2}}}$ — **Cadeia Tripla**

Decompõe-se em três camadas, de dentro para fora:

$$u_1 = 1 + x^2, \quad u_2 = 1 + \sqrt{u_1}, \quad u_3 = 1 + \sqrt{u_2}, \quad g = \sqrt{u_3}.$$

A regra da cadeia se aplica repetidamente, multiplicando as derivadas de cada camada:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1}{\underbrace{2\sqrt{u_3}}_{\partial g/\partial u_3}} \cdot \frac{1}{\underbrace{2\sqrt{u_2}}_{\partial u_3/\partial u_2}} \cdot \frac{1}{\underbrace{2\sqrt{u_1}}_{\partial u_2/\partial u_1}} \cdot \underbrace{2x}_{u_1'(x)} \\ &= \frac{x}{4\sqrt{1+x^2} \sqrt{1+\sqrt{1+x^2}} \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}}}. \end{aligned}$$

4.5.5 Aplicação Econômica: Elasticidade

A **elasticidade** de $y = f(x)$ é definida como:

$$\varepsilon = \frac{dy/y}{dx/x} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{x}{y} = f'(x) \cdot \frac{x}{f(x)}.$$

Usando a regra da cadeia, a elasticidade também pode ser escrita como:

$$\varepsilon = \frac{d \ln y}{d \ln x},$$

pois $\frac{d \ln f(x)}{d \ln x} = \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot x.$

4.6 Derivada Segunda e Concavidade

4.6.1 Definição

A **derivada segunda** de f é a derivada da derivada primeira:

$$f''(x) = [f'(x)]' = \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Enquanto $f'(x)$ mede a taxa de variação de f , $f''(x)$ mede a **taxa de variação de f'** — ou seja, como a inclinação da função está mudando.

4.6.2 Concavidade

Condição	Interpretação geométrica	Econômica
$f''(x) > 0$	f é convexa (côncava para cima)	Custo marginal crescente
$f''(x) < 0$	f é côncava (côncava para baixo)	Utilidade marginal decrescente
$f''(x) = 0$	possível ponto de inflexão	Mudança na curvatura

4.6.3 Exemplo: $f(x) = x^3 - 3x^2$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2),$$

$$f''(x) = 6x - 6 = 6(x - 1).$$

- $f''(x) > 0$ para $x > 1$: convexa.
- $f''(x) < 0$ para $x < 1$: côncava.
- $f''(1) = 0$: ponto de inflexão em $x = 1$.

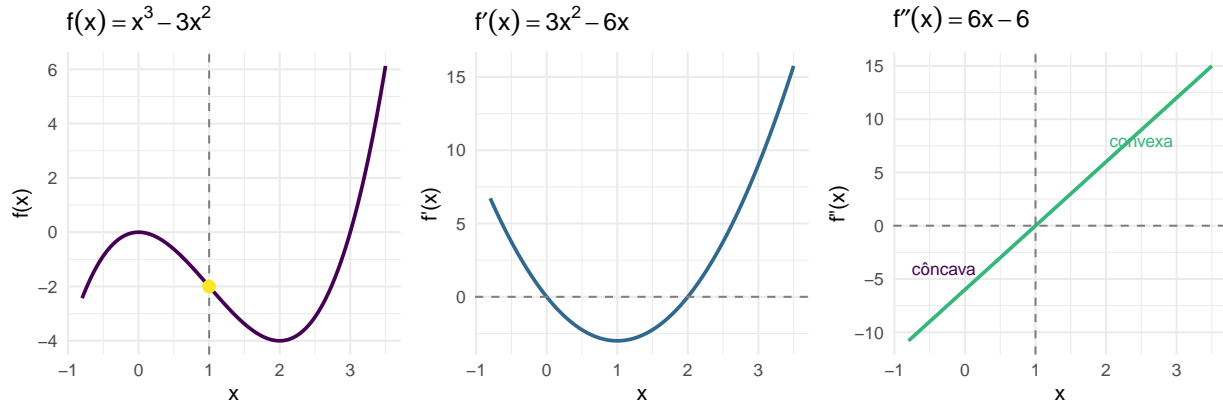


Figura 12: Função, derivada primeira e derivada segunda de $f(x) = x^3 - 3x^2$

4.7 Gráficos de Funções

A combinação de f' e f'' permite esboçar o gráfico de qualquer função diferenciável de forma sistemática.

4.7.1 Critérios de Análise

Informação	O que verificar
Domínio e zeros	Onde f está definida e onde $f(x) = 0$
Crescimento	$f'(x) > 0$: crescente; $f'(x) < 0$: decrescente
Pontos críticos	$f'(x) = 0$ ou $f'(x)$ não existe
Concavidade	$f''(x) > 0$: convexa; $f''(x) < 0$: côncava
Pontos de inflexão	$f''(x) = 0$ e mudança de sinal

4.7.2 Exemplo Completo: $f(x) = x^3 - 3x^2$

Zeros: $f(x) = x^2(x - 3) = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = 3$.

Pontos críticos: $f'(x) = 3x(x - 2) = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = 2$.

- $f'(x) > 0$ para $x < 0$ ou $x > 2$: crescente.
- $f'(x) < 0$ para $0 < x < 2$: decrescente.
- $f(0) = 0$ é **máximo local**; $f(2) = -4$ é **mínimo local**.

Concavidade: $f''(x) = 6(x - 1) = 0 \Rightarrow x = 1$.

- Ponto de inflexão em $x = 1$: $f(1) = -2$.

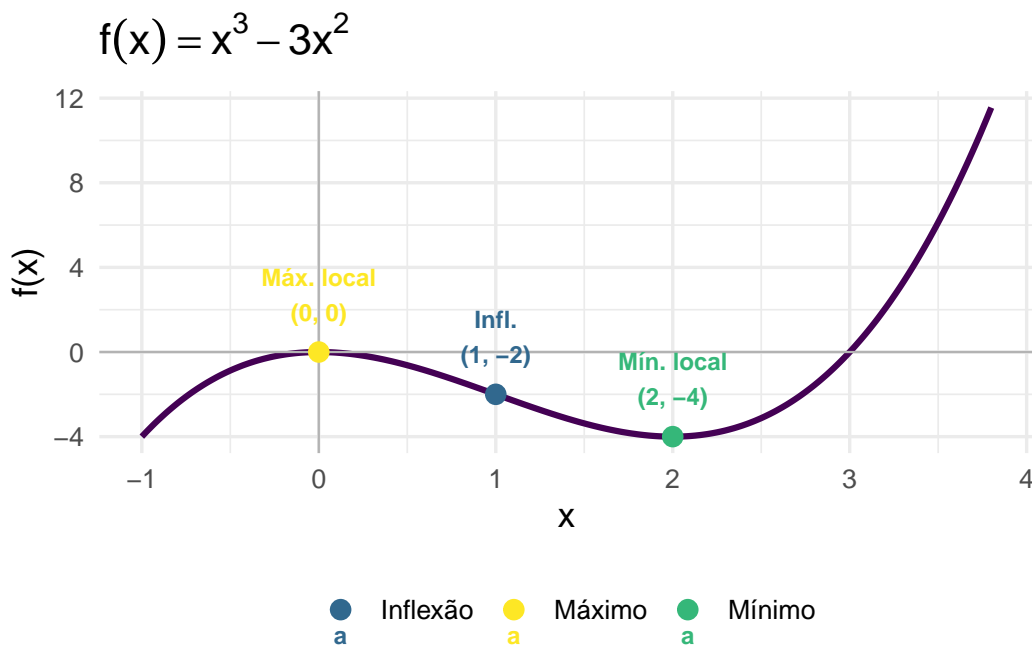


Figura 13: Análise completa de $f(x) = x^3 - 3x^2$: máximo local, mínimo local e ponto de inflexão

4.7.3 Condições Necessárias vs. Suficientes

Um equívoco comum é interpretar as condições de primeira e segunda ordens como **suficientes** quando são apenas **necessárias**.

Máximos e mínimos: $f'(x^*) = 0$ é condição necessária para um extremo interior, mas não suficiente. Pode haver pontos em que $f'(x^*) = 0$ e x^* não seja nem máximo nem mínimo (pontos de inflexão com tangente horizontal).

Pontos de inflexão: $f''(x^*) = 0$ é condição necessária para um ponto de inflexão, mas não suficiente. O sinal de f'' deve efetivamente mudar em x^* .

4.7.3.1 Contraexemplo: $f(x) = x^4$ e $f(x) = -x^4$

Considere $f(x) = x^4$:

$$f'(x) = 4x^3 \implies f'(0) = 0.$$

$$f''(x) = 12x^2 \implies f''(0) = 0.$$

O teste da segunda derivada é **inconclusivo** em $x = 0$. No entanto, como $f(x) = x^4 \geq 0 = f(0)$ para todo x , o ponto $x = 0$ é um **mínimo global** — não um ponto de inflexão.

Para $g(x) = -x^4$: $g''(0) = 0$ também, mas $x = 0$ é **máximo global**.

A conclusão é: quando $f''(x^*) = 0$, é preciso analisar o sinal de f' (ou usar derivadas de ordem superior) para determinar a natureza do ponto crítico.

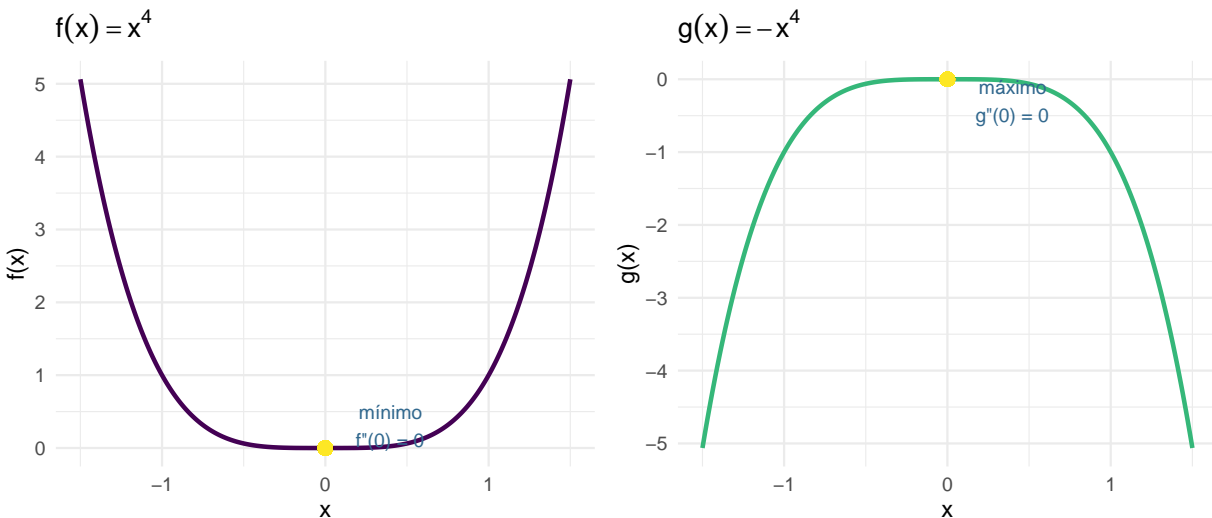


Figura 14: Em ambas as funções, $f''(0) = 0$, mas $x = 0$ é mínimo global de x^4 e máximo global de $-x^4$ — não pontos de inflexão.

4.7.4 Funções Definidas por Partes

A análise de extremos e diferenciabilidade pode ser mais sutil quando a função é definida por partes, pois o ponto de junção pode ser um extremo **sem que** $f' = 0$ (ou mesmo sem que f' exista).

4.7.4.1 Exemplo:

$$f(x) = \begin{cases} 4 - x^2, & x \leq 1 \\ 2 + x^2, & x > 1 \end{cases}$$

Continuidade em $x = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 4 - 1 = 3 = f(1), \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2 + 1 = 3.$$

A função é contínua em $x = 1$.

Diferenciabilidade em $x = 1$:

$$f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (-2x)|_{x=1} = -2, \quad f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x)|_{x=1} = 2.$$

Como $f'_-(1) \neq f'_+(1)$, a função é **não diferenciável em $x = 1$** (canto no gráfico).

Análise de extremos:

- Para $x < 1$: $f'(x) = -2x < 0$ se $x > 0$ e > 0 se $x < 0$. Há máximo local em $x = 0$ com $f(0) = 4$.
- Para $x > 1$: $f'(x) = 2x > 0$, função estritamente crescente.
- Em $x = 1$: f' passa de -2 (negativo) para $+2$ (positivo) — mudança de decrescente para crescente. Portanto, $x = 1$ é **mínimo local** com $f(1) = 3$, **sem que $f'(1) = 0$** .

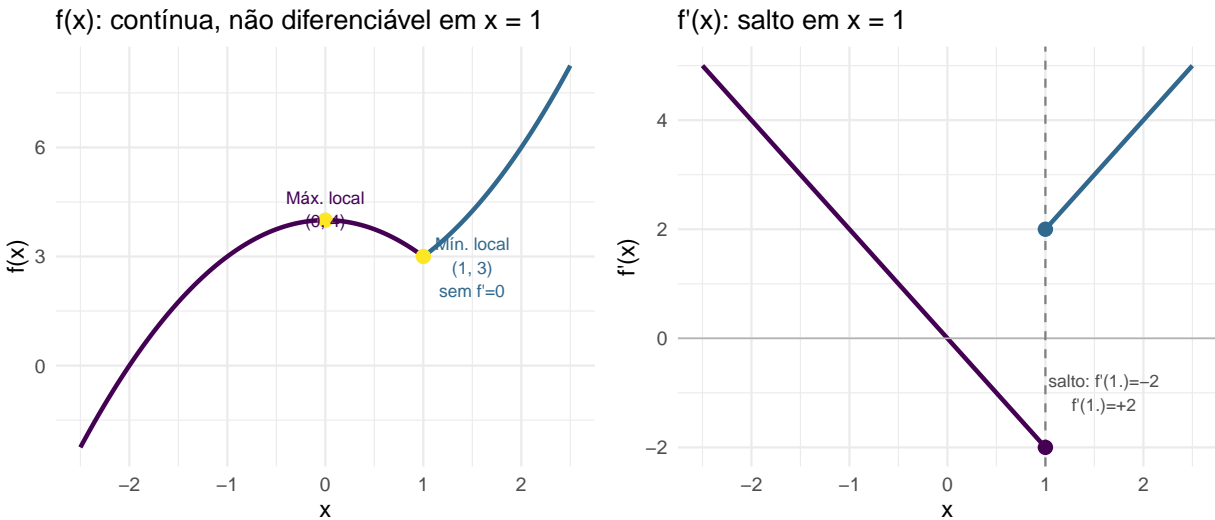


Figura 15: Função definida por partes: contínua em $x = 1$, mas não diferenciável (canto). O mínimo local em $x = 1$ ocorre sem $f'(1) = 0$.

4.7.5 Exemplos Adicionais de Análise Completa

4.7.5.1 $f(x) = x^3 - 3x$

Zeros: $f(x) = x(x^2 - 3) = 0 \Rightarrow x = 0, \pm\sqrt{3}$.

Pontos críticos: $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x = \pm 1$.

- $f''(x) = 6x$.
- $f''(-1) = -6 < 0$: $x = -1$ é **máximo local**, $f(-1) = 2$.
- $f''(1) = 6 > 0$: $x = 1$ é **mínimo local**, $f(1) = -2$.

Concavidade: $f''(x) = 6x = 0 \Rightarrow x = 0$. Ponto de inflexão em $(0, 0)$.

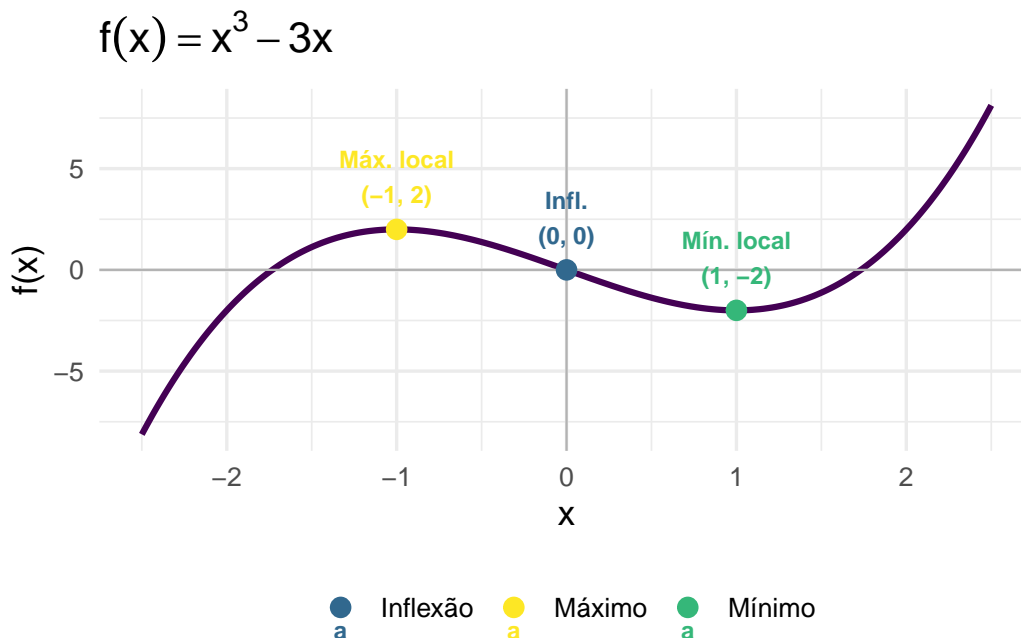


Figura 16: Análise completa de $f(x) = x^3 - 3x$: máximo local em $x = -1$, mínimo local em $x = 1$, ponto de inflexão em $x = 0$.

4.7.5.2 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$

Zeros: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3 = 0$. Não há fatoração elementar; o zero real aproximado é $x \approx -0,879$.

Pontos críticos: $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2) = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = 2$.

- $f''(x) = 6x - 6$.
- $f''(0) = -6 < 0$: $x = 0$ é **máximo local**, $f(0) = 3$.
- $f''(2) = 6 > 0$: $x = 2$ é **mínimo local**, $f(2) = -1$.

Ponto de inflexão: $f''(x) = 6(x - 1) = 0 \Rightarrow x = 1$, $f(1) = 1$.

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$$

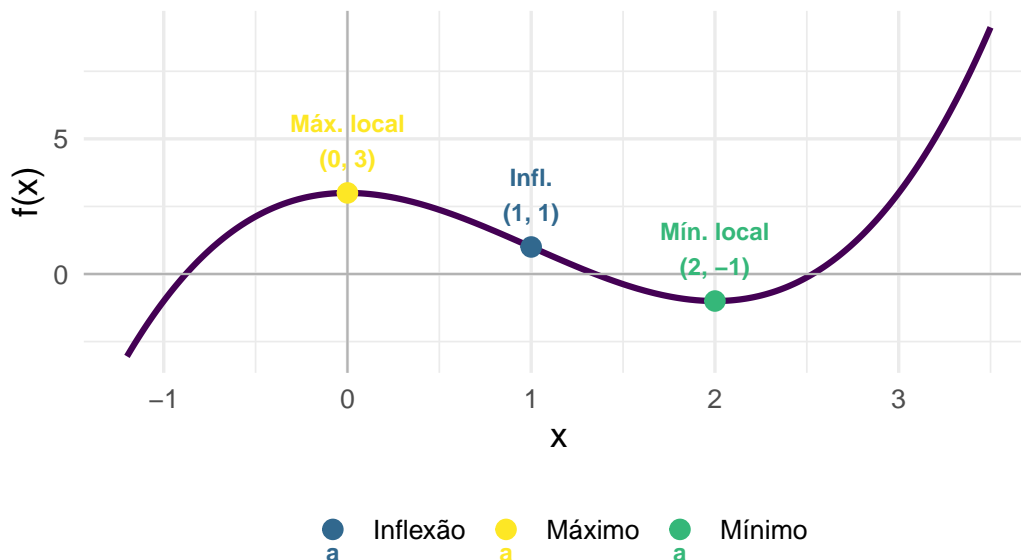


Figura 17: Análise completa de $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$: máximo local em $x = 0$, mínimo local em $x = 2$, ponto de inflexão em $x = 1$.

5 Monitoria 1

Nessa primeira monitoria, vamos revisar tudo o que vimos até aqui: os principais tipos de funções de uma variável real — suas propriedades, domínios, imagens e gráficos — e as regras de derivação, com ênfase nas aplicações econômicas. O objetivo é consolidar os conceitos antes de avançarmos para o cálculo integral e as funções de várias variáveis.

5.1 Revisão de Funções

5.1.1 Tipos de Funções

Apresentamos abaixo os principais tipos de funções que aparecem ao longo do curso, com suas características essenciais.

Função Linear: $f(x) = ax + b$

- Gráfico: reta com inclinação a e intercepto b .
- Domínio: \mathbb{R} . Imagem: \mathbb{R} (se $a \neq 0$) ou $\{b\}$ (se $a = 0$).
- Em Economia: funções de custo, demanda e oferta lineares.

Função Quadrática: $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$

- Gráfico: parábola côncava para cima ($a > 0$) ou para baixo ($a < 0$).
- Vértice em $x_v = -b/(2a)$; raízes via fórmula de Bhaskara.
- Em Economia: funções de lucro, receita total.

Função Polinomial: $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$

- Generalização das anteriores para grau n arbitrário.
- Domínio: \mathbb{R} . O comportamento nos extremos depende do grau e do coeficiente líder a_n .
- Em Economia: funções de custo total com múltiplas inflexões.

Função Exponencial: $f(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$

- Domínio: \mathbb{R} . Imagem: $(0, +\infty)$.
- $a > 1$: crescente; $0 < a < 1$: decrescente. Sempre positiva.
- Em Economia: crescimento composto, descontos, modelos de juros.

Função Logarítmica: $f(x) = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$

- Domínio: $(0, +\infty)$. Imagem: \mathbb{R} .
- Inversa da exponencial: $\log_a(a^x) = x$ e $a^{\log_a x} = x$.
- Em Economia: funções de utilidade (log-utilidade), elasticidades.

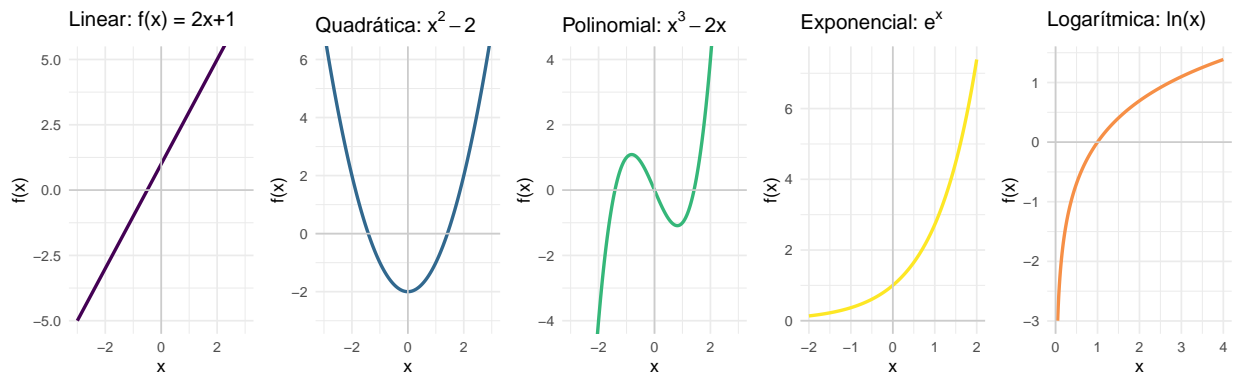


Figura 18: Principais tipos de funções de uma variável

5.2 Revisão de Derivadas

5.2.1 Conceito

A derivada de f em x_0 é a taxa de variação instantânea — a inclinação da reta tangente ao gráfico naquele ponto:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

5.2.2 Regras de Derivação

Regra da Potência: $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$

Soma e Diferença: $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$

Produto: $[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

Quociente: $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$

Cadeia: $[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

5.3 Exercícios Resolvidos

5.3.1 Derivadas de Funções Polinomiais

Exemplo 1. Calcule $g'(x)$ para $g(x) = 3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 7x + 1$.

Aplicando a regra da potência e da soma termo a termo:

$$g'(x) = 12x^3 - 6x^2 + 10x - 7.$$

Exemplo 2. Seja $g(x) = \frac{x^3 + 2x}{x}$ para $x \neq 0$. Simplifique e derive.

$$g(x) = x^2 + 2 \Rightarrow g'(x) = 2x.$$

5.3.2 Regra do Produto

Exemplo 3. $f(x) = (x^2 + 1)(3x - 5)$.

$$f'(x) = 2x(3x - 5) + (x^2 + 1) \cdot 3 = 6x^2 - 10x + 3x^2 + 3 = 9x^2 - 10x + 3.$$

Exemplo 4. $f(x) = x^3e^x$.

$$f'(x) = 3x^2e^x + x^3e^x = x^2e^x(3 + x).$$

5.3.3 Regra do Quociente

Exemplo 5. $f(x) = \frac{x^2 + 3x}{2x - 1}$.

$$f'(x) = \frac{(2x + 3)(2x - 1) - (x^2 + 3x) \cdot 2}{(2x - 1)^2} = \frac{4x^2 + 4x - 3 - 2x^2 - 6x}{(2x - 1)^2} = \frac{2x^2 - 2x - 3}{(2x - 1)^2}.$$

Exemplo 6. $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

5.3.4 Regra da Cadeia

Exemplo 7. $f(x) = (3x^2 + 5)^4$.

Com $u = 3x^2 + 5$:

$$f'(x) = 4(3x^2 + 5)^3 \cdot 6x = 24x(3x^2 + 5)^3.$$

Exemplo 8. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} = (x^2 + 1)^{1/2}$.

$$f'(x) = \frac{1}{2}(x^2 + 1)^{-1/2} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

Exemplo 9. $f(x) = \ln\left(\frac{\sqrt{2x+1}}{3x-2}\right)$.

Usando propriedades do logaritmo:

$$f(x) = \frac{1}{2} \ln(2x + 1) - \ln(3x - 2).$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{2x + 1} - \frac{3}{3x - 2} = \frac{1}{2x + 1} - \frac{3}{3x - 2}.$$

Exemplo 10. $f(x) = e^{\sqrt{x^2 - 5x}}$.

Com $u = \sqrt{x^2 - 5x} = (x^2 - 5x)^{1/2}$:

$$f'(x) = e^{\sqrt{x^2 - 5x}} \cdot \frac{2x - 5}{2\sqrt{x^2 - 5x}}.$$

5.3.5 Aplicações: Estudo de Funções

A derivada permite analisar o comportamento de f de forma sistemática:

- **Crescimento/Decrescimento:** $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ crescente; $f'(x) < 0 \Rightarrow f$ decrescente.
- **Pontos críticos:** $f'(x) = 0$ ou $f'(x)$ não existe — candidatos a máximos e mínimos.
- **Concavidade:** $f''(x) > 0 \Rightarrow$ convexa; $f''(x) < 0 \Rightarrow$ côncava.
- **Ponto de inflexão:** $f''(x) = 0$ com mudança de sinal.

Exemplo 11. Analise $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$.

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x - 1)(x - 3).$$

Pontos críticos: $x = 1$ (máximo local) e $x = 3$ (mínimo local).

$$f''(x) = 6x - 12 \Rightarrow f''(1) = -6 < 0 \text{ (máximo)}, \quad f''(3) = 6 > 0 \text{ (mínimo)}.$$

Ponto de inflexão: $f''(x) = 0 \Rightarrow x = 2$, com $f(2) = 3$.

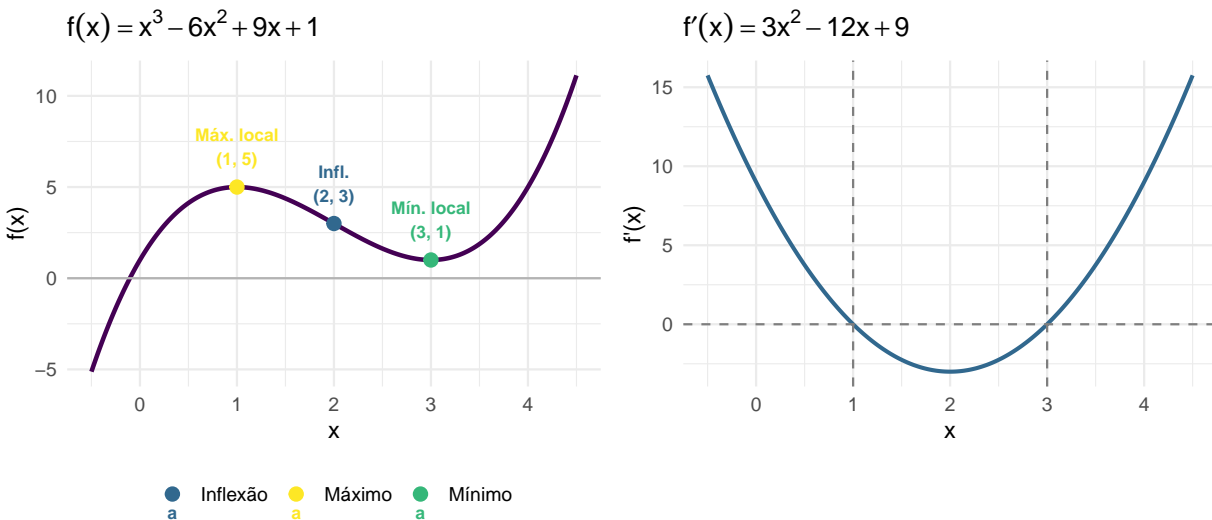


Figura 19: Análise completa de $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$

5.3.6 Aplicação Econômica: Otimização de Lucro

Exemplo 12. Uma firma tem receita total $R(q) = 50q - q^2$ e custo total $C(q) = q^2 + 10q + 5$. Encontre a quantidade que maximiza o lucro.

O lucro é:

$$\pi(q) = R(q) - C(q) = 50q - q^2 - q^2 - 10q - 5 = -2q^2 + 40q - 5.$$

Condição de primeira ordem:

$$\pi'(q) = -4q + 40 = 0 \Rightarrow q^* = 10.$$

Condição de segunda ordem: $\pi''(q) = -4 < 0$ — confirma máximo.

$$\pi(10) = -200 + 400 - 5 = 195.$$

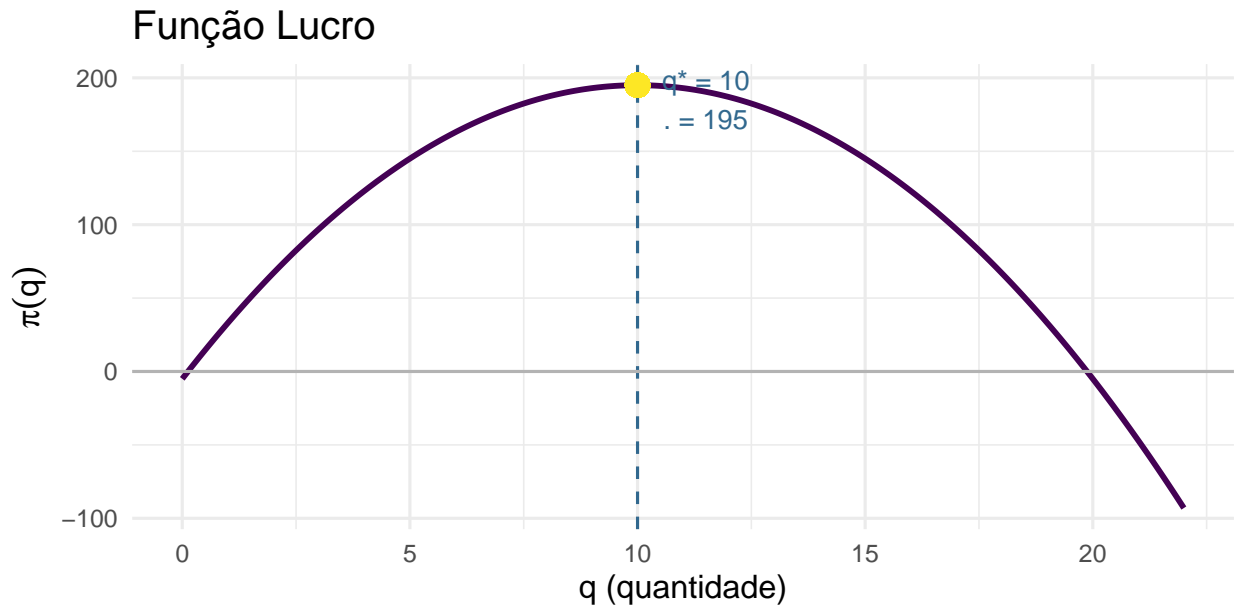


Figura 20: Lucro máximo em $q^* = 10$

6 Monitoria 2

6.1 Exercícios Resolvidos

6.1.1 Exercício 1 — Derivada pela Definição: $f(x) = \frac{7}{\sqrt{x-5}}$

Domínio. A função exige $x - 5 > 0$, logo $\text{Dom}(f) = (5, +\infty)$.

Cálculo de $f'(x)$ pela definição.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\frac{7}{\sqrt{x+h-5}} - \frac{7}{\sqrt{x-5}} \right).$$

Colocando em denominador comum:

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{7}{h} \cdot \frac{\sqrt{x-5} - \sqrt{x+h-5}}{\sqrt{x+h-5} \sqrt{x-5}}.$$

Racionalizamos o numerador multiplicando por $\frac{\sqrt{x-5} + \sqrt{x+h-5}}{\sqrt{x-5} + \sqrt{x+h-5}}$:

$$\sqrt{x-5} - \sqrt{x+h-5} = \frac{(x-5) - (x+h-5)}{\sqrt{x-5} + \sqrt{x+h-5}} = \frac{-h}{\sqrt{x-5} + \sqrt{x+h-5}}.$$

Substituindo:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{7}{h} \cdot \frac{-h}{\sqrt{x+h-5} \sqrt{x-5} (\sqrt{x-5} + \sqrt{x+h-5})} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-7}{\sqrt{x+h-5} \sqrt{x-5} (\sqrt{x-5} + \sqrt{x+h-5})}. \end{aligned}$$

Tomando $h \rightarrow 0$:

$$\boxed{f'(x) = \frac{-7}{\sqrt{x-5} \cdot \sqrt{x-5} \cdot 2\sqrt{x-5}} = -\frac{7}{2(x-5)^{3/2}}}.$$

Verificação pela regra da potência. Reescrevendo $f(x) = 7(x-5)^{-1/2}$ e aplicando a regra da cadeia:

$$f'(x) = 7 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) (x-5)^{-3/2} \cdot 1 = -\frac{7}{2(x-5)^{3/2}}. \quad \checkmark$$

6.1.2 Exercício 2 — Análise Completa: $f(x) = x(x-4)^3$ (Teste 1 — 2022)

6.1.2.1 1º) Sinal de $f'(x)$

Pela regra do produto:

$$f'(x) = (x-4)^3 + x \cdot 3(x-4)^2 = (x-4)^2[(x-4) + 3x] = 4(x-1)(x-4)^2.$$

Como $(x-4)^2 \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, o sinal de f' depende apenas de $(x-1)$:

Intervalo	$(x-1)$	$(x-4)^2$	$f'(x)$	Comportamento
$x < 1$	-	+	-	Decrescente
$x = 1$	0	+	0	Mínimo local
$1 < x < 4$	+	+	+	Crescente
$x = 4$	+	0	0	Tangente horizontal
$x > 4$	+	+	+	Crescente

- $f'(x) < 0$ para $x < 1$: f é **decrescente** em $(-\infty, 1)$.
- $f'(x) > 0$ para $x > 1$, $x \neq 4$: f é **crescente** em $(1, +\infty)$.
- $x = 1$ é **mínimo local**: $f(1) = 1 \cdot (-3)^3 = -27$.
- $x = 4$ é ponto de tangente horizontal (mas **não é extremo**, pois f' não troca de sinal).

6.1.2.2 2º) Sinal de $f''(x)$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{d}{dx}[4(x-1)(x-4)^2] = 4[(x-4)^2 + (x-1) \cdot 2(x-4)] \\ &= 4(x-4)[(x-4) + 2(x-1)] = 4(x-4)(3x-6) = 12(x-4)(x-2). \end{aligned}$$

Intervalo	$(x-2)$	$(x-4)$	$f''(x)$	Concavidade
$x < 2$	-	-	+	Convexa
$x = 2$	0	-	0	Inflexão
$2 < x < 4$	+	-	-	Côncava
$x = 4$	+	0	0	Inflexão
$x > 4$	+	+	+	Convexa

- Pontos de inflexão: $x = 2$ com $f(2) = 2(-2)^3 = -16$, e $x = 4$ com $f(4) = 0$.

6.1.2.3 3º) Esboço do gráfico

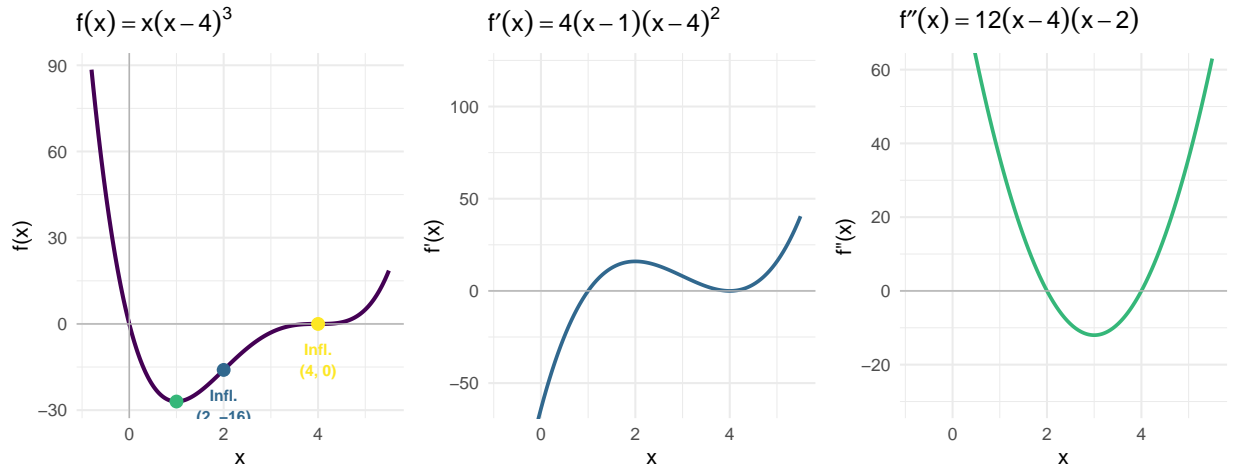


Figura 21: Análise completa de $f(x) = x(x - 4)^3$: mínimo local em $x = 1$, pontos de inflexão em $x = 2$ e $x = 4$.

7 Monitoria 3

7.1 Exercícios Resolvidos

7.1.1 Exercício 1 — Domínio e Derivada pela Definição: $f(x) = \frac{5}{(2x - 3)^2} - \sqrt{2x - 3}$

Domínio. A função possui dois componentes:

- $\frac{5}{(2x - 3)^2}$ exige $(2x - 3)^2 \neq 0$, ou seja, $x \neq \frac{3}{2}$.
- $\sqrt{2x - 3}$ exige $2x - 3 \geq 0$, ou seja, $x \geq \frac{3}{2}$.

A interseção dessas condições dá $x > \frac{3}{2}$:

$$\text{Dom}(f) = \left(\frac{3}{2}, +\infty\right).$$

Cálculo de $f'(x)$ pela definição. Separamos o quociente de diferença em duas partes:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \underbrace{\frac{5}{h} \left[\frac{1}{(2x+2h-3)^2} - \frac{1}{(2x-3)^2} \right]}_{\text{Parte 1}} + \underbrace{\frac{\sqrt{2x-3} - \sqrt{2x+2h-3}}{h}}_{\text{Parte 2}}.$$

Parte 1. Colocando em denominador comum:

$$\frac{5}{h} \cdot \frac{(2x-3)^2 - (2x+2h-3)^2}{(2x+2h-3)^2(2x-3)^2}.$$

Aplicando a diferença de quadrados $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ com $a = 2x - 3$ e $b = 2x + 2h - 3$:

$$a - b = -2h, \quad a + b = 4x + 2h - 6 = 2(2x + h - 3).$$

Logo o numerador é $(-2h) \cdot 2(2x + h - 3)$, e:

$$\text{Parte 1} = \frac{5 \cdot (-2h) \cdot 2(2x + h - 3)}{h(2x + 2h - 3)^2(2x - 3)^2} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \frac{-20(2x - 3)}{(2x - 3)^4} = -\frac{20}{(2x - 3)^3}.$$

Parte 2. Racionalizamos multiplicando por $\frac{\sqrt{2x - 3} + \sqrt{2x + 2h - 3}}{\sqrt{2x - 3} + \sqrt{2x + 2h - 3}}$:

$$\frac{\sqrt{2x - 3} - \sqrt{2x + 2h - 3}}{h} = \frac{(2x - 3) - (2x + 2h - 3)}{h(\sqrt{2x - 3} + \sqrt{2x + 2h - 3})} = \frac{-2h}{h(\sqrt{2x - 3} + \sqrt{2x + 2h - 3})} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \frac{-2}{2\sqrt{2x - 3}} = -\frac{1}{\sqrt{2x - 3}}$$

Resultado:

$$f'(x) = -\frac{20}{(2x - 3)^3} - \frac{1}{\sqrt{2x - 3}}.$$

Verificação pela regra da cadeia. Reescrevendo $f(x) = 5(2x - 3)^{-2} - (2x - 3)^{1/2}$:

$$f'(x) = 5 \cdot (-2)(2x - 3)^{-3} \cdot 2 - \frac{1}{2}(2x - 3)^{-1/2} \cdot 2 = -\frac{20}{(2x - 3)^3} - \frac{1}{\sqrt{2x - 3}}. \quad \checkmark$$

7.1.2 Exercício 2 — Produto com Cadeia Dupla: $g(x) = 3x\sqrt{x^2 - \sqrt{x^2 + x}}$

Identificamos $g = f_1 \cdot f_2$ com

$$f_1(x) = 3x, \quad f_2(x) = \sqrt{x^2 - \sqrt{x^2 + x}} = (x^2 - (x^2 + x)^{1/2})^{1/2}.$$

Claramente $f_1'(x) = 3$.

Derivada de f_2 — cadeia dupla. Seja $u = x^2 - \sqrt{x^2 + x}$. Então $f_2 = u^{1/2}$, logo:

$$f_2'(x) = \frac{1}{2}u^{-1/2} \cdot u'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{x^2 - \sqrt{x^2 + x}}}.$$

Para $u'(x)$, note que $u = x^2 - (x^2 + x)^{1/2}$:

$$u'(x) = 2x - \frac{1}{2}(x^2 + x)^{-1/2} \cdot (2x + 1) = 2x - \frac{2x + 1}{2\sqrt{x^2 + x}}.$$

Portanto:

$$f_2'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 - \sqrt{x^2 + x}}} \left(2x - \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2 + x}} \right).$$

Aplicando a regra do produto:

$$g'(x) = 3\sqrt{x^2 - \sqrt{x^2 + x}} + \frac{3x}{2\sqrt{x^2 - \sqrt{x^2 + x}}} \left(2x - \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2 + x}} \right).$$

7.1.3 Exercício 3 — Análise Completa: $f(x) = (x-1)(x-4)(x-5)$ (Teste 1 — 2022)

7.1.3.1 1') Sinal de $f'(x)$

Agrupamos os dois primeiros fatores e aplicamos a regra do produto em $[(x-1)(x-4)] \cdot (x-5)$:

$$f'(x) = [(x-1)(x-4)]'(x-5) + (x-1)(x-4) = (2x-5)(x-5) + (x^2 - 5x + 4).$$

Expandindo:

$$(2x-5)(x-5) = 2x^2 - 15x + 25, \quad x^2 - 5x + 4.$$

$$f'(x) = 3x^2 - 20x + 29.$$

Zeros de f' : $\Delta = 400 - 4 \cdot 3 \cdot 29 = 400 - 348 = 52 = 4 \cdot 13$.

$$x = \frac{20 \pm \sqrt{52}}{6} = \frac{20 \pm 2\sqrt{13}}{6} = \frac{10 \pm \sqrt{13}}{3}.$$

Portanto:

$$x_0 = \frac{10 - \sqrt{13}}{3} \approx 2,13 \quad \text{e} \quad x_1 = \frac{10 + \sqrt{13}}{3} \approx 4,54.$$

Como $f'(x) = 3(x-x_0)(x-x_1)$ com coeficiente positivo:

Intervalo	Sinal de f'	Comportamento
$x < x_0$	+	Crescente
$x = x_0$	0	Máximo local
$x_0 < x < x_1$	-	Decrescente
$x = x_1$	0	Mínimo local
$x > x_1$	+	Crescente

7.1.3.2 2') Sinal de $f''(x)$

$$f''(x) = 6x - 20.$$

$$f''(x) > 0 \iff x > \frac{10}{3} \quad (\text{convexa}); \quad f''(x) < 0 \iff x < \frac{10}{3} \quad (\text{côncava}).$$

Ponto de inflexão: $x = \frac{10}{3} \approx 3,33$, com $f\left(\frac{10}{3}\right) = \frac{70}{27} \approx 2,59$.

Confirmação com o teste da segunda derivada:

- $f''(x_0) = 6 \cdot \frac{10 - \sqrt{13}}{3} - 20 = -2\sqrt{13} < 0 \Rightarrow x_0$ é **máximo local**.
- $f''(x_1) = 6 \cdot \frac{10 + \sqrt{13}}{3} - 20 = +2\sqrt{13} > 0 \Rightarrow x_1$ é **mínimo local**.

7.1.3.3 3') Esboço do gráfico

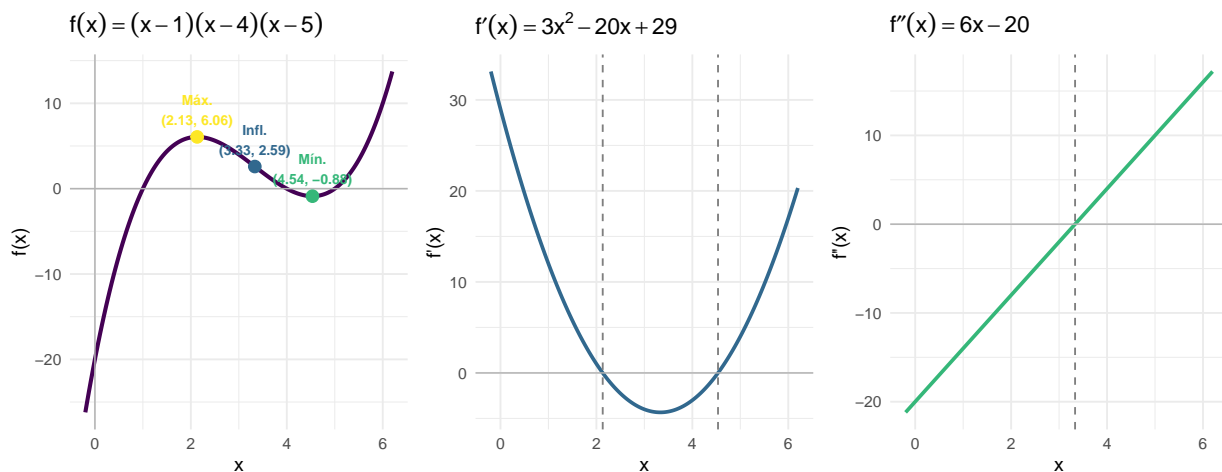


Figura 22: Análise completa de $f(x) = (x-1)(x-4)(x-5)$: máximo local em $x_0 = (10 - \sqrt{13})/3$, mínimo local em $x_1 = (10 + \sqrt{13})/3$, inflexão em $x = 10/3$.

8 Testes Anteriores - Teste 1

8.1 Teste 1 — 16 de março de 2024

8.1.1 Questão 1 (3 pontos)

Considere a função:

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)^2} + \sqrt{x}.$$

1. (2 pontos) Utilizando a definição formal, encontre a derivada de $f(x)$.
2. (1 ponto) Obtenha o domínio de $f(x)$.

8.1.1.1 Gabarito

8.1.1.1.1 Parte 1 — Derivada pela Definição Formal

Pela **linearidade do limite**, a derivada de uma soma é a soma das derivadas:

$$f'(x) = \left[\frac{1}{(x-1)^2} \right]' + [\sqrt{x}]'.$$

Derivada de $\frac{1}{(x-1)^2}$.

$$\left[\frac{1}{(x-1)^2} \right]' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{(x+h-1)^2} - \frac{1}{(x-1)^2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x-1)^2 - (x+h-1)^2}{h(x+h-1)^2(x-1)^2}.$$

Fatoramos o numerador como diferença de quadrados:

$$(x-1)^2 - (x+h-1)^2 = [(x-1) - (x+h-1)][(x-1) + (x+h-1)] = (-h)(2x+h-2).$$

Substituindo e cancelando h :

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h(2x+h-2)}{h(x+h-1)^2(x-1)^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-(2x+h-2)}{(x+h-1)^2(x-1)^2} = \frac{-(2x-2)}{(x-1)^4} = -\frac{2}{(x-1)^3}.$$

Derivada de \sqrt{x} .

$$[\sqrt{x}]' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h) - x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Resultado:

$$f'(x) = -\frac{2}{(x-1)^3} + \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

8.1.1.1.2 Parte 2 — Domínio

Analisamos as restrições de cada parcela:

- \sqrt{x} : exige $x \geq 0$.
- $\frac{1}{(x-1)^2}$: exige $(x-1)^2 \neq 0$, ou seja, $x \neq 1$.

Combinando:

$$\text{Dom}(f) = [0, 1) \cup (1, +\infty).$$

8.1.2 Questão 2 (3 pontos)

Utilizando os teoremas de derivação, calcule a derivada das funções:

$$f(x) = \frac{x^4 + 2x^2\sqrt{x-1}}{x\sqrt[3]{3x^4 - 5x^2}}, \quad g(x) = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + x^2}}}.$$

8.1.2.1 Gabarito

8.1.2.1.1 Derivada de $f(x)$

Identificamos numerador e denominador:

$$N(x) = x^4 + 2x^2(x-1)^{1/2}, \quad D(x) = x(3x^4 - 5x^2)^{1/3}.$$

Derivada do numerador (regra da soma + regra do produto na segunda parcela):

$$N'(x) = 4x^3 + \left[4x(x-1)^{1/2} + 2x^2 \cdot \frac{1}{2}(x-1)^{-1/2} \right] = 4x^3 + 4x\sqrt{x-1} + \frac{x^2}{\sqrt{x-1}}.$$

Derivada do denominador (regra do produto):

$$\begin{aligned} D'(x) &= (3x^4 - 5x^2)^{1/3} + x \cdot \frac{1}{3}(3x^4 - 5x^2)^{-2/3}(12x^3 - 10x) \\ &= \sqrt[3]{3x^4 - 5x^2} + \frac{2x^2(6x^2 - 5)}{3(3x^4 - 5x^2)^{2/3}}. \end{aligned}$$

Aplicando a regra do quociente:

$$f'(x) = \frac{N'(x)D(x) - N(x)D'(x)}{[D(x)]^2}.$$

8.1.2.1.2 Derivada de $g(x)$

Decompõe-se em três camadas:

$$u_1 = 1 + x^2, \quad u_2 = 1 + \sqrt{u_1}, \quad u_3 = 1 + \sqrt{u_2}, \quad g = \sqrt{u_3}.$$

Aplicando a regra da cadeia de fora para dentro:

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{u_3}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{u_2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{u_1}} \cdot 2x$$

$$g'(x) = \frac{x}{4\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}}}.$$

8.1.3 Questão 3 (4 pontos)

Dada a função $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$:

1. **(3,5 pontos)** Encontre os intervalos onde a função é crescente, decrescente, côncava e convexa, e os eventuais pontos de máximo, mínimo e inflexão.
2. **(0,5 pontos)** Faça um esboço do gráfico.

8.1.3.1 Gabarito

8.1.3.1.1 Expansão e derivadas

Expandindo $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$:

$$(x-1)(x-2) = x^2 - 3x + 2 \implies f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6.$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 11, \quad f''(x) = 6x - 12 = 6(x-2).$$

8.1.3.1.2 Pontos críticos

Resolvemos $f'(x) = 0$:

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 132}}{6} = \frac{12 \pm 2\sqrt{3}}{6} = 2 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Seja $x_1 = 2 - \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 1,42$ e $x_2 = 2 + \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 2,58$.

Classificação pela derivada segunda:

- $f''(x_1) = 6\left(2 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) - 12 = -2\sqrt{3} < 0 \implies x_1$ é **máximo local**.
- $f''(x_2) = 6\left(2 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) - 12 = +2\sqrt{3} > 0 \implies x_2$ é **mínimo local**.

Valores: com $a = \frac{\sqrt{3}}{3}$, temos $a^2 = \frac{1}{3}$ e $1 - a^2 = \frac{2}{3}$:

$$f(x_1) = a(1 - a^2) = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{9} \approx 0,385.$$

$$f(x_2) = -a(1 - a^2) = -\frac{2\sqrt{3}}{9} \approx -0,385.$$

8.1.3.1.3 Ponto de inflexão

$$f''(x) = 0 \implies x = 2; f(2) = (1)(0)(-1) = 0.$$

Mudança de sinal de f'' : negativo para positivo em $x = 2$ confirma inflexão.

8.1.3.1.4 Tabela de análise

Intervalo	$f'(x)$	$f''(x)$	Comportamento
$(-\infty, x_1)$	+	-	Crescente, côncava
$(x_1, 2)$	-	-	Decrescente, côncava
$(2, x_2)$	-	+	Decrescente, convexa
$(x_2, +\infty)$	+	+	Crescente, convexa

8.1.3.1.5 Zeros

$$f(x) = 0 \implies x = 1, 2, 3.$$

8.1.3.1.6 Esboço do gráfico

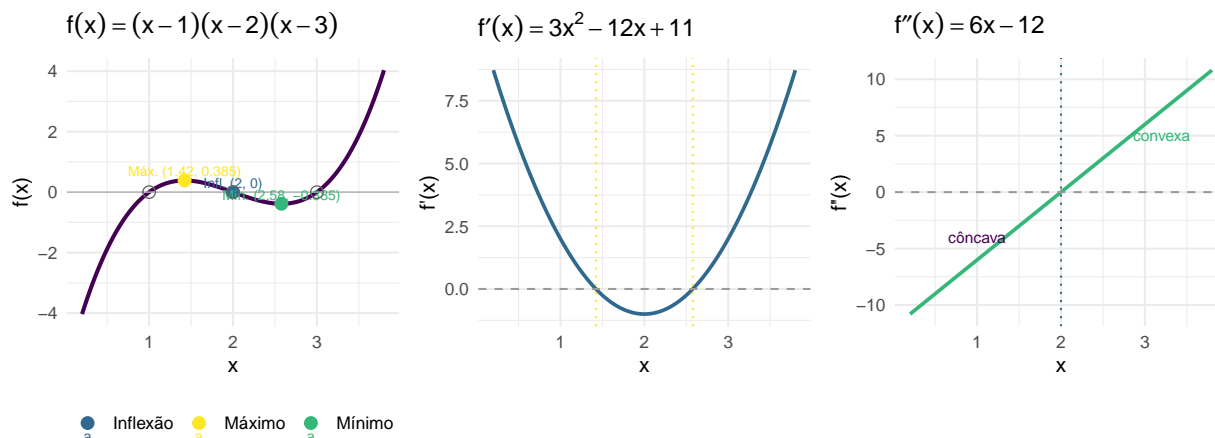


Figura 23: Análise completa de $f(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$: máximo local, mínimo local, ponto de inflexão e zeros.

8.2 Teste 1 — 29 de março de 2025

8.2.1 Questão 1 (3 pontos)

Considere a função:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}}.$$

1. (2 pontos) Utilizando a definição formal, encontre a derivada de $f(x)$.
2. (1 ponto) Obtenha o domínio de $f(x)$.

8.2.1.1 Gabarito

8.2.1.1.1 Parte 1 — Derivada pela Definição Formal

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\frac{1}{\sqrt{4 - (x + h)^2}} - \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}} \right].$$

Reduzimos as frações ao mesmo denominador:

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4 - x^2} - \sqrt{4 - (x + h)^2}}{h \sqrt{4 - (x + h)^2} \sqrt{4 - x^2}}.$$

Racionalização pelo conjugado $\sqrt{4 - x^2} + \sqrt{4 - (x + h)^2}$:

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(4 - x^2) - (4 - (x + h)^2)}{h \sqrt{4 - (x + h)^2} \sqrt{4 - x^2} [\sqrt{4 - x^2} + \sqrt{4 - (x + h)^2}]}.$$

O numerador simplifica para $(x + h)^2 - x^2 = h(2x + h)$. Cancelando h :

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2x + h}{\sqrt{4 - (x + h)^2} \sqrt{4 - x^2} [\sqrt{4 - x^2} + \sqrt{4 - (x + h)^2}]} = \frac{2x}{(4 - x^2) \cdot 2\sqrt{4 - x^2}}.$$

$$f'(x) = \frac{x}{(4 - x^2)^{3/2}}.$$

Verificação pela regra da cadeia em $f(x) = (4 - x^2)^{-1/2}$:

$$f'(x) = -\frac{1}{2}(4 - x^2)^{-3/2} \cdot (-2x) = \frac{x}{(4 - x^2)^{3/2}}. \quad \checkmark$$

8.2.1.1.2 Parte 2 — Domínio

Como $\sqrt{4 - x^2}$ aparece no **denominador**, exige-se $4 - x^2 > 0$ (estritamente, para não dividir por zero), ou seja, $x^2 < 4$:

$$\text{Dom}(f) = (-2, 2).$$

8.2.2 Questão 2 (3 pontos)

Utilizando os teoremas de derivação, calcule a derivada das funções:

$$(a) \quad f(x) = \frac{x^4 + 2x^2\sqrt{x}}{x^2 \sqrt[4]{3x^8 - x^4}}, \quad (b) \quad g(x) = \sqrt{1 + \frac{x-1}{x+1}}.$$

8.2.2.1 Gabarito

8.2.2.1.1 (a) Derivada de $f(x)$

Identificamos:

$$N(x) = x^4 + 2x^2(x)^{1/2} = x^4 + 2x^{5/2}, \quad D(x) = x^2(3x^8 - x^4)^{1/4}.$$

Derivada do numerador (regra da soma + regra da potência):

$$N'(x) = 4x^3 + 2 \cdot \frac{5}{2} x^{3/2} = 4x^3 + 5x\sqrt{x}.$$

Derivada do denominador (regra do produto, depois cadeia):

$$\begin{aligned}
 D'(x) &= 2x(3x^8 - x^4)^{1/4} + x^2 \cdot \frac{1}{4}(3x^8 - x^4)^{-3/4} \cdot (24x^7 - 4x^3) \\
 &= 2x \sqrt[4]{3x^8 - x^4} + \frac{x^5(6x^4 - 1)}{(3x^8 - x^4)^{3/4}}.
 \end{aligned}$$

Regra do quociente:

$$f'(x) = \frac{N'(x)D(x) - N(x)D'(x)}{[D(x)]^2}.$$

8.2.2.1.2 (b) Derivada de $g(x)$

Simplificação prévia. Reduzindo a expressão sob a raiz ao mesmo denominador:

$$1 + \frac{x-1}{x+1} = \frac{(x+1) + (x-1)}{x+1} = \frac{2x}{x+1}.$$

Logo $g(x) = \sqrt{\frac{2x}{x+1}}$, com domínio $(-\infty, -1) \cup [0, +\infty)$.

Regra da cadeia. Seja $u(x) = \frac{2x}{x+1}$, com

$$u'(x) = \frac{2(x+1) - 2x}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}.$$

Então $g = u^{1/2}$ e $g'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$:

$$g'(x) = \frac{2/(x+1)^2}{2\sqrt{2x/(x+1)}} = \frac{1}{(x+1)^2} \cdot \sqrt{\frac{x+1}{2x}} = \frac{1}{(x+1)^{3/2}\sqrt{2x}}.$$

$$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x}(x+1)^3}.$$

8.2.3 Questão 3 (4 pontos)

Considere a função $f(x) = (x-1)^2(x-3)$.

- (3,5 pontos)** Encontre os intervalos onde a função é crescente, decrescente, côncava e convexa, e os eventuais pontos de máximo, mínimo e inflexão.
- (0,5 pontos)** Faça um esboço do gráfico.

8.2.3.1 Gabarito

8.2.3.1.1 Expansão e derivadas

$$f(x) = (x-1)^2(x-3) = (x^2 - 2x + 1)(x-3) = x^3 - 5x^2 + 7x - 3.$$

$$f'(x) = 3x^2 - 10x + 7, \quad f''(x) = 6x - 10 = 2(3x - 5).$$

8.2.3.1.2 Pontos críticos

$f'(x) = 0$: pela fórmula de Bhaskara,

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 84}}{6} = \frac{10 \pm 4}{6} \implies x = 1 \text{ ou } x = \frac{7}{3}.$$

(Alternativamente: $f'(x) = 3x^2 - 10x + 7 = (x-1)(3x-7)$.)

Classificação pela derivada segunda:

- $f''(1) = -4 < 0 \implies x = 1$ é **máximo local**, $f(1) = 0$.
- $f''(7/3) = 6 \cdot \frac{7}{3} - 10 = 4 > 0 \implies x = 7/3$ é **mínimo local**.

Valor no mínimo: $f(7/3) = \left(\frac{4}{3}\right)^2 \left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{32}{27} \approx -1,185$.

8.2.3.1.3 Ponto de inflexão

$f''(x) = 0 \implies x = \frac{5}{3}$; $f(5/3) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(-\frac{4}{3}\right) = -\frac{16}{27}$. Mudança de sinal de f'' confirma a inflexão.

8.2.3.1.4 Zeros

$f(x) = (x-1)^2(x-3) = 0 \implies x = 1$ (raiz dupla, tangencia o eixo) e $x = 3$.

8.2.3.1.5 Tabela de análise

Intervalo	$f'(x)$	$f''(x)$	Comportamento
$(-\infty, 1)$	+	-	Crescente, côncava
$(1, 5/3)$	-	-	Decrescente, côncava
$(5/3, 7/3)$	-	+	Decrescente, convexa
$(7/3, +\infty)$	+	+	Crescente, convexa

8.2.3.1.6 Esboço do gráfico

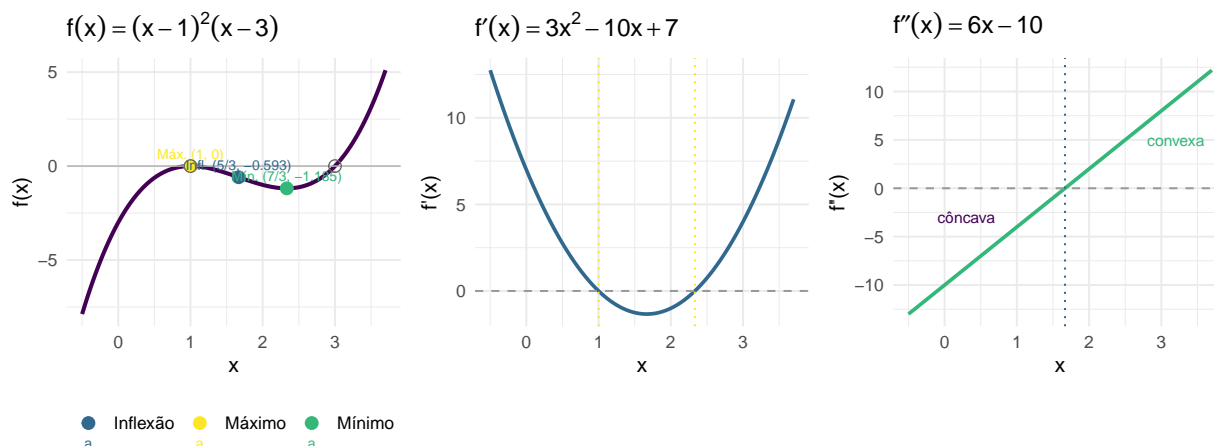


Figura 24: Análise completa de $f(x) = (x-1)^2(x-3)$: máximo local em $x = 1$ (raiz dupla — a curva tangencia o eixo), mínimo local em $x = 7/3$ e ponto de inflexão em $x = 5/3$.

8.3 Teste 1 — 28 de março de 2026

8.3.1 Questão 1 (3 pontos)

Considere a função:

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 9}.$$

- (2 pontos) Utilizando a definição formal, encontre a derivada de $f(x)$.
- (1 ponto) Obtenha o domínio de $f(x)$.

8.3.1.1 Gabarito

8.3.1.1.1 Parte 1 — Derivada pela Definição Formal

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{(x+h)^2 - 9} - \sqrt{x^2 - 9}}{h}.$$

Racionalizamos multiplicando por $\frac{\sqrt{(x+h)^2 - 9} + \sqrt{x^2 - 9}}{\sqrt{(x+h)^2 - 9} + \sqrt{x^2 - 9}}$:

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - 9 - (x^2 - 9)}{h(\sqrt{(x+h)^2 - 9} + \sqrt{x^2 - 9})}.$$

O numerador simplifica para $2xh + h^2$:

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x+h)}{h(\sqrt{(x+h)^2 - 9} + \sqrt{x^2 - 9})} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 9}}.$$

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 9}}, \quad |x| > 3.$$

8.3.1.1.2 Parte 2 — Domínio

$\sqrt{x^2 - 9}$ exige $x^2 - 9 \geq 0$, ou seja, $|x| \geq 3$:

$$\text{Dom}(f) = (-\infty, -3] \cup [3, +\infty).$$

8.3.2 Questão 2 (3 pontos)

Utilizando os teoremas de derivação, calcule a derivada das funções:

$$(a) \quad f(x) = \frac{x - 4x^4\sqrt{x+5}}{x\sqrt[3]{x^2+9x}}, \quad (b) \quad g(x) = x\sqrt{\frac{x^2-4}{x+2}}.$$

8.3.2.1 Gabarito

8.3.2.1.1 (a) Derivada de $f(x)$

Identificamos:

$$N(x) = x - 4x^4(x+5)^{1/2}, \quad D(x) = x(x^2+9x)^{1/3}.$$

Derivada do numerador (regra da soma + produto na segunda parcela):

$$N'(x) = 1 - [16x^3(x+5)^{1/2} + 4x^4 \cdot \frac{1}{2}(x+5)^{-1/2}] = 1 - 16x^3\sqrt{x+5} - \frac{2x^4}{\sqrt{x+5}}.$$

Derivada do denominador (regra do produto):

$$D'(x) = (x^2+9x)^{1/3} + x \cdot \frac{1}{3}(x^2+9x)^{-2/3}(2x+9) = \sqrt[3]{x^2+9x} + \frac{x(2x+9)}{3(x^2+9x)^{2/3}}.$$

Regra do quociente:

$$f'(x) = \frac{N'(x)D(x) - N(x)D'(x)}{[D(x)]^2}.$$

8.3.2.1.2 (b) Derivada de $g(x)$

Simplificação prévia. Para $x > 2$:

$$\frac{x^2 - 4}{x + 2} = \frac{(x - 2)(x + 2)}{x + 2} = x - 2.$$

Logo $g(x) = x\sqrt{x - 2}$, com domínio $[2, +\infty)$.

Aplicando a regra do produto:

$$g'(x) = \sqrt{x - 2} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x - 2}} = \frac{2(x - 2) + x}{2\sqrt{x - 2}}.$$

$$g'(x) = \frac{3x - 4}{2\sqrt{x - 2}}.$$

8.3.3 Questão 3 (4 pontos)

Considere a função $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.

1. **(3,5 pontos)** Encontre os intervalos onde a função é crescente, decrescente, côncava e convexa, e os eventuais pontos de máximo, mínimo e inflexão.
2. **(0,5 pontos)** Faça um esboço do gráfico.

8.3.3.1 Gabarito

8.3.3.1.1 Derivadas

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2), \quad f''(x) = 6x - 6 = 6(x - 1).$$

8.3.3.1.2 Pontos críticos

$$f'(x) = 0 \implies x = 0 \text{ ou } x = 2.$$

- $f''(0) = -6 < 0 \implies x = 0$ é **máximo local**, $f(0) = 2$.
- $f''(2) = +6 > 0 \implies x = 2$ é **mínimo local**, $f(2) = 8 - 12 + 2 = -2$.

8.3.3.1.3 Ponto de inflexão

$f''(x) = 0 \implies x = 1$; $f(1) = 1 - 3 + 2 = 0$. Mudança de sinal de f'' confirma inflexão.

8.3.3.1.4 Zeros

$f(x) = 0$: nota-se que $x = 1$ é raiz. Fatorando:

$$x^3 - 3x^2 + 2 = (x - 1)(x^2 - 2x - 2) = 0 \implies x = 1 \text{ ou } x = 1 \pm \sqrt{3}.$$

Zeros em $x = 1 - \sqrt{3} \approx -0,73$, $x = 1$ e $x = 1 + \sqrt{3} \approx 2,73$.

8.3.3.1.5 Tabela de análise

Intervalo	$f'(x)$	$f''(x)$	Comportamento
$(-\infty, 0)$	+	-	Crescente, côncava
$(0, 1)$	-	-	Decrescente, côncava
$(1, 2)$	-	+	Decrescente, convexa
$(2, +\infty)$	+	+	Crescente, convexa

8.3.3.1.6 Esboço do gráfico

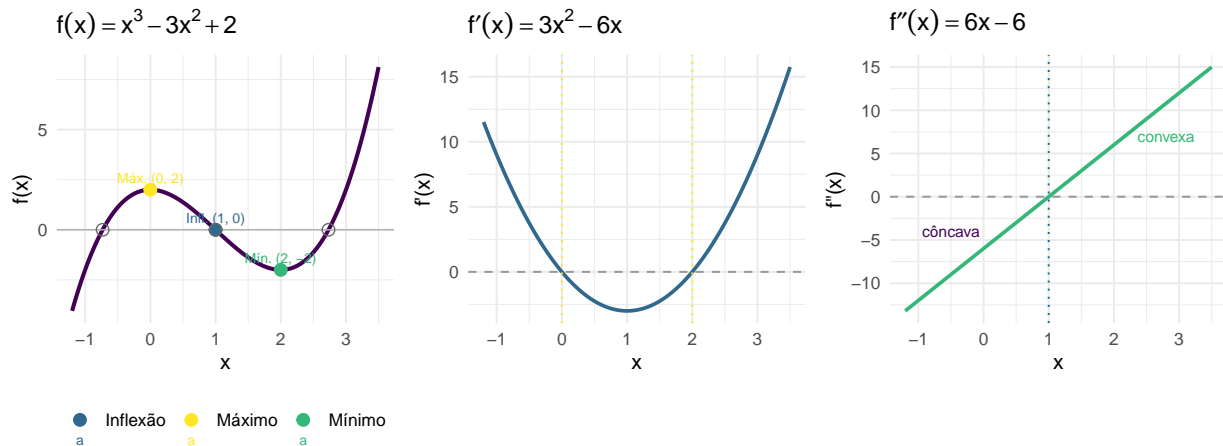


Figura 25: Análise completa de $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$: máximo local, mínimo local, ponto de inflexão e zeros.

9 Antiderivadas (Integral Indefinida)

9.1 Motivação Econômica

A derivada resolve o problema “dado o total, encontre o marginal”. A antiderivada resolve o problema inverso: **dado o marginal, encontre o total**.

- **Custo total a partir do custo marginal.** Se $CMg(q) = 3q^2 - 12q + 15$, qual é o custo total $C(q)$? Integrando: $C(q) = \int CMg(q) dq = q^3 - 6q^2 + 15q + C_0$, onde C_0 é o custo fixo (constante de integração determinada pela condição $C(0) = C_0$).
- **Produto total a partir do produto marginal.** Se $PMgL = \alpha AL^{\alpha-1}$ é o produto marginal do trabalho, então $Q(L) = AL^\alpha + C$ é a função de produção — recuperada por antiderivação.
- **Poupança e acumulação de capital.** Se a taxa de poupança (fluxo) é $s(t)$, o estoque de capital acumulado até o tempo T é $K(T) = K(0) + \int_0^T s(t) dt$. A antiderivada conecta fluxos a estoques — uma das relações mais fundamentais em macroeconomia.
- **Constante de integração como dado inicial.** Em problemas econômicos, a constante C é determinada por uma condição inicial ou de contorno (custo fixo, capital inicial, dívida inicial), tornando a solução única.

9.2 Definição

Definição. Uma função F é chamada de **antiderivada** (ou primitiva) de f em um intervalo I se

$$F'(x) = f(x) \quad \text{para todo } x \in I.$$

Se F é uma antiderivada de f , então $F(x) + C$, para qualquer constante $C \in \mathbb{R}$, também é antiderivada de f . Além disso, toda antiderivada de f tem essa forma.

Notação. A **integral indefinida** de f é o conjunto de todas as antiderivadas de f :

$$\int f(x) dx = F(x) + C,$$

onde C é a **constante de integração**.

A notação $\int \dots dx$ deve ser lida como “a antiderivada em relação a x de...”. O símbolo dx indica a variável de integração.

Observação. Derivação e antiderivação são operações inversas:

$$\frac{d}{dx} \left[\int f(x) dx \right] = f(x) \quad \text{e} \quad \int F'(x) dx = F(x) + C.$$

9.3 Regras de Antiderivação

9.3.1 Potências

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1.$$

Casos especiais:

$$\int a dx = ax + C \quad (\text{constante})$$

$$\int \sqrt{x} dx = \int x^{1/2} dx = \frac{2}{3}x^{3/2} + C$$

$$\int \frac{1}{x^n} dx = \int x^{-n} dx = \frac{x^{-n+1}}{-n+1} + C, \quad n \neq 1.$$

Nota: O caso $n = -1$, isto é, $\int \frac{1}{x} dx$, requer o logaritmo natural e será tratado oportunamente.

9.3.2 Linearidade

$$\int a f(x) dx = a \int f(x) dx \quad (a \in \mathbb{R})$$

$$\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx.$$

9.3.3 Tabela Resumo

$f(x)$	$\int f(x) dx$
a	$ax + C$
$x^n \ (n \neq -1)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
e^x	$e^x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$

9.4 Exercícios Resolvidos

9.4.1 Exercício 4: $\int \frac{3}{x^5} dx$

Reescrevemos $\frac{3}{x^5} = 3x^{-5}$ e aplicamos a regra da potência:

$$\int 3x^{-5} dx = 3 \cdot \frac{x^{-4}}{-4} + C = -\frac{3}{4x^4} + C.$$

9.4.2 Exercício 6: $\int 10\sqrt[3]{x^2} dx$

Reescrevemos $10\sqrt[3]{x^2} = 10x^{2/3}$:

$$\int 10x^{2/3} dx = 10 \cdot \frac{x^{5/3}}{5/3} + C = 10 \cdot \frac{3}{5} x^{5/3} + C = 6x^{5/3} + C.$$

9.4.3 Exercício 28: $\int \frac{27x^3 - 1}{\sqrt[3]{x}} dx$

Dividimos o integrando termo a termo, usando $\sqrt[3]{x} = x^{1/3}$:

$$\frac{27x^3 - 1}{x^{1/3}} = 27x^{3-1/3} - x^{-1/3} = 27x^{8/3} - x^{-1/3}.$$

Integrando:

$$\int (27x^{8/3} - x^{-1/3}) dx = 27 \cdot \frac{x^{11/3}}{11/3} - \frac{x^{2/3}}{2/3} + C = \frac{81}{11}x^{11/3} - \frac{3}{2}x^{2/3} + C.$$

9.4.4 Exercício 27-extra: $\int \sqrt{x} \left(x + \frac{1}{x} \right) dx$

Distribuímos $\sqrt{x} = x^{1/2}$:

$$\sqrt{x} \left(x + \frac{1}{x} \right) = x^{3/2} + x^{-1/2}.$$

Integrando:

$$\int (x^{3/2} + x^{-1/2}) dx = \frac{x^{5/2}}{5/2} + \frac{x^{1/2}}{1/2} + C = \frac{2}{5}x^{5/2} + 2\sqrt{x} + C.$$

9.5 Método de Substituição

9.5.1 Motivação

A regra da cadeia afirma que $[F(g(x))]’ = F’(g(x)) \cdot g’(x)$. Logo, “desfazendo” a cadeia:

$$\int f(g(x)) g’(x) dx = F(g(x)) + C,$$

onde $F’ = f$. Na prática, fazemos a **substituição** $u = g(x)$, $du = g’(x) dx$:

$$\int f(g(x)) g’(x) dx = \int f(u) du = F(u) + C = F(g(x)) + C.$$

O método funciona quando o integrando contém uma função composta $g(x)$ e sua derivada $g’(x)$ (ou múltiplo dela).

9.5.2 Exemplo 1: $\int \sqrt{3x+9} dx$

Fazemos $u = 3x + 9$, de modo que $du = 3 dx$, ou seja, $dx = \frac{du}{3}$:

$$\int \sqrt{3x+9} dx = \int \sqrt{u} \frac{du}{3} = \frac{1}{3} \int u^{1/2} du = \frac{1}{3} \cdot \frac{u^{3/2}}{3/2} + C = \frac{2}{9}(3x+9)^{3/2} + C.$$

9.5.3 Exemplo 2: $\int \sqrt{1-9x} dx$

Fazemos $u = 1 - 9x$, $du = -9 dx$, $dx = -\frac{du}{9}$:

$$\int \sqrt{1-9x} dx = \int u^{1/2} \cdot \left(-\frac{1}{9}\right) du = -\frac{1}{9} \cdot \frac{u^{3/2}}{3/2} + C = -\frac{2}{27}(1-9x)^{3/2} + C.$$

9.5.4 Exemplo 3: $\int x\sqrt{x+2} dx$

Fazemos $u = x + 2$, portanto $x = u - 2$ e $du = dx$:

$$\begin{aligned} \int x\sqrt{x+2} dx &= \int (u-2) u^{1/2} du = \int (u^{3/2} - 2u^{1/2}) du \\ &= \frac{u^{5/2}}{5/2} - 2 \cdot \frac{u^{3/2}}{3/2} + C = \frac{2}{5}(x+2)^{5/2} - \frac{4}{3}(x+2)^{3/2} + C. \end{aligned}$$

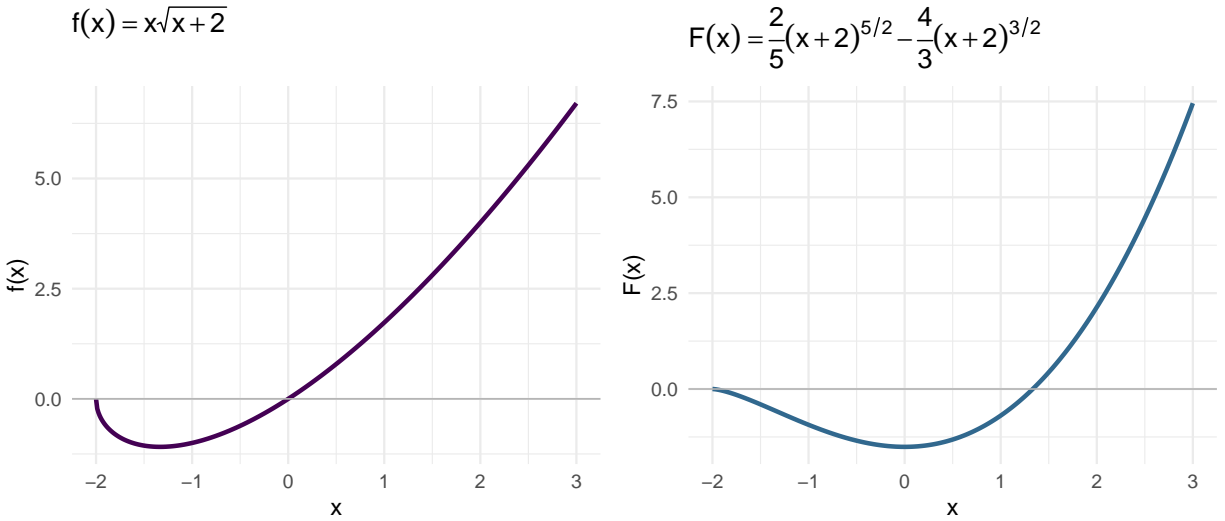


Figura 26: Integrando $f(x) = x\sqrt{x+2}$ (roxo) e sua antiderivada $F(x) = \frac{2}{5}(x+2)^{5/2} - \frac{4}{3}(x+2)^{3/2}$ (azul). Note que $F'(x) = f(x)$ para todo $x \geq -2$.

10 Integral Definida

10.1 Motivação Econômica

A integral definida mede **acumulação**: área sob uma curva, fluxo acumulado ao longo do tempo, ou agregação de variações marginais sobre um intervalo. Em Economia, ela aparece em pelo menos quatro contextos essenciais.

Excedente do consumidor e do produtor. Dado um mercado em equilíbrio com preço p^* e quantidade q^* , o excedente do consumidor é a área entre a curva de demanda inversa $P^D(q)$ e o preço de mercado:

$$EC = \int_0^{q^*} P^D(q) dq - p^*q^*.$$

O excedente do produtor é a área entre o preço e a curva de oferta inversa $P^S(q)$:

$$EP = p^*q^* - \int_0^{q^*} P^S(q) dq.$$

Valor presente de fluxos contínuos. Se uma firma recebe um fluxo de lucros $\pi(t)$ ao longo do tempo, descontado à taxa r , o valor presente é:

$$VP = \int_0^T \pi(t) e^{-rt} dt.$$

A integral soma infinitos fluxos instantâneos ponderados pelo fator de desconto — generalização contínua da fórmula de valor presente discreta.

Acumulação de capital no modelo de Solow. O investimento bruto $I(t)$ ao longo do tempo determina o estoque de capital:

$$K(T) = K(0) + \int_0^T [I(t) - \delta K(t)] dt,$$

onde δ é a taxa de depreciação. A integral acumula os fluxos líquidos de investimento.

PIB como soma de valor adicionado. Conceitualmente, o PIB de um período pode ser visto como a integral (soma contínua) do valor adicionado em cada instante, conectando a medida de fluxo do produto nacional à noção de acumulação.

10.2 Operador Somatório

O **operador somatório** (ou sigma) é a notação compacta para somas finitas. Para uma sequência a_1, a_2, \dots, a_n :

$$\sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

10.2.1 Propriedades

Propriedade	Fórmula
Soma de constante	$\sum_{i=1}^n c = nc$
Multiplicação por escalar	$\sum_{i=1}^n c a_i = c \sum_{i=1}^n a_i$
Linearidade	$\sum_{i=1}^n [a_i \pm b_i] = \sum_{i=1}^n a_i \pm \sum_{i=1}^n b_i$
Soma dos naturais	$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$
Soma dos quadrados	$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
Soma dos cubos	$\sum_{i=1}^n i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$

10.3 Cálculo de Área: Motivação

Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua com $f(x) \geq 0$. Queremos calcular a **área da região** compreendida entre o gráfico de f e o eixo x no intervalo $[a, b]$.

A ideia é aproximar essa área por retângulos de largura uniforme $\Delta x = \frac{b-a}{n}$.

10.3.1 Somas de Riemann

Dividimos $[a, b]$ em n subintervalos de tamanho igual:

$$x_0 = a, \quad x_i = a + i \Delta x \quad (i = 0, 1, \dots, n), \quad x_n = b.$$

Soma dos retângulos inscritos (usando o extremo esquerdo de cada subintervalo):

$$S_{\text{esq}} = \sum_{i=1}^n f(x_{i-1}) \Delta x.$$

Soma dos retângulos circunscritos (usando o extremo direito):

$$S_{\text{dir}} = \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x.$$

Para f contínua em $[a, b]$, ambas as somas convergem para o mesmo limite quando $n \rightarrow \infty$.

10.3.2 Exemplo: $f(x) = x^2$ em $[0, 3]$

Calculamos S_{dir} com n retângulos: $\Delta x = \frac{3}{n}$, $x_i = \frac{3i}{n}$.

$$S_{\text{dir}} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{3i}{n}\right)^2 \cdot \frac{3}{n} = \frac{27}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{27}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{27(n+1)(2n+1)}{6n^2}.$$

Tomando o limite:

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{\text{dir}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{27(n+1)(2n+1)}{6n^2} = \frac{27 \cdot 2}{6} = 9.$$

Analogamente, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{\text{esq}} = 9$.

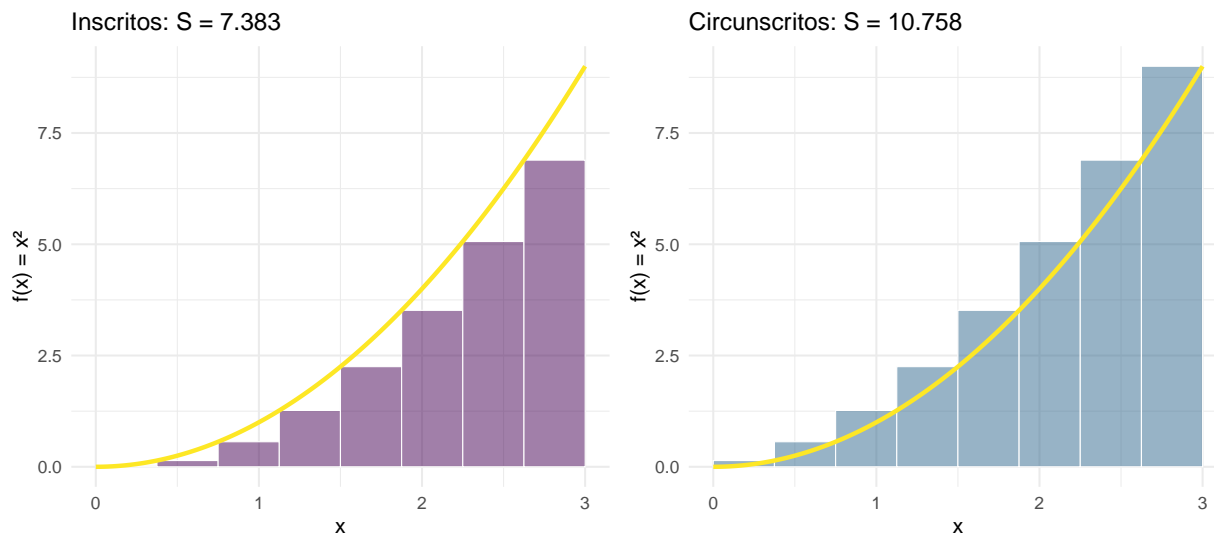


Figura 27: Somas de Riemann para $f(x) = x^2$ em $[0, 3]$ com $n = 8$ retângulos. À esquerda: retângulos inscritos (S_{esq}). À direita: retângulos circunscritos (S_{dir}). A área exata é 9.

10.4 Definição Formal da Integral Definida

Definição (Integral de Riemann). Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada. Para cada partição $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ com $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ e qualquer ponto $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$, defina a **soma de Riemann**:

$$R_n = \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x_i.$$

Se o limite $\lim_{\|P\| \rightarrow 0} R_n$ existe e é o mesmo independentemente da escolha da partição e dos pontos x_i^* , então f é **integrável** em $[a, b]$ e escrevemos:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x_i.$$

Interpretação geométrica. Quando $f(x) \geq 0$, $\int_a^b f(x) dx$ é a área sob o gráfico de f entre a e b . Quando f troca de sinal, a integral computa a **área com sinal** (positiva onde $f > 0$, negativa onde $f < 0$).

10.4.1 Propriedades da Integral Definida

$$\int_a^a f(x) dx = 0, \quad \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$

$$\int_a^b c f(x) dx = c \int_a^b f(x) dx, \quad \int_a^b [f \pm g] dx = \int_a^b f dx \pm \int_a^b g dx.$$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \quad (a \leq c \leq b).$$

Propriedade de comparação. Se $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$, então:

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx.$$

Em particular, se $f(x) \geq 0$, então $\int_a^b f(x) dx \geq 0$.

10.5 Teorema do Valor Médio para Integrais

Teorema. Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua. Então existe $X \in [a, b]$ tal que:

$$\int_a^b f(x) dx = f(X)(b - a).$$

O valor $f(X)$ é chamado de **valor médio** de f no intervalo $[a, b]$.

Interpretação geométrica. Existe um ponto X onde o retângulo de base $(b - a)$ e altura $f(X)$ tem exatamente a mesma área que a região sob o gráfico de f .

Prova. Como f é contínua em $[a, b]$, pelo Teorema de Weierstrass existem $m = \min f$ e $M = \max f$. Então $m \leq f(x) \leq M$ para todo x , logo:

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b - a) \Rightarrow m \leq \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) dx \leq M.$$

Pelo Teorema do Valor Intermediário, existe $X \in [a, b]$ com $f(X) = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) dx$. ■

10.6 Teoremas Fundamentais do Cálculo

Os Teoremas Fundamentais estabelecem a conexão profunda entre derivadas e integrais — as duas operações centrais do Cálculo.

10.6.1 Primeiro Teorema Fundamental

Teorema. Seja f contínua em $[a, b]$. Defina a função acumulada:

$$G(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad x \in [a, b].$$

Então G é diferenciável em (a, b) e

$$G'(x) = f(x).$$

Interpretação: A taxa de variação da área acumulada é exatamente o valor da função naquele ponto. Derivar “desfaz” a integração.

Prova (esboço).

$$G'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{G(x+h) - G(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt.$$

Pelo Teorema do Valor Médio para Integrais, existe $c_h \in [x, x+h]$ tal que $\int_x^{x+h} f(t) dt = f(c_h) \cdot h$. Logo:

$$G'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(c_h) = f(x),$$

pois $c_h \rightarrow x$ e f é contínua. ■

10.6.2 Segundo Teorema Fundamental (Regra de Barrow)

Teorema. Seja f contínua em $[a, b]$ e F qualquer antiderivada de f ($F' = f$). Então:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) =: \left[F(x) \right]_a^b.$$

Interpretação: Para calcular a integral definida de uma função contínua, basta encontrar uma antiderivada e avaliar nos extremos — sem precisar calcular limites de somas de Riemann.

Prova (esboço). Seja $G(x) = \int_a^x f(t) dt$. Pelo Primeiro Teorema, $G' = f$. Como $F' = f = G'$, temos $F(x) = G(x) + C$ para alguma constante C . Avaliando:

$$F(b) - F(a) = [G(b) + C] - [G(a) + C] = G(b) - G(a) = \int_a^b f(t) dt - 0 = \int_a^b f(t) dt. \quad \blacksquare$$

10.7 Exemplos com a Regra de Barrow

10.7.1 Exemplo 1: $\int_0^3 x^2 dx$

Antiderivada: $F(x) = \frac{x^3}{3}$.

$$\int_0^3 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^3 = \frac{27}{3} - 0 = 9.$$

Confirma o resultado obtido via somas de Riemann.

10.7.2 Exemplo 2: $\int_1^4 \sqrt{x} dx$

Antiderivada: $F(x) = \frac{2}{3}x^{3/2}$.

$$\int_1^4 \sqrt{x} dx = \left[\frac{2}{3}x^{3/2} \right]_1^4 = \frac{2}{3}(8) - \frac{2}{3}(1) = \frac{14}{3}.$$

10.7.3 Exemplo 3: $\int_0^2 (3x^2 - 2x + 1) dx$

$$\int_0^2 (3x^2 - 2x + 1) dx = [x^3 - x^2 + x]_0^2 = (8 - 4 + 2) - 0 = 6.$$

10.8 Integral Definida com Substituição

O método de substituição também se aplica a integrais definidas. Ao substituir $u = g(x)$, os limites de integração devem ser convertidos: $u(a)$ e $u(b)$.

10.8.1 Exemplo: $\int_0^1 x e^{x^2} dx$

Fazemos $u = x^2$, $du = 2x dx$. Novos limites: $u(0) = 0$, $u(1) = 1$.

$$\int_0^1 x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 e^u du = \frac{1}{2} [e^u]_0^1 = \frac{e-1}{2} \approx 0,859.$$

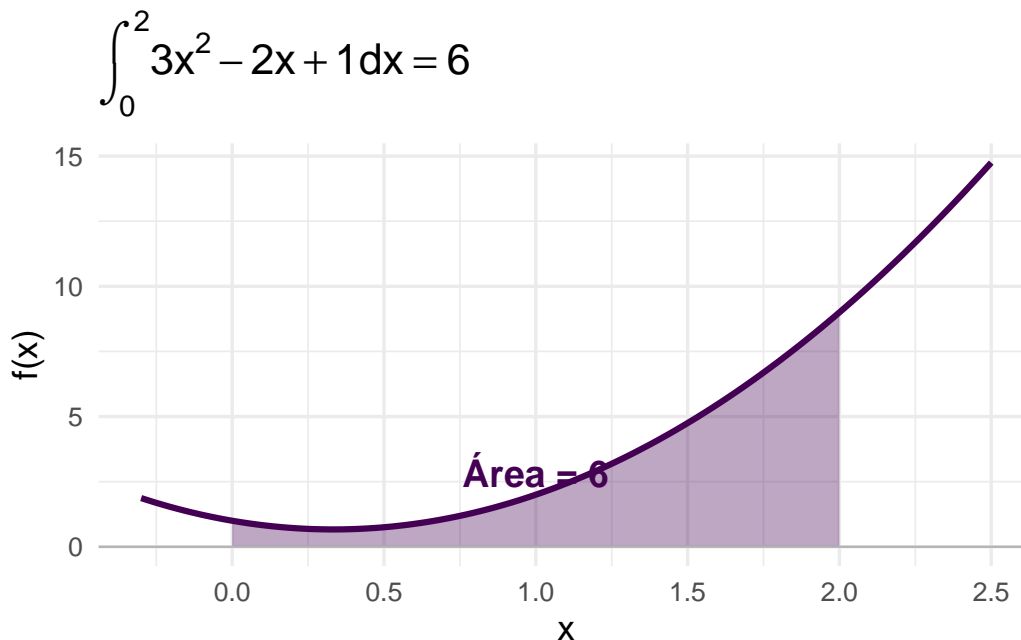


Figura 28: Área sob $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ no intervalo $[0, 2]$. A área exata é 6, confirmada pela Regra de Barrow.

10.9 Exercícios Resolvidos

10.9.1 Exercício 1 — $\int_0^4 (x^3 - x^2 + 1) dx$

Aplicando a regra da potência em cada termo:

$$\int_0^4 (x^3 - x^2 + 1) dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + x \right]_0^4 = \left(64 - \frac{64}{3} + 4 \right) - 0 = 68 - \frac{64}{3} = \frac{204 - 64}{3} = \frac{140}{3}.$$

$$\boxed{\int_0^4 (x^3 - x^2 + 1) dx = \frac{140}{3}.$$

10.9.2 Exercício 2 — $\int_{-1}^3 \frac{dx}{(x+2)^3}$

Reconhecemos $(x+2)^{-3}$, cuja antiderivada é $\frac{(x+2)^{-2}}{-2} = -\frac{1}{2(x+2)^2}$. Verificando: $\left[-\frac{1}{2(x+2)^2} \right]' = \frac{1}{(x+2)^3} \cdot \checkmark$

$$\int_{-1}^3 \frac{dx}{(x+2)^3} = \left[-\frac{1}{2(x+2)^2} \right]_{-1}^3 = -\frac{1}{2(5)^2} - \left(-\frac{1}{2(1)^2} \right) = -\frac{1}{50} + \frac{1}{2} = \frac{-1+25}{50} = \frac{24}{50} = \frac{12}{25}.$$

$$\boxed{\int_{-1}^3 \frac{dx}{(x+2)^3} = \frac{12}{25}.$$

10.9.3 Exercício 3 — $\int_0^3 x\sqrt{1+x} dx$

Substituição. Fazemos $u = 1 + x$, logo $x = u - 1$ e $du = dx$. Novos limites: $u(0) = 1$, $u(3) = 4$.

$$\int_0^3 x\sqrt{1+x} dx = \int_1^4 (u-1)\sqrt{u} du = \int_1^4 (u^{3/2} - u^{1/2}) du = \left[\frac{2u^{5/2}}{5} - \frac{2u^{3/2}}{3} \right]_1^4.$$

Avaliando nos limites:

$$\text{Em } u = 4: \quad \frac{2 \cdot 32}{5} - \frac{2 \cdot 8}{3} = \frac{64}{5} - \frac{16}{3} = \frac{192 - 80}{15} = \frac{112}{15}.$$

$$\text{Em } u = 1: \quad \frac{2}{5} - \frac{2}{3} = \frac{6 - 10}{15} = -\frac{4}{15}.$$

$$\int_0^3 x\sqrt{1+x} dx = \frac{112}{15} - \left(-\frac{4}{15} \right) = \frac{116}{15}.$$

$$\boxed{\int_0^3 x\sqrt{1+x} dx = \frac{116}{15}.$$

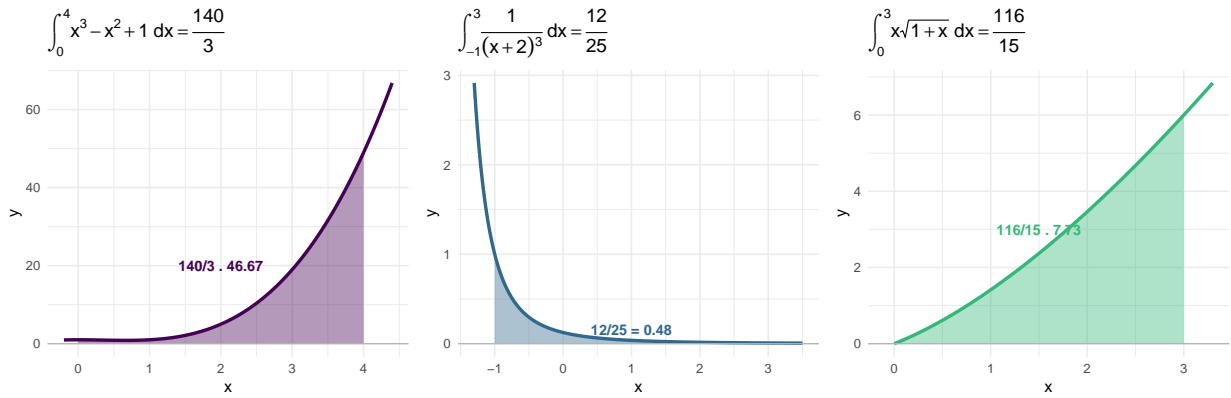


Figura 29: Exercícios resolvidos: áreas calculadas pela Regra de Barrow e substituição.

11 Monitoria 4

11.1 Conexão entre Derivada e Integral

Dois conceitos centrais do Cálculo são, em certa medida, opostos e complementares:

- **Derivada:** mede a *inclinação da reta tangente* ao gráfico de f no ponto $(x, f(x))$ — é uma operação *local*.
- **Integral definida:** mede a *área sob o gráfico* de f entre dois pontos x_0 e x_1 — é uma operação *global*.

O Teorema Fundamental do Cálculo é exatamente o resultado que formaliza essa dualidade.

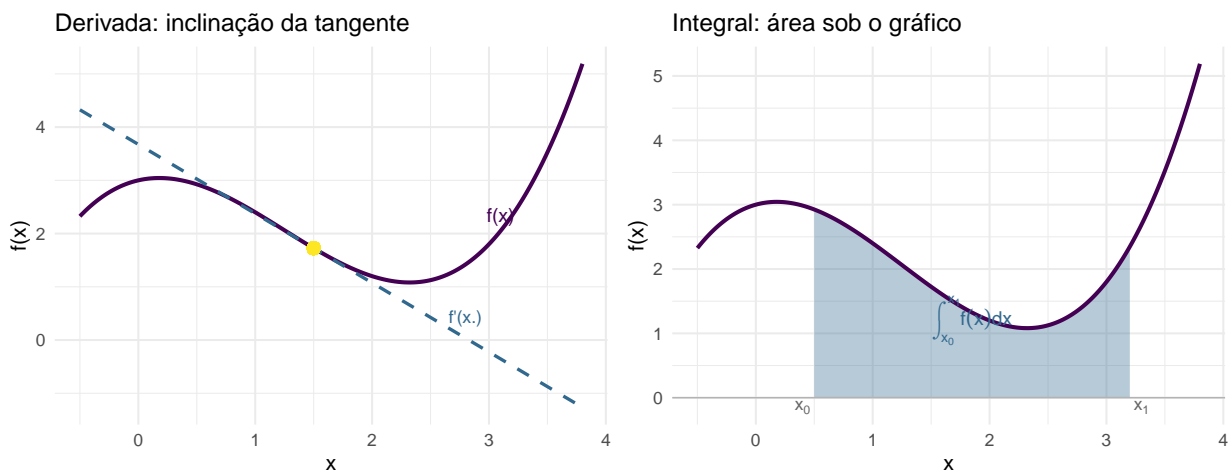


Figura 30: À esquerda: a derivada como inclinação da reta tangente. À direita: a integral definida como área sob o gráfico.

11.2 Teorema Fundamental do Cálculo

Teorema. Sejam $f, F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in [a, b]$ — ou seja, F é a primitiva (antiderivada) de f . Então:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Este resultado é notável: para calcular a área sob o gráfico de f entre a e b , basta encontrar uma antiderivada F e avaliar nos extremos. Não é necessário calcular limites de somas.

11.3 Regras de Integração

Regra da potência:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1.$$

Verificação: $\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)' = \frac{1}{n+1} \cdot (n+1)x^n = x^n. \checkmark$

Linearidade:

$$\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx.$$

11.4 Exemplos

11.4.1 Exemplo 1: $\int_0^2 x^2 dx$

Antiderivada de x^2 : $F(x) = \frac{x^3}{3}$.

$$\int_0^2 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{8}{3}.$$

11.4.2 Exemplo 2: $\int_1^2 4x^3 dx$

Antiderivada de $4x^3$: $F(x) = x^4$.

$$\int_1^2 4x^3 dx = [x^4]_1^2 = 2^4 - 1^4 = 16 - 1 = 15.$$

11.4.3 Exemplo 3: $\int (2x - x^2 - x^4) dx$

Aplicando a regra da potência em cada termo via linearidade:

$$\int (2x - x^2 - x^4) dx = 2 \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + C = x^2 - \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + C.$$

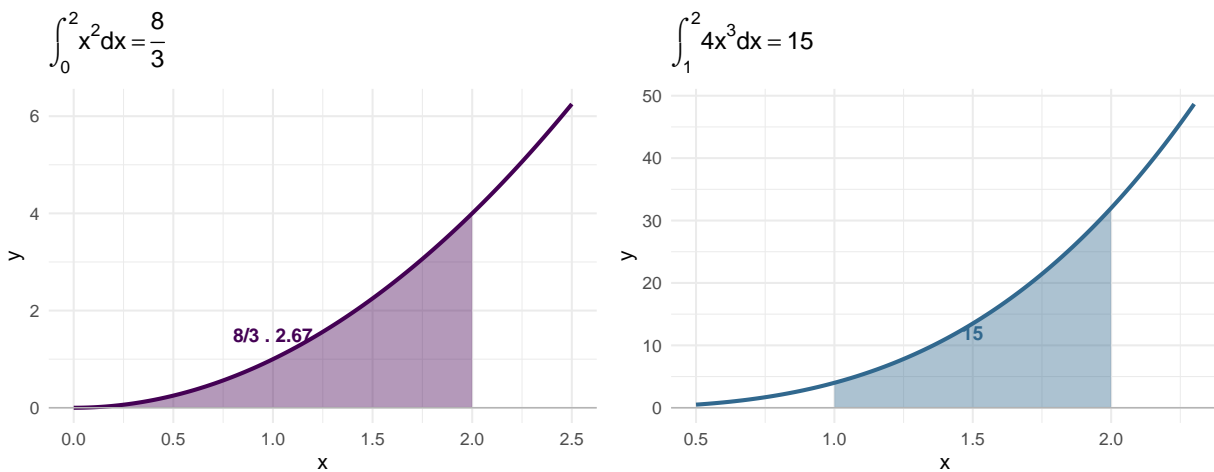


Figura 31: Exemplos 1 e 2: áreas exatas calculadas pelo Teorema Fundamental do Cálculo.

12 Monitoria 5

12.1 Revisão — Derivadas de $e^{f(x)}$ e $\ln f(x)$

Antes dos exercícios, revisamos as duas regras da cadeia mais utilizadas com funções exponenciais e logarítmicas:

$$(e^{f(x)})' = e^{f(x)} \cdot f'(x), \quad (\ln f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Exemplo: As duas funções abaixo têm a mesma derivada.

$$1. f(x) = 3 \ln x \Rightarrow f'(x) = 3 \cdot \frac{1}{x} = \frac{3}{x}.$$

$$2. f(x) = \ln x^3 \Rightarrow f'(x) = \frac{3x^2}{x^3} = \frac{3}{x}.$$

De fato, $\ln x^3 = 3 \ln x$ pelas propriedades do logaritmo, logo as funções são iguais.

Consequência para integração. Como $(\ln |x|)' = \frac{1}{x}$, temos a nova regra:

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C.$$

Mais geralmente, pela regra da cadeia:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + C.$$

Aplicação imediata: $[\ln(x^3 + 3x^2 - 2)]' = \frac{3x^2 + 6x}{x^3 + 3x^2 - 2}$, o que implica $\int \frac{3x^2 + 6x}{x^3 + 3x^2 - 2} dx = \ln |x^3 + 3x^2 - 2| + C$.

12.2 Exercícios (Teste 2 — 2024)

12.2.1 Exercício 2a — $\int \frac{(\ln x)^2}{x} dx$

Substituição. Identificamos que $\frac{1}{x} dx$ é exatamente a diferencial de $\ln x$. Fazemos:

$$u = \ln x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx.$$

Substituindo:

$$\int \frac{(\ln x)^2}{x} dx = \int u^2 du = \frac{u^3}{3} + C = \frac{(\ln x)^3}{3} + C.$$

Verificação por derivação:

$$\left(\frac{(\ln x)^3}{3} \right)' = \frac{3(\ln x)^2}{3} \cdot \frac{1}{x} = \frac{(\ln x)^2}{x}. \quad \checkmark$$

$$\boxed{\int \frac{(\ln x)^2}{x} dx = \frac{(\ln x)^3}{3} + C, \quad \forall C \in \mathbb{R}.}$$

12.2.2 Exercício 2b — $\int \frac{\sqrt{3 + \frac{2}{x}}}{x^2} dx$

Substituição. Identificamos a expressão composta $3 + \frac{2}{x}$ sob a raiz. Fazemos:

$$u = 3 + \frac{2}{x} \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\frac{2}{x^2} \Rightarrow du = -\frac{2}{x^2} dx \Rightarrow -\frac{1}{2} du = \frac{dx}{x^2}.$$

Substituindo:

$$\int \frac{\sqrt{3 + \frac{2}{x}}}{x^2} dx = \int \sqrt{u} \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) du = -\frac{1}{2} \int u^{1/2} du = -\frac{1}{2} \cdot \frac{u^{3/2}}{3/2} = -\frac{1}{3} u^{3/2} + C.$$

$$\boxed{\int \frac{\sqrt{3 + \frac{2}{x}}}{x^2} dx = -\frac{1}{3} \left(3 + \frac{2}{x} \right)^{3/2} + C, \quad \forall C \in \mathbb{R}.}$$

12.2.3 Exercício 3a — $\int_1^2 (x^2 - 1)^3 x dx$

Método direto. A antiderivada de $(x^2 - 1)^3 \cdot x$ pode ser obtida por inspeção: como $[(x^2 - 1)^4]' = 4(x^2 - 1)^3 \cdot 2x = 8x(x^2 - 1)^3$, temos:

$$\int (x^2 - 1)^3 x dx = \frac{(x^2 - 1)^4}{8} + C.$$

Aplicando o Teorema Fundamental:

$$\int_1^2 (x^2 - 1)^3 x dx = \left[\frac{(x^2 - 1)^4}{8} \right]_1^2 = \frac{(4 - 1)^4}{8} - \frac{(1 - 1)^4}{8} = \frac{81}{8} - 0 = \frac{81}{8}.$$

Verificação por substituição com troca de limites. Fazendo $u = x^2 - 1$, $du = 2x dx$:

- $x = 1 \Rightarrow u = 0$; $x = 2 \Rightarrow u = 3$.

$$\int_1^2 (x^2 - 1)^3 x dx = \frac{1}{2} \int_0^3 u^3 du = \frac{1}{2} \left[\frac{u^4}{4} \right]_0^3 = \frac{1}{8} (81 - 0) = \frac{81}{8}. \quad \checkmark$$

12.2.4 Exercício 3b — $\int_1^{e+1} \frac{x+2}{x-1} dx$

Reescrita do integrando. Dividimos numerador por denominador:

$$\frac{x+2}{x-1} = \frac{(x-1)+3}{x-1} = 1 + \frac{3}{x-1}.$$

A antiderivada é $F(x) = x + 3 \ln |x - 1|$.

Substituição com troca de limites. Fazendo $u = x - 1$, $du = dx$, $x + 2 = u + 3$:

- $x = 1 \Rightarrow u = 0$; $x = e + 1 \Rightarrow u = e$.

$$\int_0^e \frac{u+3}{u} du = \int_0^e \left(1 + \frac{3}{u} \right) du = [u + 3 \ln u]_0^e.$$

Avaliando no limite superior: $e + 3 \ln e = e + 3$.

Avaliando no limite inferior: $\lim_{u \rightarrow 0^+} (u + 3 \ln u) = 0 + 3 \cdot (-\infty) = -\infty$.

Observação. O integrando possui uma singularidade em $x = 1$ (ponto de integração). Trata-se portanto de uma **integral imprópria** que, como mostra o cálculo acima, **diverge**. Formalmente, a aplicação direta da Regra de Barrow nos extremos produz a expressão $(e + 3) - (0 + 3 \ln 0)$, que é indefinida.

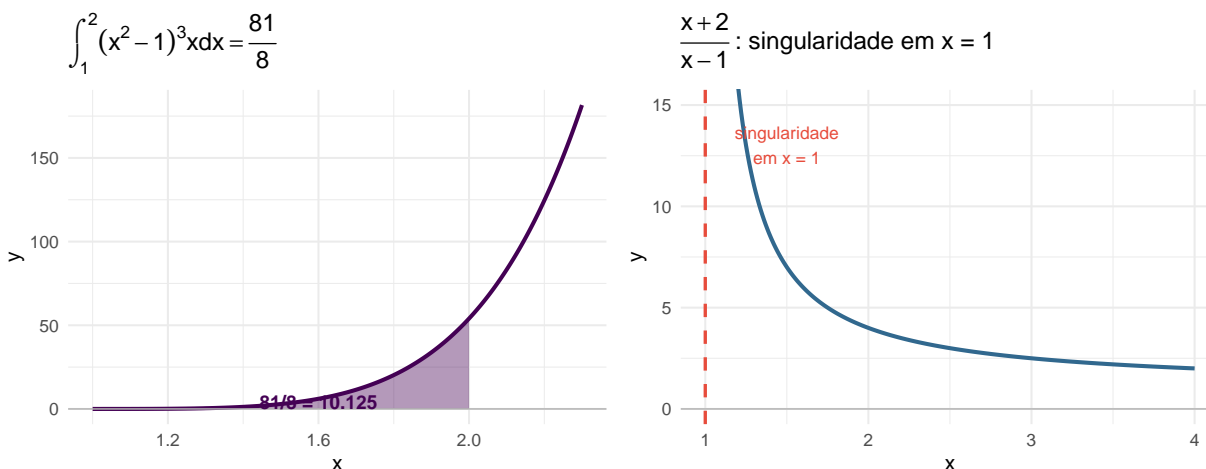


Figura 32: Exercício 3a: área sob $(x^2 - 1)^3 x$ em $[1, 2]$ (esquerda). Exercício 3b: o integrando $(x + 2)/(x - 1)$ possui singularidade vertical em $x = 1$ — a integral diverge (direita).

13 Função Logaritmo Natural

13.1 Motivação Econômica

O logaritmo natural é, possivelmente, a função mais ubíqua em Economia aplicada. Suas propriedades — transformar multiplicações em somas, crescimento proporcional em crescimento aditivo, e ter derivada simples — fazem dele uma ferramenta indispensável.

Taxa de crescimento como derivada do logaritmo. A taxa de crescimento instantânea de uma variável $Y(t)$ é:

$$g_Y = \frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{d}{dt} \ln Y(t).$$

Isso significa que a taxa de crescimento do PIB, da população ou do nível de preços é a derivada do logaritmo dessas variáveis. Em particular, a inflação é $\pi = \frac{d \ln P}{dt}$.

Utilidade logarítmica (CRRA com $\sigma = 1$). Na teoria do consumidor intertemporal (modelo de Ramsey–Cass–Koopmans), a função de utilidade $u(c) = \ln c$ representa aversão relativa ao risco constante igual a 1. Ela satisfaz $u'(c) = 1/c > 0$ (mais consumo é melhor) e $u''(c) = -1/c^2 < 0$ (utilidade marginal decrescente).

Log-linearização de modelos DSGE. Modelos de ciclo de negócios de equilíbrio geral são linearizados em torno do estado estacionário tomando logaritmos das variáveis e aproximando: $\ln Y_t \approx \ln \bar{Y} + \hat{y}_t$, onde $\hat{y}_t = (Y_t - \bar{Y})/\bar{Y}$ é o desvio percentual. Isso converte sistemas não-lineares em sistemas lineares tratáveis.

Função de produção Cobb-Douglas. A função $F(K, L) = AK^\alpha L^{1-\alpha}$ tem a propriedade de que $\ln F = \ln A + \alpha \ln K + (1 - \alpha) \ln L$ — uma relação linear nos logaritmos. Isso facilita estimação econométrica por mínimos quadrados ordinários e derivação de produtividades marginais.

13.2 Definição via Integral

Até aqui, tínhamos estabelecido que $\int \frac{1}{x} dx$ ficou em aberto — a regra da potência $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ exige $n \neq -1$. O Teorema Fundamental do Cálculo fornece a resposta.

Definição. Para $x > 0$, define-se o **logaritmo natural** de x como:

$$\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t}.$$

Geometricamente, $\ln x$ é a área com sinal sob a hipérbole $y = 1/t$ entre $t = 1$ e $t = x$.

Observações imediatas:

- $\ln 1 = \int_1^1 \frac{dt}{t} = 0$ (integral sobre intervalo degenerado).
- Para $x > 1$: $\ln x > 0$ (área positiva).
- Para $0 < x < 1$: $\ln x < 0$ (integral com limites invertidos).

Derivada. Pelo Primeiro Teorema Fundamental do Cálculo:

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}, \quad x > 0.$$

Mais geralmente, pela regra da cadeia, se $g(x) > 0$:

$$(\ln g(x))' = \frac{g'(x)}{g(x)}.$$

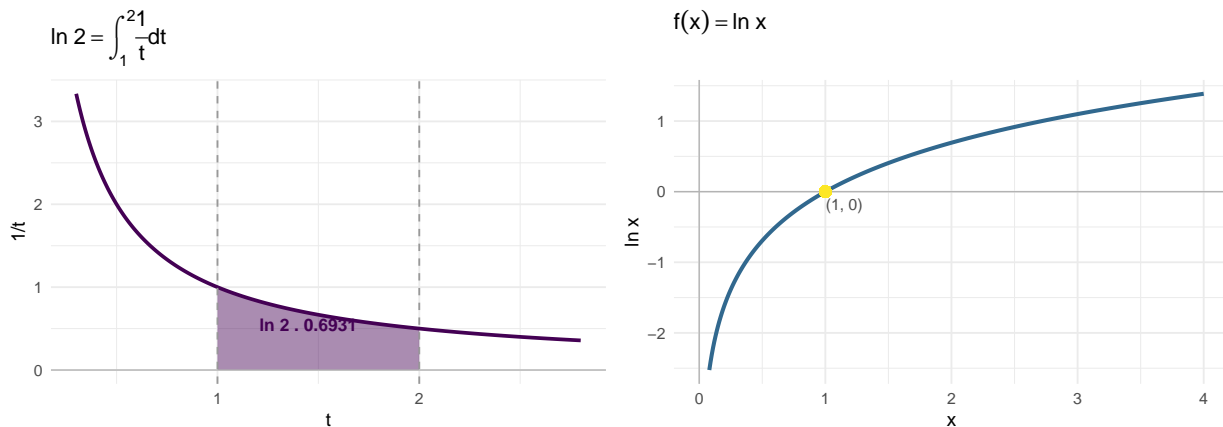


Figura 33: O logaritmo natural como área sob $1/t$. À esquerda: $\ln 2$ (área em $[1, 2]$, positiva). À direita: $\ln(1/2)$ (área em $[1/2, 1]$, negativa). A função $\ln x$ passa por $(1, 0)$, é crescente e côncava.

13.3 Propriedades do Logaritmo Natural

Proposição. Para $a, b > 0$ e $r \in \mathbb{R}$:

Propriedade	Enunciado
Valor em 1	$\ln 1 = 0$
Produto	$\ln(ab) = \ln a + \ln b$
Quociente	$\ln(a/b) = \ln a - \ln b$
Potência	$\ln a^r = r \ln a$

13.3.1 Prova de $\ln(ab) = \ln a + \ln b$

Fixe $a > 0$ e defina $h(x) = \ln(ax)$ para $x > 0$. Pela regra da cadeia:

$$h'(x) = \frac{a}{ax} = \frac{1}{x}.$$

Como $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ também, as duas funções têm a mesma derivada, logo diferem por uma constante:

$$\ln(ax) = \ln x + C.$$

Avaliando em $x = 1$: $\ln a = \ln 1 + C = C$. Portanto $\ln(ax) = \ln x + \ln a$. Tomando $x = b$:

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b. \quad \blacksquare$$

13.3.2 Prova de $\ln(a/b) = \ln a - \ln b$

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a \cdot b^{-1}) = \ln a + \ln b^{-1} = \ln a - \ln b,$$

onde usamos que $\ln b^{-1} = -\ln b$ (caso particular de $\ln a^r = r \ln a$ com $r = -1$). \blacksquare

13.3.3 Prova de $\ln a^r = r \ln a$ (para r inteiro)

Defina $h(x) = \ln x^r$. Pela regra da cadeia: $h'(x) = \frac{rx^{r-1}}{x^r} = \frac{r}{x}$. Por outro lado, $(r \ln x)' = \frac{r}{x}$. As duas funções têm a mesma derivada, logo $\ln x^r = r \ln x + C$. Avaliando em $x = 1$: $0 = 0 + C$, portanto $C = 0$. \blacksquare

13.4 Antiderivada de $1/x$

Como $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$ para $x \neq 0$, temos:

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C, \quad x \neq 0.$$

Generalização. Pela regra da cadeia ao contrário:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C.$$

Exemplo: $\int \frac{3x^2 + 6x}{x^3 + 3x^2 - 2} dx = \ln|x^3 + 3x^2 - 2| + C$, pois o numerador é exatamente a derivada do denominador.

13.5 Exercícios — Derivadas com \ln

13.5.1 Exercício 1 — $f(x) = \ln(4 + 5x)$

Pela regra da cadeia com $g(x) = 4 + 5x$:

$$f'(x) = \frac{5}{4 + 5x}.$$

13.5.2 Exercício 2 — $f(x) = x \ln x$

Pela regra do produto:

$$f'(x) = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1.$$

13.5.3 Exercício 3 — $f(x) = \frac{x}{\ln x}$

Pela regra do quociente:

$$f'(x) = \frac{\ln x - x \cdot (1/x)}{(\ln x)^2} = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}.$$

13.5.4 Exercício 4 — $f(x) = \sqrt[3]{\ln x^3}$

Simplificamos primeiro: $\ln x^3 = 3 \ln x$, logo $f(x) = (3 \ln x)^{1/3}$.

$$f'(x) = \frac{1}{3}(3 \ln x)^{-2/3} \cdot \frac{3}{x} = \frac{(3 \ln x)^{-2/3}}{x} = \frac{1}{x(3 \ln x)^{2/3}}.$$

13.5.5 Exercício 5 — $f(x) = \sqrt{x+1} - \ln(1 + \sqrt{x+1})$

Seja $v = \sqrt{x+1} = (x+1)^{1/2}$, logo $v' = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$.

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \frac{1}{1 + \sqrt{x+1}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x+1}} = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \left(1 - \frac{1}{1 + \sqrt{x+1}} \right) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \cdot \frac{\sqrt{x+1}}{1 + \sqrt{x+1}}.$$

$$f'(x) = \frac{1}{2(1 + \sqrt{x+1})}.$$

13.6 Exercícios — Integrais com \ln

13.6.1 Exercício 6 — $\int \frac{x^2}{x^3 + 1} dx$

O numerador é $x^2 = \frac{1}{3}(3x^2)$, que é $\frac{1}{3}$ vezes a derivada de $x^3 + 1$:

$$\int \frac{x^2}{x^3 + 1} dx = \frac{1}{3} \int \frac{3x^2}{x^3 + 1} dx = \frac{1}{3} \ln |x^3 + 1| + C.$$

Verificação: $(\frac{1}{3} \ln |x^3 + 1|)' = \frac{1}{3} \cdot \frac{3x^2}{x^3 + 1} = \frac{x^2}{x^3 + 1}$. ✓

$$\int \frac{x^2}{x^3 + 1} dx = \frac{1}{3} \ln |x^3 + 1| + C.$$

13.6.2 Exercício 7 — $\int \frac{dx}{3-2x}$

O denominador $3 - 2x$ tem derivada -2 . Ajustamos o numerador:

$$\int \frac{dx}{3-2x} = -\frac{1}{2} \int \frac{-2}{3-2x} dx = -\frac{1}{2} \ln|3-2x| + C.$$

$$\boxed{\int \frac{dx}{3-2x} = -\frac{1}{2} \ln|3-2x| + C.}$$

13.6.3 Exercício 8 — $\int \frac{x dx}{2-x^2}$

O denominador $2 - x^2$ tem derivada $-2x$. Ajustamos:

$$\int \frac{x}{2-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{-2x}{2-x^2} dx = -\frac{1}{2} \ln|2-x^2| + C.$$

$$\boxed{\int \frac{x}{2-x^2} dx = -\frac{1}{2} \ln|2-x^2| + C.}$$

13.6.4 Exercício 9 — $\int \frac{\ln x}{x} dx$

Substituição: $u = \ln x$, $du = \frac{1}{x} dx$:

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \int u du = \frac{u^2}{2} + C = \frac{(\ln x)^2}{2} + C.$$

Verificação: $\left(\frac{(\ln x)^2}{2}\right)' = \frac{2 \ln x}{2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{\ln x}{x}$. ✓

$$\boxed{\int \frac{\ln x}{x} dx = \frac{(\ln x)^2}{2} + C.}$$

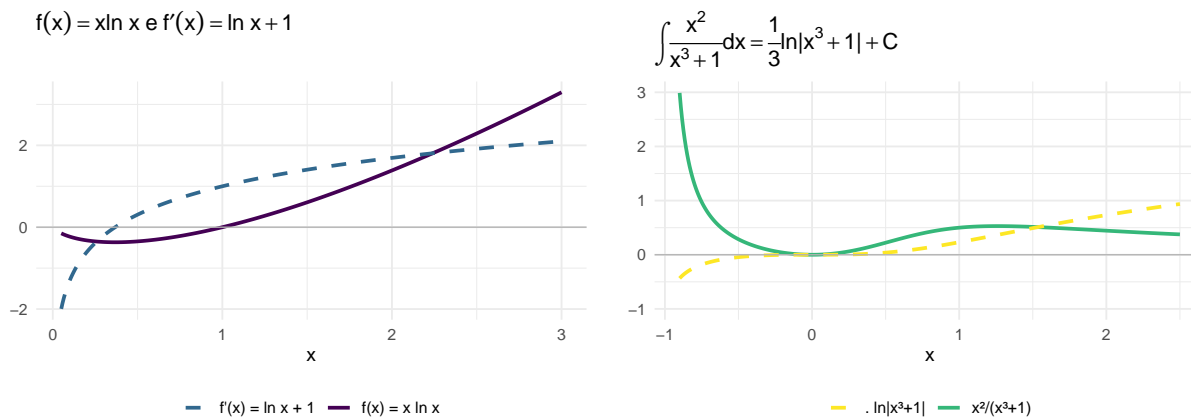


Figura 34: Derivadas e antiderivadas envolvendo o logaritmo natural. À esquerda: $f(x) = x \ln x$ e sua derivada $f'(x) = \ln x + 1$. À direita: $\int x^2/(x^3 + 1) dx$ — o integrando e a primitiva $\frac{1}{3} \ln |x^3 + 1|$.

14 Função Inversa

14.1 Motivação Econômica

Em Economia, frequentemente precisamos inverter relações funcionais: dado o comportamento da quantidade em função do preço, queremos o preço como função da quantidade — e vice-versa.

Função de demanda inversa. A demanda direta $q = D(p)$ diz quanto os consumidores compram ao preço p . A demanda inversa $p = P^D(q)$ diz qual preço faz os consumidores demandarem exatamente a quantidade q . No modelo de concorrência perfeita e no modelo de monopólio, a firma enfrenta $P^D(q)$ para definir sua receita $R(q) = q \cdot P^D(q)$ e a receita marginal $R'(q)$.

Excedente do consumidor e demanda inversa. A fórmula do excedente do consumidor $EC = \int_0^{q^*} P^D(q) dq - p^* q^*$ usa diretamente a demanda inversa. Sem a função inversa, essa integral não faria sentido.

Derivada da inversa e elasticidade. Se $q = D(p)$, então a derivada da inversa é $(D^{-1})'(q) = \frac{1}{D'(p)}$. A relação entre a inclinação da demanda direta e da demanda inversa é essencial para conectar elasticidade-preço $\varepsilon = D'(p) \cdot p/q$ com a inclinação da demanda inversa.

Condição de existência da inversa. A demanda é invertível se for estritamente monotônica — em geral, estritamente decrescente ($D'(p) < 0$). Isso corresponde à lei da demanda: preço e quantidade movem-se em sentidos opostos. A oferta $S(p)$ é invertível pois é estritamente crescente ($S'(p) > 0$).

14.2 Definição

Seja $f : A \rightarrow B$ uma função. Dizemos que f possui **inversa** se existe uma função $f^{-1} : B \rightarrow A$ tal que:

$$f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y.$$

Em outras palavras, f^{-1} “desfaz” o que f faz. As relações entre domínio e imagem são:

$$\text{Dom}(f^{-1}) = \text{Im}(f), \quad \text{Im}(f^{-1}) = \text{Dom}(f).$$

Composições inversas. Para todo $x \in \text{Dom}(f)$ e $y \in \text{Im}(f)$:

$$f^{-1}(f(x)) = x, \quad f(f^{-1}(y)) = y.$$

14.3 Condição de Existência

Uma função f possui inversa se e somente se é **bijetiva** (injetiva e sobrejetiva). Funções não-injetivas (que assumem o mesmo valor em dois pontos distintos) não têm inversa globalmente definida — podemos no máximo restringir o domínio.

Condição suficiente via monotonicidade. Se f é diferenciável e $f'(x) > 0$ para todo $x \in \text{Dom}(f)$ (ou $f'(x) < 0$ para todo x), então f é estritamente monótona e, portanto, possui inversa.

14.4 Gráfico de f^{-1}

O gráfico de f^{-1} é a **reflexão** do gráfico de f em relação à reta $y = x$. Isso ocorre porque o ponto (a, b) pertence ao gráfico de f se e somente se (b, a) pertence ao gráfico de f^{-1} .

14.5 Exemplos

14.5.1 Exemplo 1 — $f(x) = 7 - 2x$

Cálculo da inversa. Fazemos $y = 7 - 2x$ e isolamos x :

$$y = 7 - 2x \Rightarrow 2x = 7 - y \Rightarrow x = \frac{7 - y}{2}.$$

Portanto:

$$f^{-1}(y) = \frac{7 - y}{2}.$$

Verificação: $f(f^{-1}(y)) = 7 - 2 \cdot \frac{7 - y}{2} = 7 - (7 - y) = y. \checkmark$

14.5.2 Exemplo 2 — $f(x) = -\frac{2}{x-5}$

Verificação de monotonicidade. A derivada é:

$$f'(x) = -2 \cdot \frac{-1}{(x-5)^2} = \frac{2}{(x-5)^2} > 0 \quad \text{para todo } x \neq 5.$$

Logo f é estritamente crescente no seu domínio $\mathbb{R} \setminus \{5\}$ e possui inversa.

Cálculo da inversa. Fazemos $y = -\frac{2}{x-5}$ e isolamos x :

$$y(x-5) = -2 \Rightarrow x-5 = -\frac{2}{y} \Rightarrow x = 5 - \frac{2}{y}.$$

Portanto:

$$f^{-1}(y) = 5 - \frac{2}{y}, \quad y \neq 0.$$

Verificação: $f(f^{-1}(y)) = -\frac{2}{(5 - 2/y) - 5} = -\frac{2}{-2/y} = y. \checkmark$

14.5.3 Exemplo 3 — $f(x) = 4x + 3$

Cálculo da inversa. Fazemos $y = 4x + 3$ e isolamos x :

$$y - 3 = 4x \Rightarrow x = \frac{y-3}{4}.$$

Portanto:

$$f^{-1}(y) = \frac{y-3}{4}.$$

Verificação: $f(f^{-1}(y)) = 4 \cdot \frac{y-3}{4} + 3 = y - 3 + 3 = y. \checkmark$

14.5.4 Exemplo 4 — $f(x) = \frac{1}{x-1}$, $x \neq 1$

Monotonicidade. $f'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2} < 0$ para todo $x \neq 1$. Logo f é estritamente decrescente e possui inversa (em cada ramo).

Cálculo da inversa. Fazemos $y = \frac{1}{x-1}$ e isolamos x :

$$y(x-1) = 1 \Rightarrow x-1 = \frac{1}{y} \Rightarrow x = 1 + \frac{1}{y}.$$

Portanto:

$$f^{-1}(y) = 1 + \frac{1}{y}, \quad y \neq 0.$$

Note que f^{-1} tem a mesma forma funcional que f : esta é uma função **involutória** ($f = f^{-1}$).

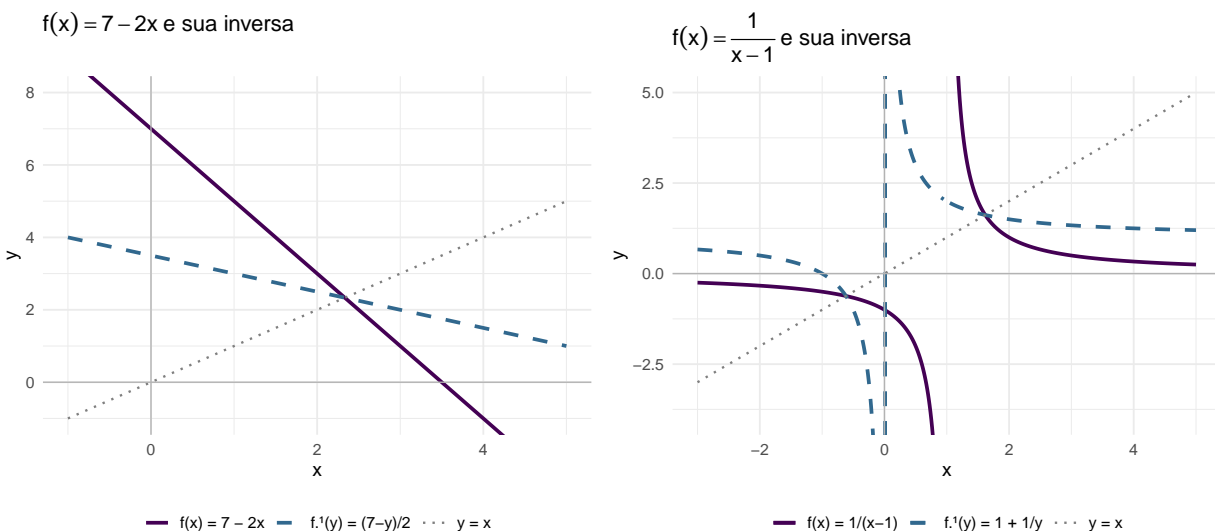


Figura 35: Gráficos de f e f^{-1} refletidos em torno de $y = x$. Exemplos: $f(x) = 7 - 2x$ (esquerda) e $f(x) = 1/(x - 1)$ (direita).

14.6 Teorema da Função Inversa

Teorema. Seja f diferenciável numa vizinhança de x_0 , com $f'(x_0) \neq 0$. Então f^{-1} é diferenciável em $y_0 = f(x_0)$ e:

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Interpretação. A derivada da inversa é o recíproco da derivada de f avaliada no ponto correspondente. Graficamente, se a tangente a f em (x_0, y_0) tem inclinação m , a tangente a f^{-1} em (y_0, x_0) tem inclinação $1/m$.

Prova. Componha $f^{-1}(f(x)) = x$ e diferencie ambos os lados pela regra da cadeia:

$$(f^{-1})'(f(x)) \cdot f'(x) = 1 \Rightarrow (f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}. \quad \blacksquare$$

Exemplo. Para $f(x) = 7 - 2x$ temos $f'(x) = -2$. Portanto $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$, o que é consistente com $f^{-1}(y) = \frac{7-y}{2}$ cuja derivada em y é $-\frac{1}{2}$. ✓

14.7 Exemplo Completo — $f(x) = \frac{1}{x+1}$, $x \neq -1$

14.7.1 a) Verificação de que f possui inversa

Calculamos a derivada de f :

$$f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} < 0 \quad \text{para todo } x \neq -1.$$

Como $f'(x) < 0$ em todo o domínio, f é **estritamente decrescente** e, portanto, injetiva. Logo, f possui inversa.

14.7.2 b) Cálculo de f^{-1}

Fazemos $y = \frac{1}{x+1}$ e isolamos x :

$$y(x+1) = 1 \Rightarrow x+1 = \frac{1}{y} \Rightarrow x = \frac{1}{y} - 1.$$

Portanto:

$$f^{-1}(y) = \frac{1}{y} - 1, \quad y \neq 0.$$

14.7.3 c) Verificação das composições

$$f(f^{-1}(y)) = \frac{1}{\left(\frac{1}{y} - 1\right) + 1} = \frac{1}{1/y} = y. \quad \checkmark$$

$$f^{-1}(f(x)) = \frac{1}{\frac{1}{x+1}} - 1 = (x+1) - 1 = x. \quad \checkmark$$

14.7.4 d) Derivada de f^{-1} pelo Teorema da Função Inversa

Temos $f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2}$. Se $y = f(x) = \frac{1}{x+1}$, então $x+1 = \frac{1}{y}$, de modo que:

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{-1/(x+1)^2} = -(x+1)^2 = -\left(\frac{1}{y}\right)^2 = -\frac{1}{y^2}.$$

Verificação direta: $\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{y} - 1\right) = -\frac{1}{y^2}. \quad \checkmark$

14.7.5 e) Gráficos de f e f^{-1}

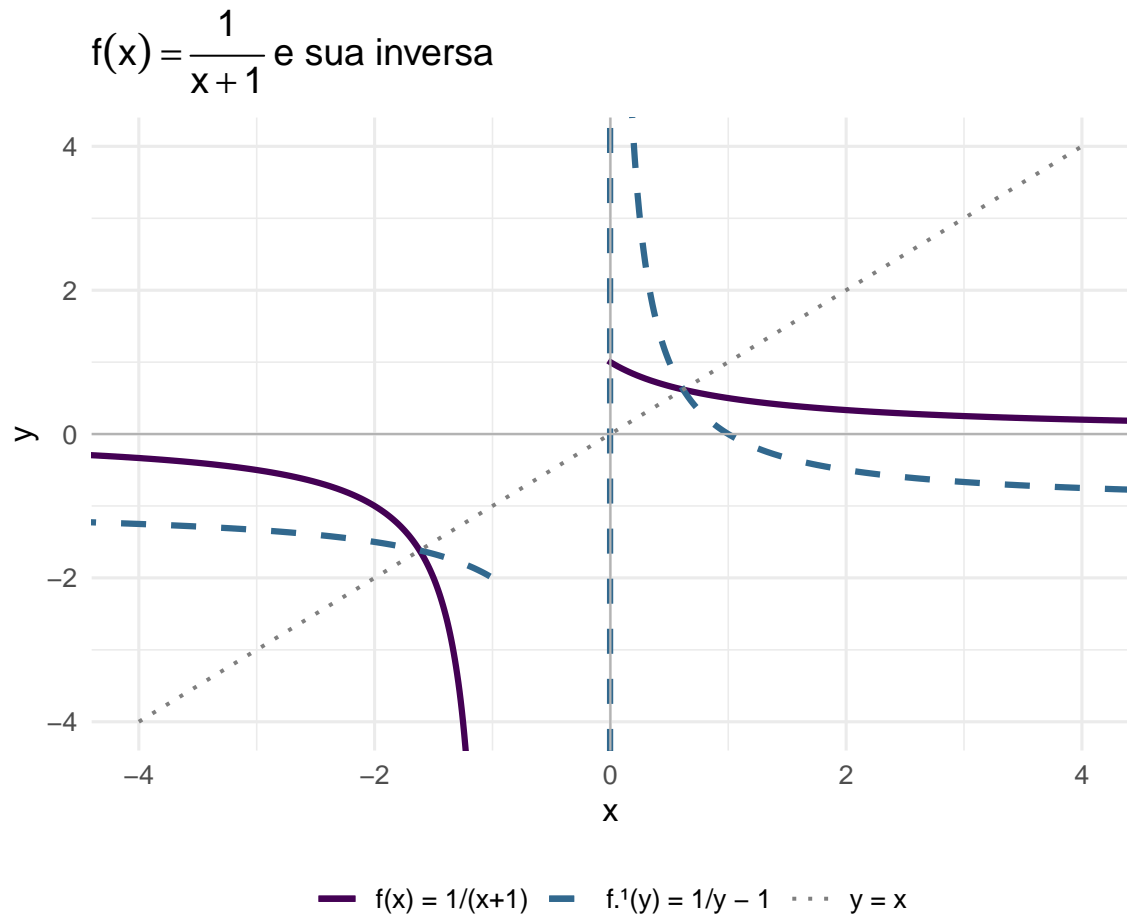


Figura 36: Gráficos de $f(x) = 1/(x + 1)$ e $f^{-1}(y) = 1/y - 1$, simétricos em relação a $y = x$.

15 Funções Exponenciais

15.1 Motivação Econômica

A função exponencial e^{rt} é o bloco de construção de praticamente toda dinâmica econômica contínua. Ela aparece sempre que o crescimento (ou decaimento) é proporcional ao tamanho atual da variável.

Crescimento do PIB. Se a taxa de crescimento do produto é constante g , então $Y(t) = Y_0 e^{gt}$. Após T anos, o PIB multiplica-se por e^{gT} . Para $g = 2\%$ ao ano e $T = 35$ anos, $e^{0.02 \times 35} \approx 2$ — a regra do número 70 (o produto dobra em $70/g$ anos) é uma aproximação dessa fórmula.

Desconto contínuo e valor presente. O fator de desconto para um fluxo recebido no instante t , a uma taxa de juros r , é e^{-rt} . O valor presente de um fluxo perpétuo π é $\int_0^\infty \pi e^{-rt} dt = \pi/r$ — a fórmula da perpetuidade, obtida por integração da exponencial.

Capitalização contínua. Um capital K_0 aplicado à taxa r composta continuamente cresce como $K(t) = K_0 e^{rt}$. No limite da capitalização discreta com $n \rightarrow \infty$ períodos por ano: $K_0(1 + r/n)^{nt} \rightarrow K_0 e^{rt}$.

Depreciação e amortização. O estoque de capital deprecia-se à taxa δ : $K(t) = K_0 e^{-\delta t}$. O mesmo modelo descreve a depreciação de qualquer ativo, o decaimento de dívidas, ou a queda de preços de bens duráveis.

Modelo de inflação de Cagan. A demanda por moeda no modelo de Cagan é $m - p = -\alpha p$, cuja solução estável envolve $e^{-t/\alpha}$. A estabilidade do equilíbrio inflacionário depende do sinal do expoente.

15.2 Função Exponencial Natural e^x

15.2.1 Definição como Inversa do Logaritmo

Definimos $\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t}$ para $x > 0$. Como $(\ln x)' = \frac{1}{x} > 0$, a função logaritmo é estritamente crescente e possui inversa. Definimos:

$$\exp(x) = e^x := (\ln)^{-1}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ou seja, $e^x = y \iff x = \ln y$, e as composições inversas dão:

$$\ln(e^x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad e^{\ln x} = x \quad \forall x > 0.$$

Domínio e imagem:

$$\text{Dom}(e^x) = \mathbb{R}, \quad \text{Im}(e^x) = \mathbb{R}_+ = (0, +\infty).$$

O número e . A constante $e \approx 2,71828\dots$ é o único número real tal que $\ln e = 1$, ou equivalentemente:

$$e = \exp(1), \quad \ln e = \int_1^e \frac{dt}{t} = 1.$$

15.2.2 Propriedades de e^x

Para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$:

Propriedade	Fórmula
Produto	$e^a \cdot e^b = e^{a+b}$
Quociente	$\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$
Potência	$(e^a)^b = e^{ab}$
Neutro	$e^0 = 1$

Prova de $e^a \cdot e^b = e^{a+b}$: Sejam $A = e^a$ e $B = e^b$, de modo que $\ln A = a$ e $\ln B = b$. Usando $\ln(AB) = \ln A + \ln B = a + b$ e aplicando \exp em ambos os lados: $AB = e^{a+b}$. ■

15.2.3 Derivada e Antiderivada

Derivada. Pelo Teorema da Função Inversa aplicado a $f(x) = \ln x$:

$$\frac{d}{dx} e^x = \frac{1}{(\ln y)'} \Big|_{y=e^x} = \frac{1}{1/e^x} = e^x.$$

A exponencial natural é a única função (a menos de múltiplos) igual à sua própria derivada.

Regra da cadeia. Para $h(x) = e^{g(x)}$:

$$h'(x) = e^{g(x)} \cdot g'(x).$$

Antiderivada:

$$\int e^x dx = e^x + C.$$

Mais geralmente, se $u = g(x)$:

$$\int e^{g(x)} g'(x) dx = e^{g(x)} + C.$$

15.2.4 Exemplos — Derivadas

Exemplo 1: $f(x) = e^{x^2}$

$$f'(x) = e^{x^2} \cdot 2x = 2x e^{x^2}.$$

Exemplo 2: $f(x) = e^{1/x^2} = e^{x^{-2}}$

$$f'(x) = e^{x^{-2}} \cdot (-2x^{-3}) = -\frac{2}{x^3} e^{1/x^2}.$$

Exemplo 3: $y = \ln(e^x + e^{-x})$

$$y' = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

Exemplo 4: $y = \ln\left(\frac{e^{4x} - 1}{e^{4x} + 1}\right) = \ln(e^{4x} - 1) - \ln(e^{4x} + 1)$

$$y' = \frac{4e^{4x}}{e^{4x} - 1} - \frac{4e^{4x}}{e^{4x} + 1} = \frac{4e^{4x}[(e^{4x} + 1) - (e^{4x} - 1)]}{(e^{4x} - 1)(e^{4x} + 1)} = \frac{8e^{4x}}{e^{8x} - 1}.$$

15.2.5 Exemplo — Antiderivada

Exemplo 5: $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$

Fazemos $u = \sqrt{x}$, $du = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$, logo $\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2 du$:

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = 2 \int e^u du = 2e^u + C = 2e^{\sqrt{x}} + C.$$

Exemplo 6: $\int x^2 e^{2x^3} dx$

Fazemos $u = 2x^3$, $du = 6x^2 dx$, logo $x^2 dx = du/6$:

$$\int x^2 e^{2x^3} dx = \frac{1}{6} \int e^u du = \frac{1}{6} e^{2x^3} + C.$$

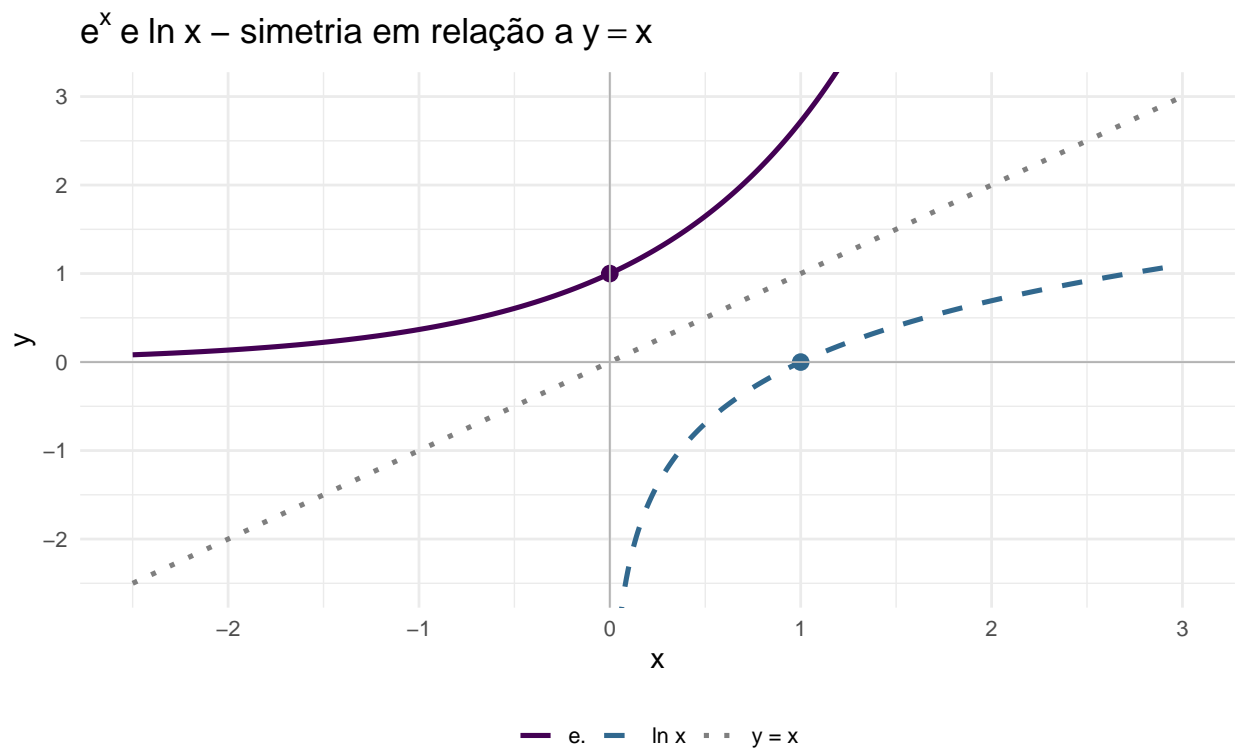


Figura 37: Gráfico de e^x e $\ln x$: simétricos em relação à reta $y = x$. A exponencial tem domínio \mathbb{R} e imagem $(0, +\infty)$; o logaritmo, o inverso.

15.3 Segunda Definição de e

Além de $e = \exp(1)$, existe uma definição via limite:

$$e = \lim_{h \rightarrow 0} (1 + h)^{1/h} \approx 2,71828 \dots$$

Derivação. Como $f(x) = \ln x$ e $f'(1) = 1$:

$$1 = f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h) - \ln 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \ln(1+h) = \lim_{h \rightarrow 0} \ln(1+h)^{1/h}.$$

Como \exp é contínua: $\exp(1) = \exp(\lim_{h \rightarrow 0} \ln(1+h)^{1/h}) = \lim_{h \rightarrow 0} (1+h)^{1/h}$.

Logo $e = \lim_{h \rightarrow 0} (1+h)^{1/h}$. ■

15.4 Diferenciação Logarítmica — $f(x) = x^x$

Para funções da forma $f(x) = x^x$ (base e expoente variáveis), a regra da potência nx^{n-1} não se aplica diretamente. Usamos a técnica de **diferenciação logarítmica**:

$$f(x) = x^x = e^{\ln x^x} = e^{x \ln x}.$$

Derivando pela regra da cadeia:

$$f'(x) = e^{x \ln x} \cdot \frac{d}{dx}(x \ln x) = x^x \left(\ln x + x \cdot \frac{1}{x} \right) = x^x (\ln x + 1).$$

Alternativa via ln implícito. Tome $\ln f(x) = x \ln x$. Diferenciando:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \ln x + 1 \Rightarrow f'(x) = f(x)(\ln x + 1) = x^x (\ln x + 1).$$

15.5 Funções Exponenciais em Outras Bases

15.5.1 Definição e Derivada

Para $a > 0$, $a \neq 1$, definimos:

$$a^x := e^{x \ln a}.$$

Derivada. Pela regra da cadeia:

$$\frac{d}{dx} a^x = e^{x \ln a} \cdot \ln a = a^x \ln a.$$

Mais geralmente, para $f(x) = a^{g(x)}$:

$$f'(x) = a^{g(x)} g'(x) \ln a.$$

Antiderivada:

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$$

Verificação: $\left(\frac{a^x}{\ln a}\right)' = \frac{a^x \ln a}{\ln a} = a^x. \checkmark$

15.5.2 Propriedades de a^x

Propriedade	Fórmula
Produto	$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
Quociente	$a^x / a^y = a^{x-y}$
Potência	$(a^x)^y = a^{xy}$
Produto de bases	$(ab)^x = a^x b^x$
Neutro	$a^0 = 1$

15.5.3 Exemplos

Exemplo 7: $f(x) = 6^{-3x}$

$$f'(x) = 6^{-3x} \cdot (-3) \cdot \ln 6 = -3 \ln 6 \cdot 6^{-3x}.$$

Exemplo 8: $f(x) = 10^{x^2-2x}$

$$f'(x) = 10^{x^2-2x} \cdot (2x-2) \cdot \ln 10 = (2x-2) \ln 10 \cdot 10^{x^2-2x}.$$

Exemplo 9: $f(x) = 3^{x^2}$

$$f'(x) = 3^{x^2} \cdot 2x \cdot \ln 3.$$

Exemplo 10: $\int 3^{2x} dx$

Fazemos $u = 2x$, $du = 2 dx$:

$$\int 3^{2x} dx = \frac{1}{2} \int 3^u du = \frac{1}{2} \cdot \frac{3^u}{\ln 3} + C = \frac{3^{2x}}{2 \ln 3} + C.$$

15.6 Logaritmo em Outras Bases e Mudança de Base

15.6.1 Definição

Para $a > 0$, $a \neq 1$, o **logaritmo na base a** de $x > 0$ é:

$$y = \log_a x \iff x = a^y.$$

A fórmula de **mudança de base** expressa $\log_a x$ em termos do logaritmo natural:

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

Derivação: De $x = a^y$ tomamos \ln em ambos os lados: $\ln x = y \ln a$, logo $y = \frac{\ln x}{\ln a}$.

Exemplos: $\log_e e = \frac{\ln e}{\ln e} = 1$; $\log_{10} 1000 = \frac{\ln 1000}{\ln 10} = 3$.

15.6.2 Derivada

$$\frac{d}{dx} \log_a x = \frac{d}{dx} \frac{\ln x}{\ln a} = \frac{1}{x \ln a}.$$

Para $h(x) = \log_a g(x)$:

$$h'(x) = \frac{g'(x)}{g(x) \ln a}.$$

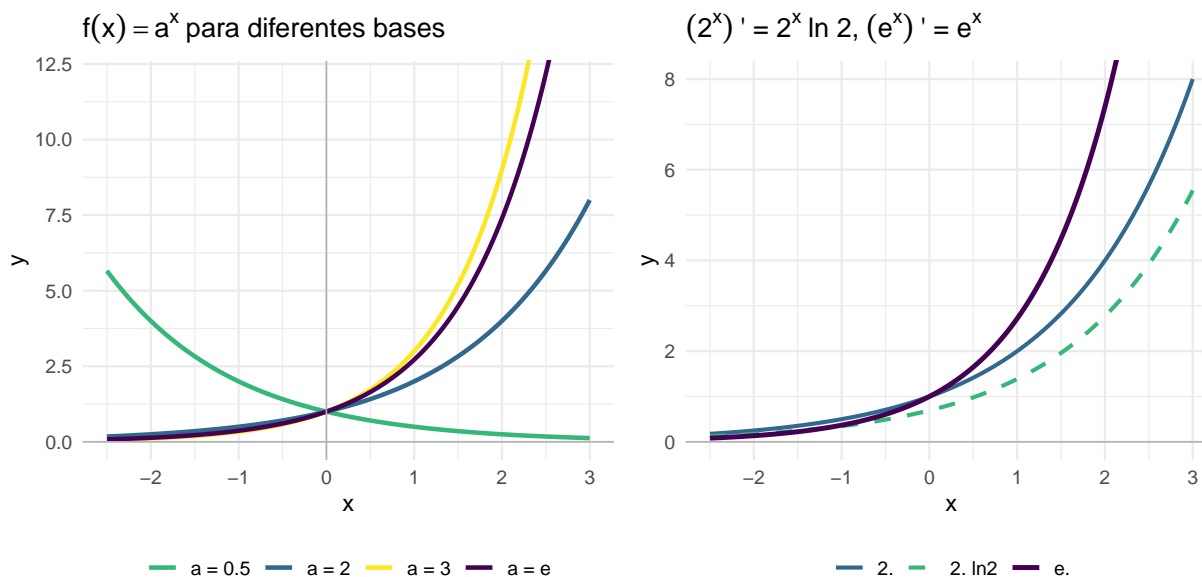


Figura 38: Funções exponenciais a^x para diferentes bases a . Para $a > 1$, a função é crescente; para $0 < a < 1$, decrescente. O caso $a = e$ é destacado.

16 Integração por Partes

16.1 Motivação Econômica

A integração por partes é a técnica que resolve integrais envolvendo **produtos de funções** — e em Economia, integrais desse tipo aparecem com frequência em problemas de valor presente, otimização dinâmica e cálculo de excedentes.

Valor presente de uma renda crescente. Suponha que uma firma receba um fluxo de lucros $\pi(t) = t$ (crescendo linearmente) e desconte à taxa r . O valor presente é:

$$VP = \int_0^T t e^{-rt} dt.$$

Essa integral não se resolve por regra direta — requer integração por partes, com $u = t$ e $dv = e^{-rt} dt$.

Excedente do consumidor com demanda log-linear. Se a demanda inversa é $P(q) = a - b \ln q$, o cálculo do excedente do consumidor $\int_0^{q^*} P(q) dq$ envolve $\int \ln q dq$ — resolvida por partes com $u = \ln q$ e $dv = dq$.

Otimização dinâmica (controle ótimo). Na derivação das condições de Euler no problema do consumidor intertemporal, a integração por partes é usada para mover a derivada de uma variável de estado para uma variável de coestado. É o passo central que leva às condições de Hamilton.

Regra geral de uso. A integração por partes é útil sempre que o integrando é um produto de funções de naturezas distintas: polinômio \times exponencial, logaritmo \times potência, polinômio \times trigonométrica. A escolha de u e dv segue a mnemônica LIATE (Logarítmica, Inversa trig., Algébrica, Trigonométrica, Exponencial) — u é o tipo mais à esquerda.

16.2 Derivação da Fórmula

A técnica de **integração por partes** é a contrapartida da regra do produto para derivadas. Sejam u e v funções diferenciáveis de x . A regra do produto afirma:

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

Integrando ambos os lados:

$$uv = \int u'v \, dx + \int uv' \, dx.$$

Reorganizando:

$$\int uv' \, dx = uv - \int u'v \, dx.$$

Escrevendo $dv = v' \, dx$ e $du = u' \, dx$, obtemos a fórmula na forma compacta:

$$\boxed{\int u \, dv = uv - \int v \, du.}$$

Estratégia. A integração por partes é útil quando o integrando é produto de dois fatores de tipos diferentes — por exemplo, polinômio \times logaritmo, polinômio \times exponencial, polinômio \times trigonométrica. A regra mnemônica **LIATE** (Logaritmo, Inversa, Algébrica/Polinomial, Trigonométrica, Exponencial) sugere a ordem de prioridade para escolher u : escolha como u o fator que aparecer primeiro nessa lista, pois sua derivada tende a simplificar o integrando.

16.3 Exemplos com Logaritmo

16.3.1 Exemplo 1 — $\int \ln x \, dx$

Escolha: $u = \ln x$, $dv = dx$.

$$du = \frac{1}{x} \, dx, \quad v = x.$$

Aplicando a fórmula:

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx = x \ln x - \int 1 \, dx = x \ln x - x + C.$$

$$\boxed{\int \ln x \, dx = x(\ln x - 1) + C.}$$

Verificação: $(x(\ln x - 1))' = (\ln x - 1) + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x. \checkmark$

16.3.2 Exemplo 2 — $\int x \ln x \, dx$

Escolha: $u = \ln x, \, dv = x \, dx.$

$$du = \frac{1}{x} \, dx, \quad v = \frac{x^2}{2}.$$

Aplicando a fórmula:

$$\int x \ln x \, dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} \, dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x \, dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C.$$

$$\boxed{\int x \ln x \, dx = \frac{x^2}{2} \left(\ln x - \frac{1}{2} \right) + C.}$$

Verificação: $\frac{d}{dx} \left[\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} \right] = x \ln x + \frac{x}{2} - \frac{x}{2} = x \ln x. \checkmark$

16.3.3 Exemplo 3 — $\int x^n \ln x \, dx$ (fórmula geral)

Escolha: $u = \ln x, \, dv = x^n \, dx$ (com $n \neq -1$).

$$du = \frac{1}{x} \, dx, \quad v = \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

$$\begin{aligned} \int x^n \ln x \, dx &= \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \int \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{1}{x} \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \frac{1}{n+1} \int x^n \, dx. \\ &= \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + C. \end{aligned}$$

$$\int x^n \ln x \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \left(\ln x - \frac{1}{n+1} \right) + C, \quad n \neq -1.$$

Os exemplos anteriores são casos particulares: $n = 0$ dá o Exemplo 1, $n = 1$ dá o Exemplo 2.

16.3.4 Exemplo 4 — $\int (\ln x)^2 \, dx$

Escolha: $u = (\ln x)^2$, $dv = dx$.

$$du = \frac{2 \ln x}{x} \, dx, \quad v = x.$$

$$\begin{aligned} \int (\ln x)^2 \, dx &= x(\ln x)^2 - 2 \int \ln x \, dx = x(\ln x)^2 - 2x(\ln x - 1) + C. \\ &= x(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x + C = x[(\ln x)^2 - 2 \ln x + 2] + C. \end{aligned}$$

$$\int (\ln x)^2 \, dx = x[(\ln x - 1)^2 + 1] + C.$$

(Note que $(\ln x - 1)^2 + 1 = (\ln x)^2 - 2 \ln x + 2$, confirmando a equivalência.)

16.4 Exemplos com Exponencial

16.4.1 Exemplo 5 — $\int x e^x \, dx$

Escolha: $u = x$, $dv = e^x \, dx$.

$$du = dx, \quad v = e^x.$$

$$\int x e^x \, dx = x e^x - \int e^x \, dx = x e^x - e^x + C = e^x(x - 1) + C.$$

$$\int x e^x \, dx = e^x(x - 1) + C.$$

Verificação: $(e^x(x - 1))' = e^x(x - 1) + e^x = x e^x$. ✓

16.4.2 Exemplo 6 — $\int x^2 e^x dx$

Duas aplicações de integração por partes são necessárias.

1ª aplicação: $u = x^2$, $dv = e^x dx \Rightarrow du = 2x dx$, $v = e^x$.

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx.$$

2ª aplicação: do Exemplo 5, $\int x e^x dx = e^x(x - 1) + C$.

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2e^x(x - 1) + C = e^x(x^2 - 2x + 2) + C.$$

$$\boxed{\int x^2 e^x dx = e^x(x^2 - 2x + 2) + C.}$$

Verificação: $(e^x(x^2 - 2x + 2))' = e^x(x^2 - 2x + 2) + e^x(2x - 2) = e^x x^2. \checkmark$

16.4.3 Exemplo 7 — $\int x e^{-3x} dx$

Escolha: $u = x$, $dv = e^{-3x} dx$.

$$du = dx, \quad v = -\frac{1}{3}e^{-3x}.$$

$$\begin{aligned} \int x e^{-3x} dx &= -\frac{x}{3}e^{-3x} - \int \left(-\frac{1}{3}\right) e^{-3x} dx = -\frac{x}{3}e^{-3x} + \frac{1}{3} \int e^{-3x} dx. \\ &= -\frac{x}{3}e^{-3x} + \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) e^{-3x} + C = -\frac{x}{3}e^{-3x} - \frac{1}{9}e^{-3x} + C. \end{aligned}$$

$$\boxed{\int x e^{-3x} dx = -\frac{e^{-3x}}{9}(3x + 1) + C.}$$

Verificação: $\frac{d}{dx} \left[-\frac{e^{-3x}}{9}(3x + 1) \right] = \frac{3e^{-3x}}{9}(3x + 1) - \frac{3e^{-3x}}{9} = e^{-3x} \left(x + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \right) = x e^{-3x}. \checkmark$

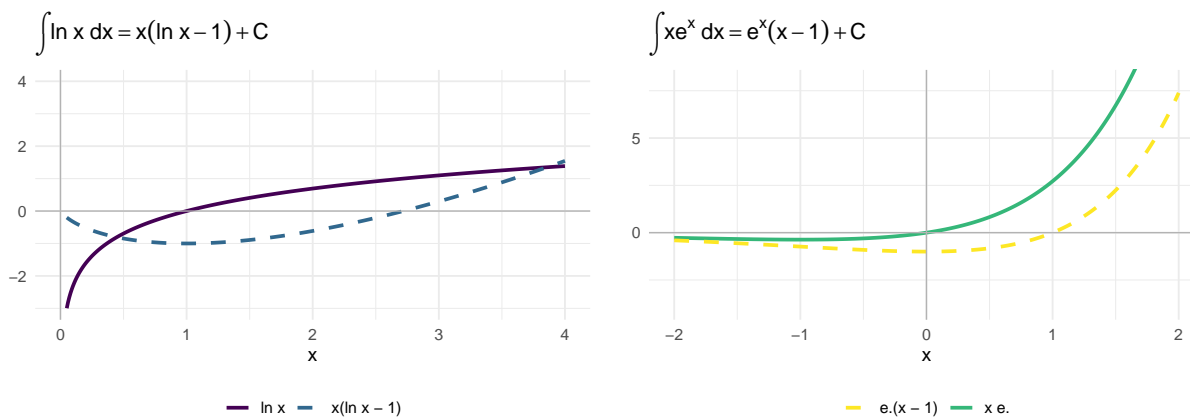


Figura 39: Integração por partes: integrando e primitiva para dois exemplos. À esquerda: $\int \ln x \, dx = x(\ln x - 1) + C$ — o integrando $\ln x$ e a primitiva $x(\ln x - 1)$. À direita: $\int xe^x \, dx = e^x(x - 1) + C$ — o integrando xe^x e a primitiva $e^x(x - 1)$.

17 Monitoria 6

17.1 Resumo das Regras

17.1.1 Derivadas

Regra	Fórmula
Produto	$(f_1 \cdot f_2)' = f_1' f_2 + f_1 f_2'$
Quociente	$\left(\frac{f_1}{f_2}\right)' = \frac{f_1' f_2 - f_1 f_2'}{f_2^2}$
Cadeia	$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$
Potência	$(x^n)' = nx^{n-1}$
Exponencial	$(e^x)' = e^x$
Logaritmo	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$

17.1.2 Integrais

Regra	Fórmula
Potência	$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$
Logaritmo	$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln x + C$
Exponencial	$\int e^x \, dx = e^x + C$

17.2 Exercício 1 — Regra do Produto com Logaritmo e Raiz

17.2.1 $f(x) = \ln(\sqrt{x}) \cdot \sqrt{x+1}$

Identificação das partes: $u = \ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2} \ln x$ e $v = \sqrt{x+1} = (x+1)^{1/2}$.

$$u' = \frac{1}{2x}, \quad v' = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}.$$

Aplicando a regra do produto $f' = u'v + uv'$:

$$f'(x) = \frac{1}{2x} \cdot \sqrt{x+1} + \ln(\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x+1}}.$$

Denominador comum $2x\sqrt{x+1}$:

$$f'(x) = \frac{(x+1) + x \ln(\sqrt{x})}{2x\sqrt{x+1}} = \frac{x+1 + \frac{x}{2} \ln x}{2x\sqrt{x+1}}.$$

Verificação de dimensão: para $x > 0$, o numerador tem termos $x+1 > 0$ e $\frac{x}{2} \ln x$ (que pode ser negativo para $x < 1$); o denominador $2x\sqrt{x+1} > 0$. Consistente.

17.3 Exercício 2 — Regra do Quociente

17.3.1 $g(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x \ln x}$

Identificação: $p = \sqrt{x+1}$, $q = x \ln x$.

$$p' = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}, \quad q' = \ln x + 1.$$

Regra do quociente $g' = (p'q - pq')/q^2$:

$$g'(x) = \frac{\frac{x \ln x}{2\sqrt{x+1}} - \sqrt{x+1}(\ln x + 1)}{(x \ln x)^2}.$$

Multiplicando numerador e denominador por $2\sqrt{x+1}$:

$$g'(x) = \frac{x \ln x - 2(x+1)(\ln x + 1)}{2\sqrt{x+1} (x \ln x)^2}.$$

Expandindo o numerador:

$$\begin{aligned}x \ln x - 2(x+1) \ln x - 2(x+1) &= \ln x [x - 2x - 2] - 2(x+1) = -\ln x (x+2) - 2(x+2) + 2. \\ &= -(x+2)(\ln x + 2) + 2.\end{aligned}$$

$$g'(x) = \frac{-(x+2)(\ln x + 2) + 2}{2\sqrt{x+1}(x \ln x)^2}.$$

17.4 Exercício 3 — Regra da Cadeia com Funções Aninhadas

17.4.1 $h(x) = \sqrt{1+x+\sqrt{x^2+1}}$

Escrevemos $h(x) = [w(x)]^{1/2}$ com $w(x) = 1+x+\sqrt{x^2+1}$.

Derivada de w : pela regra da cadeia,

$$w'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Derivada de h :

$$h'(x) = \frac{w'(x)}{2\sqrt{w(x)}} = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{2\sqrt{1+x+\sqrt{x^2+1}}}.$$

Simplificando o numerador — denominador comum $\sqrt{x^2+1}$:

$$h'(x) = \frac{\sqrt{x^2+1} + x}{2\sqrt{x^2+1} \cdot \sqrt{1+x+\sqrt{x^2+1}}}.$$

$$h'(x) = \frac{x + \sqrt{x^2+1}}{2\sqrt{x^2+1} \cdot \sqrt{1+x+\sqrt{x^2+1}}}.$$

17.5 Exercício 4 — Logaritmo de Função Composta com Raiz

17.5.1 $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - a^2})$, $|x| > a > 0$

Objetivo: mostrar que $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}}$.

Derivada pela regra da cadeia com $g(x) = x + \sqrt{x^2 - a^2}$:

$$f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}, \quad g'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{\sqrt{x^2 - a^2} + x}{\sqrt{x^2 - a^2}}.$$

Portanto:

$$f'(x) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} \cdot \frac{\sqrt{x^2 - a^2} + x}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{\sqrt{x^2 - a^2} + x}{(x + \sqrt{x^2 - a^2})\sqrt{x^2 - a^2}}.$$

O fator $(x + \sqrt{x^2 - a^2})$ cancela:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}}.$$

Caso $a = 0$: $f(x) = \ln(x + |x|)$, não definido para $x \leq 0$. Para $x > 0$: $f(x) = \ln(2x)$, $f'(x) = 1/x = 1/\sqrt{x^2}$. Consistente. ✓

17.6 Exercício 5 — Aplicação do Teorema da Função Inversa

Seja $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - a^2})$ do Exercício 4. Pelo Exercício 4, $f'(x) = 1/\sqrt{x^2 - a^2} > 0$, logo f é estritamente crescente e possui inversa f^{-1} .

a) Calcular $(f^{-1})'(y)$.

Pelo Teorema da Função Inversa, sendo $y = f(x)$:

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \sqrt{x^2 - a^2}.$$

b) Expressar em termos de y .

De $y = \ln(x + \sqrt{x^2 - a^2})$ temos $e^y = x + \sqrt{x^2 - a^2}$. Também:

$$x - \sqrt{x^2 - a^2} = \frac{(x - \sqrt{x^2 - a^2})(x + \sqrt{x^2 - a^2})}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{a^2}{e^y}.$$

Somando: $2x = e^y + a^2 e^{-y}$, ou seja, $x = f^{-1}(y) = \frac{e^y + a^2 e^{-y}}{2} = a \cosh\left(\frac{y}{a}\right)$ para $a = 1$.

Portanto:

$$\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{\left(\frac{e^y + a^2 e^{-y}}{2}\right)^2 - a^2},$$

e para $a = 1$: $f^{-1}(y) = \cosh(y)$ e $(f^{-1})'(y) = \sinh(y) = \sqrt{\cosh^2 y - 1}$.

$$\boxed{(f^{-1})'(y) = \sqrt{(f^{-1}(y))^2 - a^2}.}$$

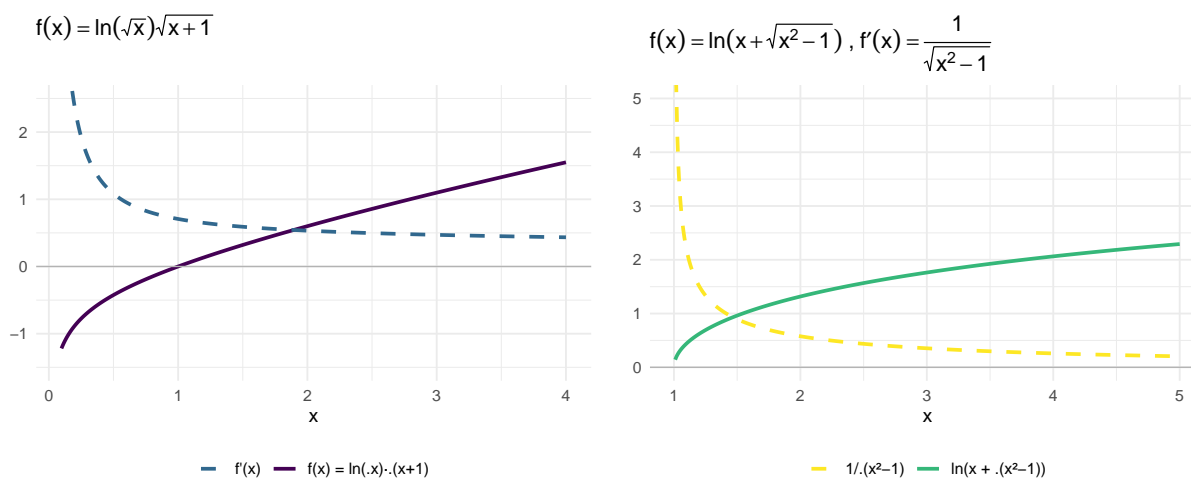


Figura 40: Exercícios da Monitoria 6. À esquerda: $f(x) = \ln(\sqrt{x}) \cdot \sqrt{x+1}$ e sua derivada. À direita: $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$ e sua derivada $f'(x) = 1/\sqrt{x^2 - 1}$.

18 Monitoria 7

18.1 Resumo das Regras

18.1.1 Derivadas

Regra	Fórmula
D — Soma	$(f + g)' = f' + g'$
D — Produto	$(f \cdot g)' = f'g + fg'$
D — Quociente	$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$
D — Cadeia	$(f(g))' = f'(g) \cdot g'$
D — Potência	$(x^n)' = nx^{n-1}$
D — Logaritmo	$(\ln f)' = \frac{f'}{f}$
D — Potência geral	$(f^g)' = f^g \cdot (g \ln f)'$

18.1.2 Integrações

Regra	Fórmula
I — Mudança de variável	$\int f(g(x)) g'(x) dx = \int f(u) du$
I — Integração por partes	$\int u dv = uv - \int v du$

18.2 Regra D — Diferenciação Logarítmica (Potência Geral)

Para $f(x)^{g(x)}$ com $f(x) > 0$, aplicamos \ln e diferenciamos:

$$\ln[f(x)^{g(x)}] = g(x) \ln f(x).$$

Diferenciando ambos os lados:

$$\frac{[f(x)^{g(x)}]'}{f(x)^{g(x)}} = g'(x) \ln f(x) + g(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Portanto:

$$\boxed{[f(x)^{g(x)}]' = f(x)^{g(x)} \left(g'(x) \ln f(x) + g(x) \frac{f'(x)}{f(x)} \right)}.$$

Interpretação: a derivada tem dois termos — um pelo “expoente variando” ($g'(x) \ln f$) e outro pela “base variando” ($g(x)f'/f$). Para g constante, recupera-se a regra da potência; para $f = e$, recupera-se $(e^g)' = e^g g'$.

18.3 Exemplos — Potência Geral

18.3.1 Exemplo 1 — $f(x) = x^x$

Identificamos $f = x$, $g = x$.

$$f'(x) = x^x \left(1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} \right) = x^x (\ln x + 1).$$

$$\boxed{f'(x) = x^x (\ln x + 1)}.$$

18.3.2 Exemplo 2 — $g(x) = (\ln(2x + 1))^{x-3}$

Identificamos $f = \ln(2x + 1)$, $g = x - 3$.

$$f' = \frac{2}{2x + 1}, \quad g' = 1.$$

Aplicando D :

$$g'(x) = (\ln(2x + 1))^{x-3} \left[1 \cdot \ln(\ln(2x + 1)) + (x - 3) \cdot \frac{2/(\ln(2x + 1))}{\ln(2x + 1)} \right].$$

$$\boxed{g'(x) = (\ln(2x + 1))^{x-3} \left[\ln(\ln(2x + 1)) + \frac{2(x - 3)}{(2x + 1) \ln(2x + 1)} \right]}.$$

Observação: o segundo termo requer $\ln(2x + 1) \neq 0$, i.e., $x \neq 0$, além de $2x + 1 > 0$.

18.3.3 Exemplo 3 — $h(x) = \left(\frac{x^2 - x}{3 + x^2}\right)^{x^2}$

Identificamos $f = \frac{x^2 - x}{3 + x^2}$, $g = x^2$.

Derivada de f pela regra do quociente:

$$f'(x) = \frac{(2x - 1)(3 + x^2) - (x^2 - x) \cdot 2x}{(3 + x^2)^2} = \frac{6x - 3 + 2x^3 - x^2 - 2x^3 + 2x^2}{(3 + x^2)^2} = \frac{x^2 + 6x - 3}{(3 + x^2)^2}.$$

Razão f'/f :

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{x^2 + 6x - 3}{(3 + x^2)^2} \cdot \frac{3 + x^2}{x^2 - x} = \frac{x^2 + 6x - 3}{(3 + x^2)(x^2 - x)}.$$

Aplicando D com $g'(x) = 2x$:

$$h'(x) = \left(\frac{x^2 - x}{3 + x^2}\right)^{x^2} \left[2x \ln\left(\frac{x^2 - x}{3 + x^2}\right) + x^2 \cdot \frac{x^2 + 6x - 3}{(3 + x^2)(x^2 - x)} \right].$$

$$h'(x) = \left(\frac{x^2 - x}{3 + x^2}\right)^{x^2} \left[2x \ln\left(\frac{x^2 - x}{3 + x^2}\right) + \frac{x^2(x^2 + 6x - 3)}{(3 + x^2)(x^2 - x)} \right].$$

18.4 Derivação da Fórmula de Integração por Partes

A integração por partes é a contrapartida integral da **regra do produto D**. Sejam f e g diferenciáveis. Então:

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Integrando ambos os lados em relação a x :

$$f(x)g(x) = \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx.$$

Isolando a integral do lado direito:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx.$$

Substituição de variáveis: definindo $u = f(x)$, $du = f'(x)dx$, $v = g(x)$, $dv = g'(x)dx$:

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

18.5 Exemplos — Integração por Partes

18.5.1 Exemplo 4 — $\int xe^x dx$

Escolha: $u = x \Rightarrow du = dx$; $dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x$.

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C = e^x(x - 1) + C.$$

$$\int xe^x dx = e^x(x - 1) + C.$$

Verificação:

$$[e^x(x - 1)]' = e^x(x - 1) + e^x \cdot 1 = e^xx - e^x + e^x = xe^x. \quad \checkmark$$

18.5.2 Exemplo 5 — $\int \ln x dx$

Escolha: $u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx$; $dv = dx \Rightarrow v = x$.

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C.$$

$$\int \ln x dx = x(\ln x - 1) + C.$$

Verificação:

$$[x(\ln x - 1)]' = (\ln x - 1) + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x - 1 + 1 = \ln x. \quad \checkmark$$

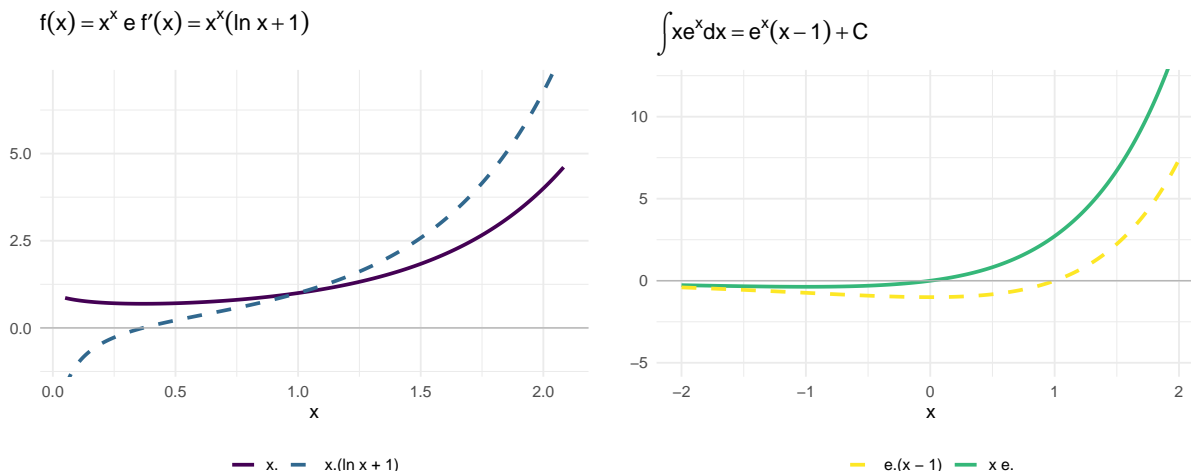


Figura 41: Monitoria 7: diferenciação logarítmica e integração por partes. À esquerda: $f(x) = x^x$ e $f'(x) = x^x(\ln x + 1)$. À direita: integrando $x e^x$ e sua primitiva $e^x(x - 1)$.

19 Monitoria 9

19.1 Resumo das Regras de Derivação

Regra	Fórmula
D — Soma	$(f \pm g)' = f' \pm g'$
D — Constante	$(k f)' = k f'$
D — Produto	$(f \cdot g)' = f' g + f g'$
D — Quociente	$(f/g)' = (f' g - f g')/g^2$
D — Cadeia	$(f(g))' = f'(g) \cdot g'$
D — Exponencial	$(e^f)' = e^f \cdot f'$
D — Logaritmo	$(\ln f)' = f'/f$
D — Potência geral	$(f^g)' = f^g (g \ln f)' = f^g \left(g' \ln f + g \frac{f'}{f} \right)$

A regra D é a forma compacta da **diferenciação logarítmica**, ferramenta central nesta lista: sempre que aparecer base e/ou expoente variando, aplicamos \ln antes de derivar.

19.2 Exercício 1 — Parte (a)

Calcule a derivada de

$$f(x) = \frac{5^{x^3}}{\sqrt{x^x}}$$

19.2.1 Estratégia: simplificar antes de derivar

Reescrevemos $\sqrt{x^x} = x^{x/2}$ (para $x > 0$), de modo que

$$f(x) = 5^{x^3} \cdot x^{-x/2}.$$

Tomando logaritmo,

$$\ln f(x) = x^3 \ln 5 - \frac{x}{2} \ln x.$$

Diferenciando ambos os lados (à esquerda, regra D ; à direita, derivadas conhecidas):

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 3x^2 \ln 5 - \left[\frac{1}{2} \ln x + \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{x} \right] = 3x^2 \ln 5 - \frac{\ln x + 1}{2}.$$

Multiplicando por $f(x)$:

$$f'(x) = \frac{5^{x^3}}{\sqrt{x^x}} \left[3x^2 \ln 5 - \frac{\ln x + 1}{2} \right].$$

Verificação dos sinais: para x grande, o termo $3x^2 \ln 5$ domina e f' é positivo — coerente com 5^{x^3} explodindo muito mais rápido que $x^{x/2}$. Perto de $x = 1$, o termo $-(\ln x + 1)/2 = -1/2$ é o que conta, e $f'(1) = 5(3 \ln 5 - 1/2) \approx 5 \cdot 4,33 \approx 21,66$.

19.3 Exercício 1 — Parte (b)

Calcule a derivada de

$$f(x) = x^2 3^x + \sqrt[3]{x^{e^x} - \ln x^{e^x}}.$$

19.3.1 Termo 1: $x^2 3^x$

Aplicando a regra do produto D , com $(3^x)' = 3^x \ln 3$:

$$(x^2 3^x)' = 2x 3^x + x^2 3^x \ln 3 = x 3^x (2 + x \ln 3).$$

19.3.2 Termo 2: $\sqrt[3]{x^{e^x} - \ln x^{e^x}}$

Simplificação preliminar: $\ln x^{e^x} = e^x \ln x$ (propriedade do logaritmo). Logo o radicando é $w(x) := x^{e^x} - e^x \ln x$.

Derivada de x^{e^x} (D via log diff.): $\ln(x^{e^x}) = e^x \ln x$, então

$$\frac{(x^{e^x})'}{x^{e^x}} = e^x \ln x + e^x \cdot \frac{1}{x} = e^x \left(\ln x + \frac{1}{x} \right).$$

Portanto $(x^{e^x})' = x^{e^x} e^x (\ln x + 1/x)$.

Derivada de $e^x \ln x$ (regra do produto): $(e^x \ln x)' = e^x \ln x + e^x/x = e^x (\ln x + 1/x)$.

Logo:

$$w'(x) = x^{e^x} e^x (\ln x + \frac{1}{x}) - e^x (\ln x + \frac{1}{x}) = e^x (\ln x + \frac{1}{x}) (x^{e^x} - 1).$$

Como $\sqrt[3]{w} = w^{1/3}$, pela regra da cadeia D :

$$(w^{1/3})' = \frac{1}{3} w^{-2/3} w'(x) = \frac{w'(x)}{3\sqrt[3]{w^2}}.$$

19.3.3 Resposta final

$$f'(x) = x 3^x (2 + x \ln 3) + \frac{e^x \left(\ln x + \frac{1}{x} \right) (x^{e^x} - 1)}{3\sqrt[3]{(x^{e^x} - e^x \ln x)^2}}.$$

19.4 Questão 02 — Exame 2025

Calcule a derivada de

$$f(x) = \left[\frac{e^{x^2} \ln(2^{3x+x^x} + (\ln x)^2)}{4x^5 + \sqrt{x^3 + 1}} \right]^x.$$

A função tem a forma $f(x) = f_1(x)^x$ — base composta e expoente variando. Aplicamos D e depois decompos f_1 modularmente.

19.4.1 Passo 1 — Diferenciação logarítmica do envelope f^x

Pela regra D com $g(x) = x$:

$$f'(x) = f_1(x)^x (x \ln f_1(x))' = f_1(x)^x \left[\ln f_1(x) + x \cdot \frac{f_1'(x)}{f_1(x)} \right].$$

Resta calcular $f_1'(x)$, onde

$$f_1(x) = \frac{f_2(x) \cdot f_3(x)}{f_4(x)}, \quad \begin{cases} f_2(x) = e^{x^2}, \\ f_3(x) = \ln(2^{3x+x^x} + (\ln x)^2), \\ f_4(x) = 4x^5 + \sqrt{x^3 + 1}. \end{cases}$$

19.4.2 Passo 2 — Derivada de f_1 pela regra do quociente e do produto

Pela combinação de D (no numerador) e D :

$$f_1'(x) = \frac{(f_2'(x)f_3(x) + f_2(x)f_3'(x))f_4(x) - f_2(x)f_3(x)f_4'(x)}{f_4(x)^2}.$$

19.4.3 Passo 3 — Derivadas de cada bloco

$f_2'(x)$: pela regra D, $f_2'(x) = e^{x^2} \cdot 2x = 2x e^{x^2}$.

$f_4'(x)$: soma direta com cadeia na raiz,

$$f_4'(x) = 20x^4 + \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3 + 1}}.$$

$f_3'(x)$: denotando $h(x) = 2^{3x+x^x} + (\ln x)^2$, temos $f_3 = \ln h$, logo $f_3' = h'/h$. Para h' :

- Para 2^{3x+x^x} , aplicamos D com base constante = 2: $(2^{p(x)})' = 2^{p(x)} \ln 2 \cdot p'(x)$, com $p(x) = 3x + x^x$.
 - Pela regra D aplicada a x^x : $(x^x)' = x^x(\ln x + 1)$, donde $p'(x) = 3 + x^x(\ln x + 1)$.
 - Portanto $(2^{3x+x^x})' = 2^{3x+x^x} \ln 2 [3 + x^x(\ln x + 1)]$.
- Para $(\ln x)^2$, pela regra da cadeia: $((\ln x)^2)' = 2 \ln x \cdot (1/x) = 2 \ln x/x$.

Juntando,

$$h'(x) = 2^{3x+x^x} \ln 2 [3 + x^x(\ln x + 1)] + \frac{2 \ln x}{x}.$$

E portanto

$$f_3'(x) = \frac{h'(x)}{h(x)} = \frac{2^{3x+x^x} \ln 2 [3 + x^x (\ln x + 1)] + \frac{2 \ln x}{x}}{2^{3x+x^x} + (\ln x)^2}.$$

19.4.4 Passo 4 — Montagem final

Substituindo f_2' , f_3' e f_4' em f_1' , e em seguida f_1 e f_1' na expressão de f' do Passo 1, obtém-se a derivada explícita:

$$f'(x) = f_1(x)^x \left[\ln f_1(x) + x \cdot \frac{f_1'(x)}{f_1(x)} \right],$$

com f_1, f_1' dados pelas fórmulas acima. **Não vale a pena** expandir esta expressão simbolicamente: ela ocupa várias linhas e o ganho pedagógico se perde no algebrismo. O que importa é o **mapa de derivação**:

1. envelope $f^x \rightarrow D$;
2. f_1 é quociente $\rightarrow D$, com numerador via D ;
3. $f_2 = e^{x^2} \rightarrow$ cadeia em e ;
4. $f_3 = \ln h \rightarrow D$;
5. dentro de h : termo $2^{p(x)}$ com $p = 3x + x^x \rightarrow D$ aninhada;
6. $f_4 \rightarrow$ soma com cadeia na raiz.

Cada passo aplica uma regra elementar — a dificuldade é puramente **organizacional**, e o domínio dessa decomposição modular é o que a questão testa.

19.5 Verificação Numérica

Comparamos a derivada analítica do Exercício 1(a) com a aproximação por diferenças centrais $(f(x+h) - f(x-h))/(2h)$.

x	analitica	numerica	erro
1 0.5	1.532237e+00	1.532237e+00	6.063523e-10
2 1.0	2.164157e+01	2.164157e+01	1.752238e-08
3 1.5	1.713526e+03	1.713526e+03	4.198359e-06
4 2.0	3.606774e+06	3.606774e+06	2.400275e-02

x	analítica	numérica	erro
0.50	1.532237	1.532237	6.06e-10
1.00	21.641569	21.641569	1.75e-08
1.50	1713.525741	1713.525745	4.20e-06
2.00	3606773.702916	3606773.726919	2.40e-02

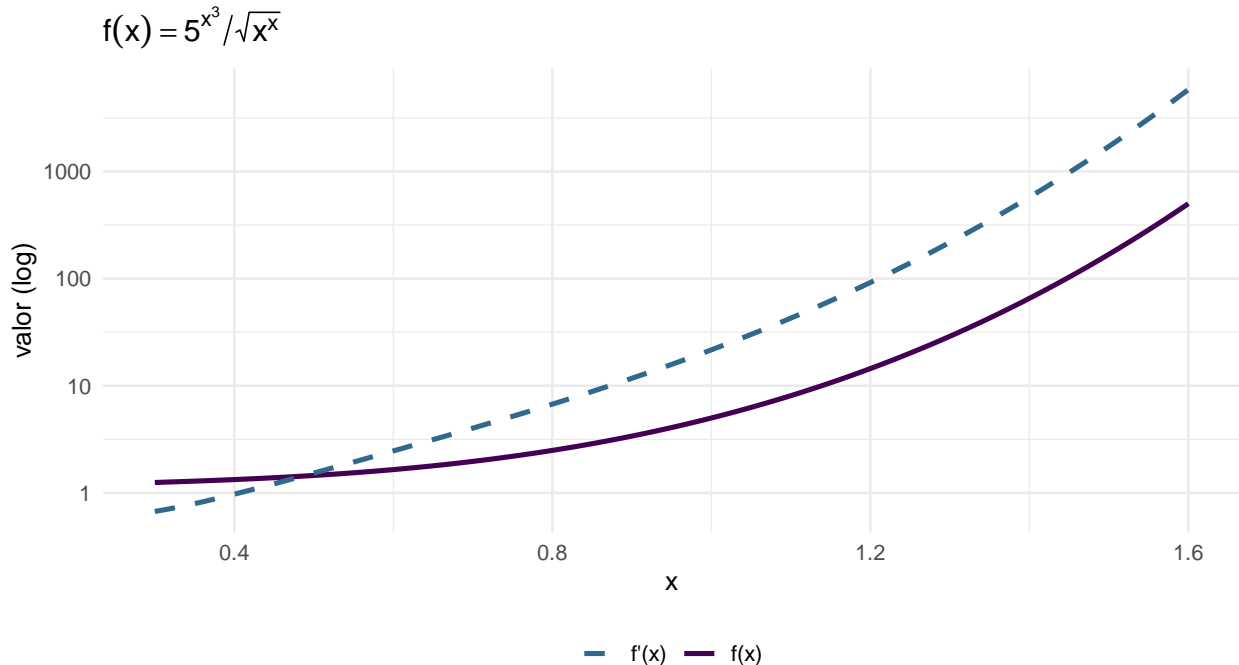


Figura 42: Monitoria 9: $f(x) = 5^{x^3} / \sqrt{x^x}$ (sólida) e sua derivada $f'(x)$ (tracejada). Em escala logarítmica, ambas crescem rapidamente; a derivada é positiva em todo o intervalo, refletindo o domínio de 5^{x^3} sobre $x^{x/2}$ no denominador.

20 Testes Anteriores — Teste 2

20.1 Teste 2 (2026) — 11 de abril de 2026

20.1.1 Questão 1 — Derivadas

Utilizando os teoremas de derivação, calcule a derivada das seguintes funções.

20.1.1.1 a) $f(x) = \frac{(x^3 - 2x) \cdot e^{-x^4+4x}}{x \cdot \sqrt{x+3}}$

Estratégia: Regra do quociente, com numerador tratado pela regra do produto e denominador pela regra do produto. A regra da cadeia entra na derivação de e^{-x^4+4x} e de $(x+3)^{1/2}$.

Definimos $N = (x^3 - 2x) \cdot e^{-x^4+4x}$ e $D = x(x+3)^{1/2}$, de modo que $f = N/D$.

Derivada do numerador (regra do produto):

$$\begin{aligned} N' &= (3x^2 - 2) e^{-x^4+4x} + (x^3 - 2x) \cdot e^{-x^4+4x} \cdot (-4x^3 + 4) \\ &= e^{-x^4+4x} [(3x^2 - 2) + (x^3 - 2x)(4 - 4x^3)] \\ &= e^{-x^4+4x} [-4x^6 + 8x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 8x - 2]. \end{aligned}$$

Derivada do denominador (regra do produto):

$$D' = (x+3)^{1/2} + x \cdot \frac{1}{2}(x+3)^{-1/2} = \frac{2(x+3) + x}{2\sqrt{x+3}} = \frac{3(x+2)}{2\sqrt{x+3}}.$$

Aplicando a regra do quociente com $D^2 = x^2(x+3)$:

$$f'(x) = \frac{N'D - ND'}{D^2}$$

$$= \frac{e^{-x^4+4x}[-4x^6 + 8x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 8x - 2] \cdot x\sqrt{x+3} - (x^3 - 2x)e^{-x^4+4x} \cdot \frac{3(x+2)}{2\sqrt{x+3}}}{x^2(x+3)}.$$

Fatorando e^{-x^4+4x} e colocando sobre denominador comum $2\sqrt{x+3}$:

$$f'(x) = \frac{e^{-x^4+4x}}{2x(x+3)^{3/2}} [2(x+3)(-4x^6 + 8x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 8x - 2) - 3(x^2 - 2)(x+2)].$$

20.1.1.2 b) $f(x) = \ln(x + e^{x+x^2}) \cdot \sqrt{3-x^3} + e^{x+\ln x}$

Simplificação prévia. Usando $e^{x+\ln x} = e^x \cdot e^{\ln x} = xe^x$, reescrevemos:

$$f(x) = \underbrace{\ln(x + e^{x+x^2})}_A \cdot \underbrace{(3-x^3)^{1/2}}_B + xe^x.$$

Derivadas de cada peça:

$$A' = \frac{[x + e^{x+x^2}]'}{x + e^{x+x^2}} = \frac{1 + (1+2x)e^{x+x^2}}{x + e^{x+x^2}},$$

$$B' = \frac{1}{2}(3-x^3)^{-1/2} \cdot (-3x^2) = -\frac{3x^2}{2\sqrt{3-x^3}},$$

$$(xe^x)' = e^x + xe^x = (1+x)e^x.$$

Aplicando a regra do produto em AB e somando $(xe^x)'$:

$$f'(x) = \frac{1 + (1+2x)e^{x+x^2}}{x + e^{x+x^2}} \cdot \sqrt{3-x^3} - \frac{3x^2 \ln(x + e^{x+x^2})}{2\sqrt{3-x^3}} + (1+x)e^x.$$

20.1.2 Questão 2 — Integrais Indefinidas

20.1.2.1 a) $\int \frac{2x - x^2}{(1 + 3x^2 - x^3)^3} dx$

Substituição. Identificamos $u = 1 + 3x^2 - x^3$. Então:

$$du = (6x - 3x^2) dx = 3(2x - x^2) dx \Rightarrow (2x - x^2) dx = \frac{du}{3}.$$

Substituindo:

$$\int \frac{2x - x^2}{(1 + 3x^2 - x^3)^3} dx = \frac{1}{3} \int u^{-3} du = \frac{1}{3} \cdot \frac{u^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{6u^2} + C.$$

$$\boxed{\int \frac{2x - x^2}{(1 + 3x^2 - x^3)^3} dx = -\frac{1}{6(1 + 3x^2 - x^3)^2} + C.}$$

20.1.2.2 b) $\int \frac{x - 5}{x + 3} dx$

Divisão do integrando. Reescrevemos o numerador em termos do denominador:

$$\frac{x - 5}{x + 3} = \frac{(x + 3) - 8}{x + 3} = 1 - \frac{8}{x + 3}.$$

Integrando:

$$\int \left(1 - \frac{8}{x + 3}\right) dx = x - 8 \ln |x + 3| + C.$$

$$\boxed{\int \frac{x - 5}{x + 3} dx = x - 8 \ln |x + 3| + C.}$$

20.1.3 Questão 3 — Integrais Definidas

20.1.3.1 a) $\int_0^1 (x^3 + 4)^4 x^2 dx$

Substituição com troca de limites. Fazemos $u = x^3 + 4$, $du = 3x^2 dx$:

$$x^2 dx = \frac{du}{3}; \quad x = 0 \Rightarrow u = 4, \quad x = 1 \Rightarrow u = 5.$$

$$\int_0^1 (x^3 + 4)^4 x^2 dx = \frac{1}{3} \int_4^5 u^4 du = \frac{1}{3} \left[\frac{u^5}{5} \right]_4^5 = \frac{1}{15} (5^5 - 4^5) = \frac{3125 - 1024}{15}.$$

$$\int_0^1 (x^3 + 4)^4 x^2 dx = \frac{2101}{15} \approx 140,07.$$

20.1.3.2 b) $\int_1^2 \frac{\sqrt{2 + \frac{2}{x^2}}}{x^3} dx$

Substituição com troca de limites. Fazemos $u = 2 + \frac{2}{x^2}$. Então:

$$du = -\frac{4}{x^3} dx \Rightarrow \frac{dx}{x^3} = -\frac{du}{4}; \quad x = 1 \Rightarrow u = 4, \quad x = 2 \Rightarrow u = \frac{5}{2}.$$

$$\int_1^2 \frac{\sqrt{2 + 2/x^2}}{x^3} dx = \int_4^{5/2} \sqrt{u} \left(-\frac{du}{4} \right) = \frac{1}{4} \int_{5/2}^4 u^{1/2} du = \frac{1}{4} \cdot \frac{2u^{3/2}}{3} \Big|_{5/2}^4 = \frac{1}{6} \left[4^{3/2} - \left(\frac{5}{2} \right)^{3/2} \right].$$

Calculando cada termo:

$$4^{3/2} = 8, \quad \left(\frac{5}{2} \right)^{3/2} = \frac{5^{3/2}}{2^{3/2}} = \frac{5\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{10}}{4}.$$

$$\int_1^2 \frac{\sqrt{2 + 2/x^2}}{x^3} dx = \frac{1}{6} \left(8 - \frac{5\sqrt{10}}{4} \right) = \frac{32 - 5\sqrt{10}}{24}.$$

$$\int_1^2 \frac{\sqrt{2 + 2/x^2}}{x^3} dx = \frac{32 - 5\sqrt{10}}{24} \approx 0,675.$$

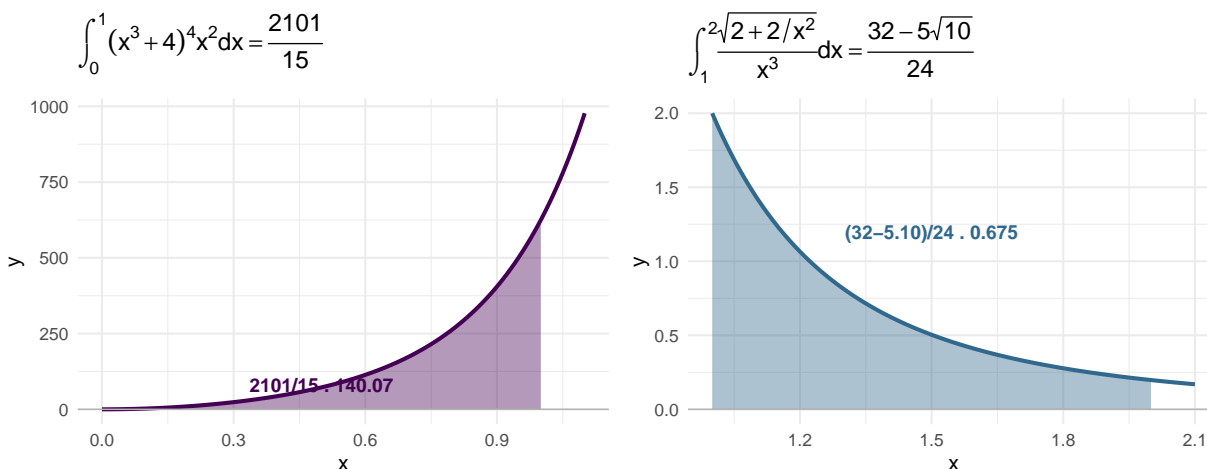


Figura 43: Verificação numérica: Questão 3a (esquerda) e Questão 3b (direita). As áreas sombreadas correspondem aos valores exatos obtidos pela Regra de Barrow.

20.2 Teste 2 (2025) — 7 de abril de 2025

20.2.1 Questão 1 — Derivadas

Utilizando os teoremas de derivação, calcule a derivada das seguintes funções.

20.2.1.1 a) $f(x) = \ln(x^2 + 1) \cdot \sqrt{x^3 + 2}$

Estratégia: Regra do produto com cadeia em cada fator.

Definimos $A = \ln(x^2 + 1)$ e $B = (x^3 + 2)^{1/2}$:

$$A' = \frac{2x}{x^2 + 1}, \quad B' = \frac{1}{2}(x^3 + 2)^{-1/2} \cdot 3x^2 = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3 + 2}}.$$

Pela regra do produto:

$$f'(x) = \frac{2x\sqrt{x^3 + 2}}{x^2 + 1} + \frac{3x^2 \ln(x^2 + 1)}{2\sqrt{x^3 + 2}}.$$

20.2.1.2 b) $g(x) = \frac{(x^2 + x + 1)^3}{x \cdot \ln(x^5)}$

Simplificação prévia. Como $\ln(x^5) = 5 \ln x$:

$$g(x) = \frac{(x^2 + x + 1)^3}{5x \ln x}.$$

Derivadas das partes com $N = (x^2 + x + 1)^3$ e $D = 5x \ln x$:

$$N' = 3(x^2 + x + 1)^2(2x + 1),$$

$$D' = 5 \ln x + 5x \cdot \frac{1}{x} = 5(\ln x + 1).$$

Regra do quociente, fatorando $(x^2 + x + 1)^2$ e 5 do numerador:

$$g'(x) = \frac{N'D - ND'}{D^2} = \frac{3(x^2 + x + 1)^2(2x + 1) \cdot 5x \ln x - (x^2 + x + 1)^3 \cdot 5(\ln x + 1)}{25x^2 \ln^2 x}$$

$$g'(x) = \frac{(x^2 + x + 1)^2 [3x(2x + 1) \ln x - (x^2 + x + 1)(\ln x + 1)]}{5x^2 \ln^2 x}.$$

20.2.2 Questão 2 — Integrais

20.2.2.1 a) $\int \frac{x^2}{(x^3 + 1)^2} dx$

Substituição. Fazemos $u = x^3 + 1$, $du = 3x^2 dx$, portanto $x^2 dx = du/3$:

$$\int \frac{x^2}{(x^3 + 1)^2} dx = \frac{1}{3} \int u^{-2} du = \frac{1}{3} \cdot \frac{u^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{3u} + C.$$

$$\int \frac{x^2}{(x^3 + 1)^2} dx = -\frac{1}{3(x^3 + 1)} + C.$$

20.2.2.2 b) $\int_2^3 \frac{x}{x-1} dx$

Divisão do integrando:

$$\frac{x}{x-1} = \frac{(x-1) + 1}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}.$$

Integrando e aplicando a Regra de Barrow:

$$\int_2^3 \frac{x}{x-1} dx = \left[x + \ln |x-1| \right]_2^3 = (3 + \ln 2) - (2 + \ln 1) = 1 + \ln 2.$$

$$\int_2^3 \frac{x}{x-1} dx = 1 + \ln 2 \approx 1,693.$$

20.2.3 Questão 3 — Função Inversa de $f(x) = \frac{1}{x-1}$

20.2.3.1 a) Existência, cálculo e verificação de f^{-1}

Injetividade. f é diferenciável com $f'(x) = -(x-1)^{-2} < 0$ para todo $x \neq 1$. Sendo estritamente decrescente em cada ramo, f é **injetiva** em $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Formalmente: se $f(x_1) = f(x_2)$, então $\frac{1}{x_1-1} = \frac{1}{x_2-1}$, logo $x_1-1 = x_2-1$, ou seja $x_1 = x_2$. ■

Cálculo de f^{-1} . Escrevemos $y = \frac{1}{x-1}$ e isolamos x :

$$y(x-1) = 1 \Rightarrow x-1 = \frac{1}{y} \Rightarrow x = 1 + \frac{1}{y}.$$

$$f^{-1}(y) = 1 + \frac{1}{y} = \frac{y+1}{y}, \quad y \neq 0.$$

Verificação. $f(f^{-1}(y)) = f\left(1 + \frac{1}{y}\right) = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{y}\right) - 1} = \frac{1}{1/y} = y$. ✓

20.2.3.2 b) Esboço de f e f^{-1} no mesmo plano

O gráfico de f^{-1} é a reflexão do gráfico de f em relação à reta $y = x$.

- $f(x) = \frac{1}{x-1}$: hipérbole com assíntota vertical $x = 1$ e assíntota horizontal $y = 0$.
- $f^{-1}(x) = 1 + \frac{1}{x}$: hipérbole com assíntota vertical $x = 0$ e assíntota horizontal $y = 1$.

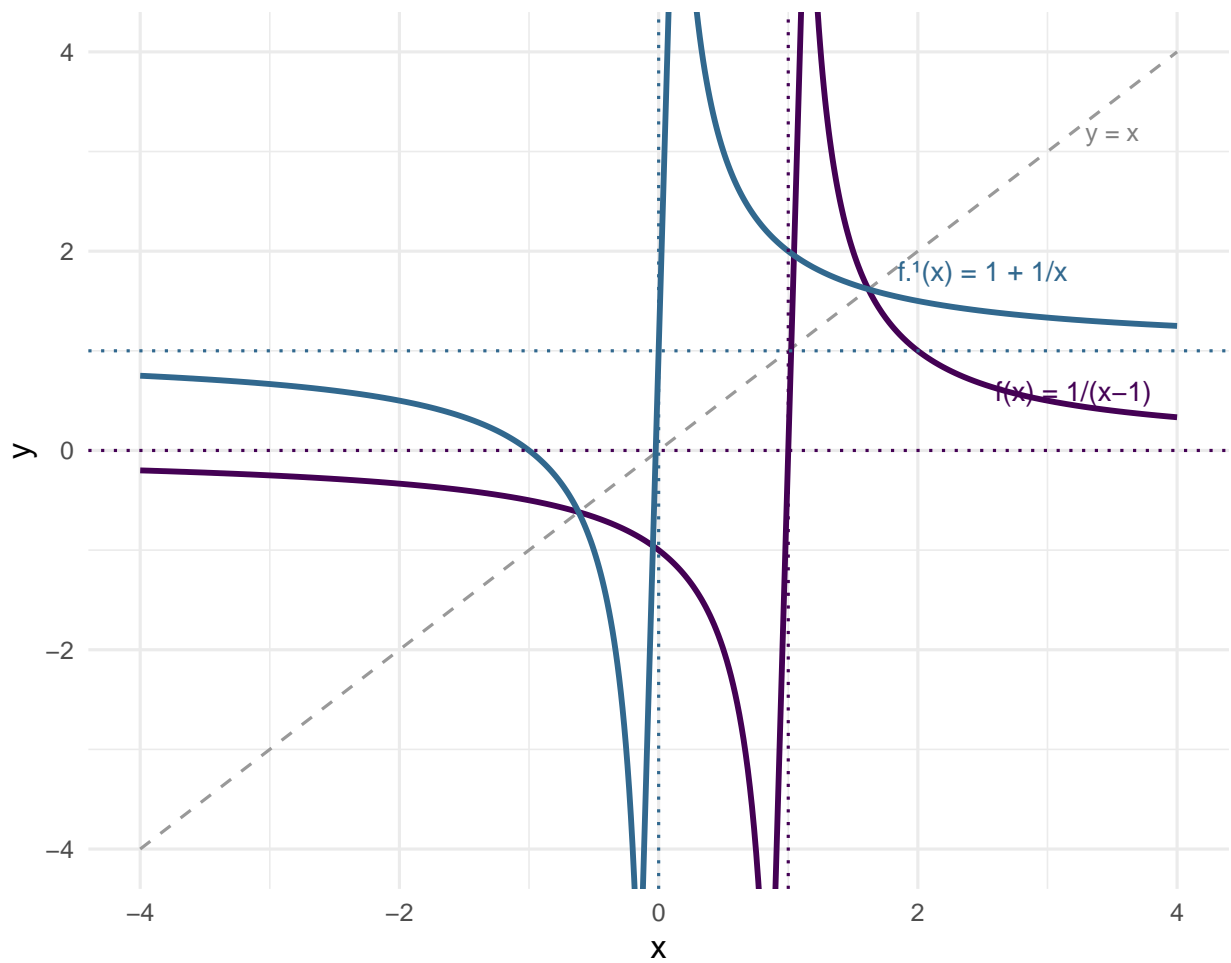


Figura 44: Funções $f(x) = 1/(x - 1)$ e $f^{-1}(x) = 1 + 1/x$. Os gráficos são reflexões um do outro em relação à reta $y = x$ (tracejada em cinza).

21 Testes Anteriores — Teste 3

21.1 Teste 3 (2026) — 25 de abril de 2026

21.1.1 Questão 1 — Derivadas

Encontre as derivadas das funções abaixo.

21.1.1.1 1.1 — $f(x) = \frac{\ln(x - x^3)}{(2x + 1)^x}$

Estratégia: Regra do quociente. O denominador $(2x + 1)^x$ tem a variável simultaneamente na base e no expoente — pede diferenciação logarítmica.

Sejam $N(x) = \ln(x - x^3)$ e $D(x) = (2x + 1)^x$.

Derivada do numerador (regra da cadeia):

$$N'(x) = \frac{1 - 3x^2}{x - x^3}.$$

Derivada do denominador. Tomando $\ln D = x \ln(2x + 1)$:

$$\frac{D'}{D} = \ln(2x + 1) + \frac{2x}{2x + 1} \Rightarrow D'(x) = (2x + 1)^x \left[\ln(2x + 1) + \frac{2x}{2x + 1} \right].$$

Aplicando o quociente $f' = (N'D - ND')/D^2$ e fatorando D no denominador:

$$f'(x) = \frac{1}{(2x + 1)^x} \left[\frac{1 - 3x^2}{x - x^3} - \ln(x - x^3) \left(\ln(2x + 1) + \frac{2x}{2x + 1} \right) \right].$$

21.1.1.2 1.2 — $f(x) = e^{x^2-2x} + (x^2 - 2x)^{x^2}$

Estratégia: Decompomos $f = A + B$. Em A basta a regra da cadeia; em B , base e expoente dependem de x — diferenciação logarítmica.

Parte A: $A(x) = e^{x^2-2x}$.

$$A'(x) = (2x - 2) e^{x^2-2x} = 2(x - 1) e^{x^2-2x}.$$

Parte B: $B(x) = (x^2 - 2x)^{x^2}$. Como $\ln B = x^2 \ln(x^2 - 2x)$ e $x^2 - 2x = x(x - 2)$:

$$\frac{B'}{B} = 2x \ln(x^2 - 2x) + x^2 \cdot \frac{2x - 2}{x(x - 2)} = 2x \ln(x^2 - 2x) + \frac{2x(x - 1)}{x - 2}.$$

$$B'(x) = 2x(x^2 - 2x)^{x^2} \left[\ln(x^2 - 2x) + \frac{x-1}{x-2} \right].$$

Derivada total:

$$f'(x) = 2(x-1)e^{x^2-2x} + 2x(x^2-2x)^{x^2} \left[\ln(x^2-2x) + \frac{x-1}{x-2} \right].$$

21.1.1.3 1.3 — $f(x) = e^{x/(x-1)} \cdot \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$

Estratégia: Produto $f = A \cdot B$ com $A = e^u$ e $B = \ln u$, onde $u(x) = \frac{x}{x-1}$.

Derivada de u (regra do quociente):

$$u'(x) = \frac{(x-1) - x}{(x-1)^2} = -\frac{1}{(x-1)^2}.$$

Derivadas dos fatores:

$$A'(x) = e^u \cdot u' = -\frac{e^{x/(x-1)}}{(x-1)^2}, \quad B'(x) = \frac{u'}{u} = -\frac{1}{(x-1)^2} \cdot \frac{x-1}{x} = -\frac{1}{x(x-1)}.$$

Regra do produto $f' = A'B + AB'$, fatorando $e^{x/(x-1)}$:

$$f'(x) = -e^{x/(x-1)} \left[\frac{\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)}{(x-1)^2} + \frac{1}{x(x-1)} \right].$$

Sobre denominador comum $x(x-1)^2$:

$$f'(x) = -\frac{e^{x/(x-1)} \left[x \ln\left(\frac{x}{x-1}\right) + (x-1) \right]}{x(x-1)^2}.$$

21.1.2 Questão 2 — Integrais

21.1.2.1 2.1 — $\int 2x^2\sqrt{1-x^3} dx$

Substituição. $u = 1 - x^3$, $du = -3x^2 dx \Rightarrow 2x^2 dx = -\frac{2}{3} du$.

$$\int 2x^2\sqrt{1-x^3} dx = -\frac{2}{3} \int u^{1/2} du = -\frac{2}{3} \cdot \frac{2u^{3/2}}{3} + C = -\frac{4}{9}u^{3/2} + C.$$

$$\boxed{\int 2x^2\sqrt{1-x^3} dx = -\frac{4}{9}(1-x^3)^{3/2} + C.}$$

Verificação: $[-\frac{4}{9}(1-x^3)^{3/2}]' = -\frac{4}{9} \cdot \frac{3}{2}(1-x^3)^{1/2} \cdot (-3x^2) = 2x^2\sqrt{1-x^3}$. ✓

21.1.2.2 2.2 — $\int_1^e x \ln(x) dx$

Integração por partes. $u = \ln x$, $dv = x dx \Rightarrow du = dx/x$, $v = x^2/2$:

$$\int x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C.$$

Aplicando a Regra de Barrow em $[1, e]$:

$$\int_1^e x \ln x dx = \left[\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} \right]_1^e = \left(\frac{e^2}{2} \cdot 1 - \frac{e^2}{4} \right) - \left(0 - \frac{1}{4} \right) = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}.$$

$$\boxed{\int_1^e x \ln x dx = \frac{e^2 + 1}{4} \approx 2,097.}$$

$$21.1.2.3 \text{ 2.3} \text{ — } \int (x^3 - x^5) e^{-x^2} dx$$

Substituição. $u = x^2$, $du = 2x dx$. Fatorando $x^3 - x^5 = (x^2 - x^4) \cdot x$:

$$(x^3 - x^5) dx = (x^2 - x^4) \cdot x dx = (u - u^2) \cdot \frac{du}{2}.$$

$$\int (x^3 - x^5) e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \int (u - u^2) e^{-u} du = \frac{1}{2} \left[\int u e^{-u} du - \int u^2 e^{-u} du \right].$$

Duas integrações por partes (fórmulas-padrão, verificáveis por derivação):

$$\int u e^{-u} du = -(u + 1) e^{-u} + C_1, \quad \int u^2 e^{-u} du = -(u^2 + 2u + 2) e^{-u} + C_2.$$

Combinando:

$$\frac{1}{2} [-(u + 1) + (u^2 + 2u + 2)] e^{-u} = \frac{1}{2} (u^2 + u + 1) e^{-u}.$$

Voltando a $u = x^2$:

$$\int (x^3 - x^5) e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} (x^4 + x^2 + 1) e^{-x^2} + C.$$

Verificação:

$$\left[\frac{1}{2} (x^4 + x^2 + 1) e^{-x^2} \right]' = \frac{1}{2} e^{-x^2} [(4x^3 + 2x) - 2x(x^4 + x^2 + 1)] = e^{-x^2} (x^3 - x^5). \quad \checkmark$$

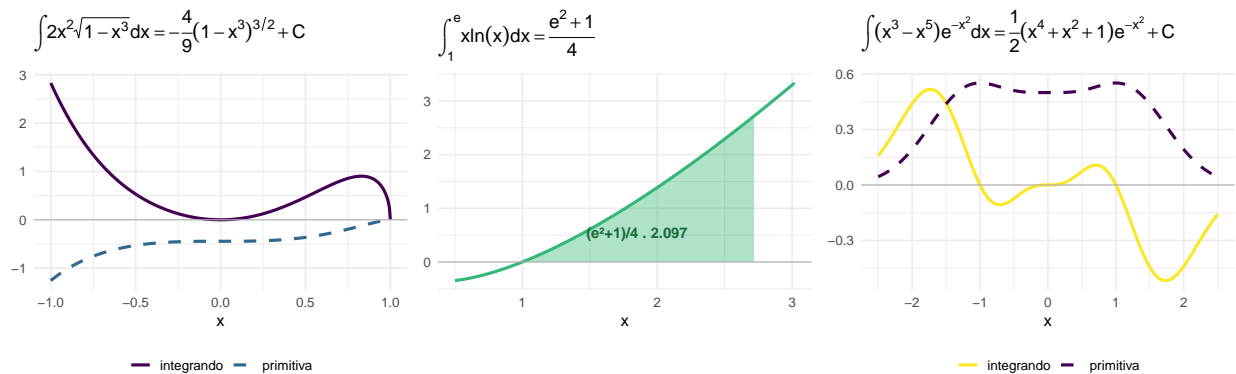


Figura 45: Verificação numérica das integrais do Teste 3 (2026). Esquerda: integrando $2x^2\sqrt{1-x^3}$ e sua primitiva $-\frac{4}{9}(1-x^3)^{3/2}$. Centro: integral definida $\int_1^e x \ln(x) dx = (e^2 + 1)/4$ representada como área sombreada. Direita: integrando $(x^3 - x^5)e^{-x^2}$ e sua primitiva $\frac{1}{2}(x^4 + x^2 + 1)e^{-x^2}$.

21.2 Teste 3 (2025) — 14 de abril de 2025

21.2.1 Questão 1 — Derivadas

Encontre as derivadas das funções abaixo.

21.2.1.1 1.1 — $f(x) = \frac{5^{x^3}}{\sqrt{x^x}}$

Estratégia. Variável em base e expoente em ambos os fatores: diferenciação logarítmica. Reescrevemos $\sqrt{x^x} = x^{x/2}$, de modo que:

$$f(x) = 5^{x^3} \cdot x^{-x/2}.$$

Tomando o logaritmo:

$$\ln f(x) = x^3 \ln 5 - \frac{x}{2} \ln x.$$

Derivando:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 3x^2 \ln 5 - \frac{1}{2}(\ln x + 1).$$

$$f'(x) = \frac{5^{x^3}}{\sqrt{x^x}} \left[3x^2 \ln 5 - \frac{\ln x + 1}{2} \right].$$

21.2.1.2 1.2 — $f(x) = x^3 \cdot 3^x + \sqrt[3]{x^{e^x} - \ln(x^6)}$

Simplificação prévia. $\ln(x^6) = 6 \ln x$. Decompomos $f = A + B$ com:

$$A(x) = x^3 \cdot 3^x, \quad B(x) = (x^{e^x} - 6 \ln x)^{1/3}.$$

Parte A. Regra do produto:

$$A'(x) = 3x^2 \cdot 3^x + x^3 \cdot 3^x \ln 3 = x^2 3^x (3 + x \ln 3).$$

Parte B. Pela regra da cadeia, $B'(x) = \frac{1}{3} (x^{e^x} - 6 \ln x)^{-2/3} \cdot [x^{e^x} - 6 \ln x]'$.

Para $[x^{e^x}]'$, diferenciação logarítmica. Seja $u = x^{e^x}$: $\ln u = e^x \ln x$, logo:

$$\frac{u'}{u} = e^x \ln x + \frac{e^x}{x} = e^x \left(\ln x + \frac{1}{x} \right) \implies [x^{e^x}]' = x^{e^x} e^x \left(\ln x + \frac{1}{x} \right).$$

E $[6 \ln x]' = 6/x$. Portanto:

$$B'(x) = \frac{1}{3(x^{e^x} - 6 \ln x)^{2/3}} \left[x^{e^x} e^x \left(\ln x + \frac{1}{x} \right) - \frac{6}{x} \right].$$

Derivada total $f'(x) = A'(x) + B'(x)$:

$$f'(x) = x^2 3^x (3 + x \ln 3) + \frac{x^{e^x} e^x (\ln x + 1/x) - 6/x}{3(x^{e^x} - 6 \ln x)^{2/3}}.$$

21.2.2 Questão 2 — Integrais

21.2.2.1 2.1 — $\int \ln^2(x) dx$

Integração por partes. $u = \ln^2 x$, $dv = dx \Rightarrow du = \frac{2 \ln x}{x} dx$, $v = x$:

$$\int \ln^2(x) dx = x \ln^2(x) - \int 2 \ln(x) dx.$$

Para $\int \ln(x) dx$ (segunda IPP, fórmula padrão):

$$\int \ln(x) dx = x \ln(x) - x + C.$$

Substituindo:

$$\int \ln^2(x) dx = x \ln^2(x) - 2[x \ln(x) - x] + C.$$

$$\int \ln^2(x) dx = x(\ln^2 x - 2 \ln x + 2) + C.$$

Verificação. $[x(\ln^2 x - 2 \ln x + 2)]' = \ln^2 x - 2 \ln x + 2 + x\left(\frac{2 \ln x}{x} - \frac{2}{x}\right) = \ln^2 x. \checkmark$

21.2.2.2 2.2 — $\int x^3 e^{x^2} dx$

Substituição. $u = x^2$, $du = 2x dx$. Reescrevemos $x^3 dx = x^2 \cdot x dx = u \cdot \frac{du}{2}$:

$$\int x^3 e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int u e^u du.$$

Integração por partes (fórmula padrão): $\int u e^u du = e^u(u - 1) + C$.

Voltando a $u = x^2$:

$$\boxed{\int x^3 e^{x^2} dx = \frac{1}{2} e^{x^2} (x^2 - 1) + C.}$$

Verificação. $\left[\frac{1}{2}e^{x^2}(x^2 - 1)\right]' = \frac{1}{2}[2xe^{x^2}(x^2 - 1) + e^{x^2} \cdot 2x] = xe^{x^2}x^2 = x^3e^{x^2}$. ✓

21.2.3 Questão 3 — EDOs

21.2.3.1 3.1 — $y'' - y' - y = 0$

EDO linear homogênea de 2ª ordem com coeficientes constantes. Equação característica:

$$r^2 - r - 1 = 0 \implies r = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Raízes reais e distintas $r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (razão áurea φ) e $r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$:

$$\boxed{y(x) = C_1 e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}x} + C_2 e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}x}.}$$

21.2.3.2 3.2 — $y'' - 4y' + 4y = 8$, com $y(0) = 3$, $y'(0) = 5$

Solução homogênea. Equação característica $r^2 - 4r + 4 = (r - 2)^2 = 0$ tem raiz dupla $r = 2$:

$$y_h(x) = (C_1 + C_2x) e^{2x}.$$

Solução particular. Termo independente constante (8): tentamos $y_p = K$. Substituindo, $4K = 8 \Rightarrow K = 2$.

Solução geral: $y(x) = (C_1 + C_2x) e^{2x} + 2$.

Aplicando as condições iniciais.

$$y(0) = C_1 + 2 = 3 \Rightarrow C_1 = 1.$$

Calculando $y'(x)$:

$$y'(x) = C_2 e^{2x} + 2(C_1 + C_2x) e^{2x} = e^{2x}[(2C_1 + C_2) + 2C_2x].$$

$$y'(0) = 2C_1 + C_2 = 2 + C_2 = 5 \Rightarrow C_2 = 3.$$

$$y(x) = (1 + 3x) e^{2x} + 2.$$

Verificação. $y(0) = 1 + 2 = 3 \checkmark$. $y'(0) = e^0(2 \cdot 1 + 3) = 5 \checkmark$.

$y'(x) = e^{2x}(5 + 6x)$, $y''(x) = e^{2x}(16 + 12x)$, então $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}(16 + 12x - 20 - 24x + 4 + 12x) + 8 = 0 + 8 = 8$. \checkmark

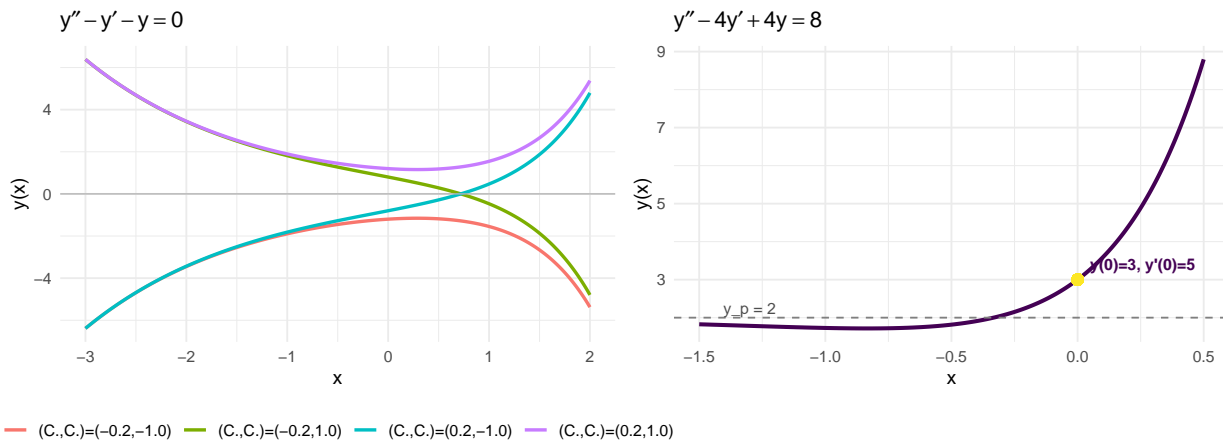


Figura 46: EDOs da Questão 3. Esquerda: famílias de soluções de $y'' - y' - y = 0$ para vários (C_1, C_2) . Direita: solução do PVI $y'' - 4y' + 4y = 8$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 5$ — a parte transitória $(1 + 3x)e^{2x}$ explode rapidamente; em escala curta vê-se a condição inicial e a inclinação iniciais.

21.3 Teste 3 (2024) — 13 de abril de 2024

21.3.1 Questão 1 — Derivadas

Encontre as derivadas das funções abaixo.

21.3.1.1 1.1 — $f(x) = x^{\ln^2 x} + \left(\frac{1}{x} + \ln \frac{1}{x}\right)^{e^x} + 3^{x^2+1}$

Simplificação prévia: $\ln \frac{1}{x} = -\ln x$, logo o segundo termo é $\left(\frac{1}{x} - \ln x\right)^{e^x}$.

Decompondo $f = A + B + C$:

Parte A: $A(x) = x^{\ln^2 x}$

Diferenciação logarítmica: $\ln A = \ln^2(x) \cdot \ln x = (\ln x)^3$.

$$\frac{A'}{A} = 3(\ln x)^2 \cdot \frac{1}{x} \Rightarrow A'(x) = x^{\ln^2 x} \cdot \frac{3 \ln^2 x}{x}.$$

Parte B: $B(x) = \left(\frac{1}{x} - \ln x\right)^{e^x}$

Seja $p = \frac{1}{x} - \ln x$, $q = e^x$. Então $p' = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} = -\frac{1+x}{x^2}$, $q' = e^x$. Pela regra D :

$$B'(x) = \left(\frac{1}{x} - \ln x\right)^{e^x} \cdot e^x \left[\ln\left(\frac{1}{x} - \ln x\right) - \frac{1+x}{x^2\left(\frac{1}{x} - \ln x\right)} \right].$$

Parte C: $C(x) = 3^{x^2+1}$

$$C'(x) = 3^{x^2+1} \cdot 2x \ln 3.$$

Derivada total:

$$f'(x) = \frac{3 \ln^2 x}{x} x^{\ln^2 x} + \left(\frac{1}{x} - \ln x\right)^{e^x} e^x \left[\ln\left(\frac{1}{x} - \ln x\right) - \frac{1+x}{x^2\left(\frac{1}{x} - \ln x\right)} \right] + 2x \ln 3 \cdot 3^{x^2+1}.$$

$$21.3.1.2 \text{ 1.2} \text{ — } f(x) = \sqrt[5]{e^{x^2 \ln x} + \ln\left(e^{\frac{x^2-2x+1}{x-1}}\right)} + \left(\frac{1+x}{\ln(x^3) - 5x}\right)^{e^x}$$

Simplificações essenciais:

- $e^{x^2 \ln x} = e^{\ln x^{x^2}} = x^{x^2}$.
- $\ln\left(e^{(x^2-2x+1)/(x-1)}\right) = \frac{(x-1)^2}{x-1} = x-1$ (para $x \neq 1$).
- $\ln(x^3) = 3 \ln x$.

Logo: $f(x) = (x^{x^2} + x - 1)^{1/5} + \left(\frac{1+x}{3 \ln x - 5x}\right)^{e^x}$. Decompondo $f = A + B$:

Parte A: $A(x) = (x^{x^2} + x - 1)^{1/5}$

Para $(x^{x^2})'$: usando $\ln(x^{x^2}) = x^2 \ln x$,

$$\frac{(x^{x^2})'}{x^{x^2}} = 2x \ln x + x \Rightarrow (x^{x^2})' = x^{x^2+1}(2 \ln x + 1).$$

Portanto:

$$A'(x) = \frac{x^{x^2+1}(2 \ln x + 1) + 1}{5(x^{x^2} + x - 1)^{4/5}}.$$

Parte B: $B(x) = \left(\frac{1+x}{3 \ln x - 5x}\right)^{e^x}$

Seja $p = \frac{1+x}{3 \ln x - 5x}$, $q = e^x$. Numerador de p' pela regra do quociente:

$$(3 \ln x - 5x) \cdot 1 - (1+x) \left(\frac{3}{x} - 5\right) = 3 \ln x - 5x - \frac{3}{x} + 5 - 3 + 5x = 3 \ln x + 2 - \frac{3}{x}.$$

$$\frac{p'}{p} = \frac{3 \ln x + 2 - 3/x}{(3 \ln x - 5x)(1+x)}.$$

Pela regra D :

$$B'(x) = \left(\frac{1+x}{3 \ln x - 5x}\right)^{e^x} e^x \left[\ln\left(\frac{1+x}{3 \ln x - 5x}\right) + \frac{3 \ln x + 2 - 3/x}{(3 \ln x - 5x)(1+x)} \right].$$

Derivada total: $f'(x) = A'(x) + B'(x)$.

21.3.2 Questão 2 — Integrais

21.3.2.1 2.1 — $\int x^2 e^x dx$

Duas aplicações de integração por partes.

1ª: $u = x^2$, $dv = e^x dx \Rightarrow du = 2x dx$, $v = e^x$:

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx.$$

2ª: $u = x$, $dv = e^x dx \Rightarrow du = dx$, $v = e^x$:

$$\int x e^x dx = x e^x - e^x = e^x (x - 1).$$

$$\boxed{\int x^2 e^x dx = e^x (x^2 - 2x + 2) + C.}$$

Verificação: $[e^x (x^2 - 2x + 2)]' = e^x (x^2 - 2x + 2) + e^x (2x - 2) = x^2 e^x$. ✓

21.3.2.2 2.2 — $\int 2x(x^2 - 1)^2 \ln(x^2 - 1) dx$

Mudança de variável: $t = x^2 - 1$, $dt = 2x dx$:

$$\int t^2 \ln t dt.$$

Integração por partes: $u = \ln t$, $dv = t^2 dt \Rightarrow du = dt/t$, $v = t^3/3$:

$$\int t^2 \ln t dt = \frac{t^3}{3} \ln t - \frac{1}{3} \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} \ln t - \frac{t^3}{9} + C = \frac{t^3}{9} (3 \ln t - 1) + C.$$

Substituindo $t = x^2 - 1$:

$$\boxed{\int 2x(x^2 - 1)^2 \ln(x^2 - 1) dx = \frac{(x^2 - 1)^3}{9} [3 \ln(x^2 - 1) - 1] + C.}$$

Verificação:

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{(x^2 - 1)^3}{9} (3 \ln(x^2 - 1) - 1) \right] = \frac{2x(x^2 - 1)^2}{3} (3 \ln(x^2 - 1) - 1) + \frac{2x(x^2 - 1)^2}{3} = 2x(x^2 - 1)^2 \ln(x^2 - 1). \quad \checkmark$$

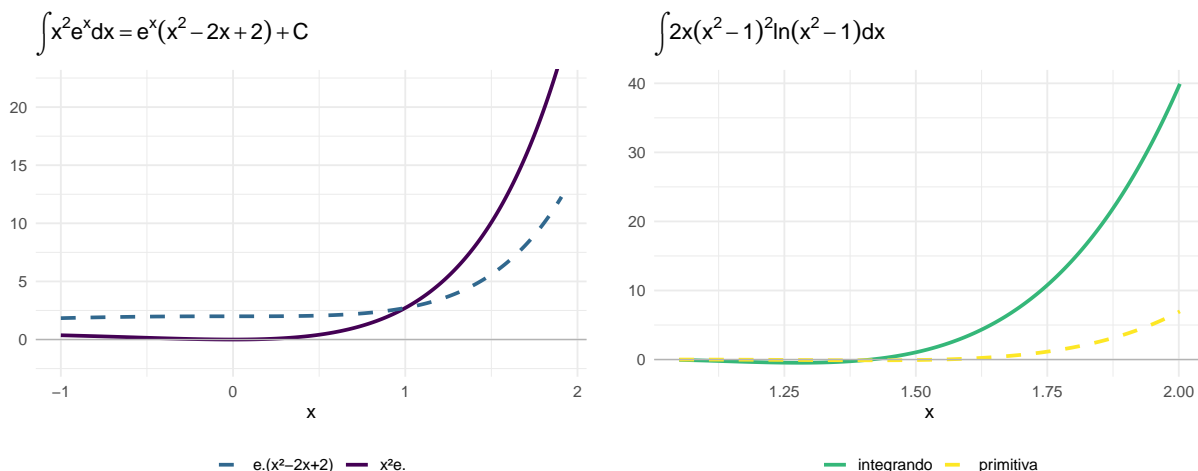


Figura 47: Verificação numérica das integrais do Teste 3. À esquerda: integrando $x^2 e^x$ e sua primitiva $e^x(x^2 - 2x + 2)$. À direita: integrando $2x(x^2 - 1)^2 \ln(x^2 - 1)$ e sua primitiva $\frac{(x^2 - 1)^3}{9} [3 \ln(x^2 - 1) - 1]$.

22 Equações Diferenciais Ordinárias

22.1 Motivação Econômica

Variáveis econômicas — preços, produto, capital, inflação — evoluem ao longo do tempo. Uma **equação diferencial ordinária (EDO)** descreve essa evolução relacionando uma variável com sua própria taxa de variação. É a ferramenta natural para modelar dinâmica econômica.

Modelo de Solow (acumulação de capital). A equação central do modelo de Solow é:

$$\dot{k} = sf(k) - (\delta + n)k,$$

onde $k = K/L$ é o capital por trabalhador, s é a taxa de poupança, δ é a depreciação e n é o crescimento populacional. É uma EDO de 1ª ordem não-linear; linearizada em torno do estado estacionário k^* , torna-se $\dot{k} \approx \lambda(k - k^*)$ com $\lambda < 0$, garantindo convergência.

Curva de Phillips dinâmica. A versão contínua da Curva de Phillips novo-keynesiana relaciona a variação da inflação ao hiato do produto y :

$$\dot{\pi} = -\kappa y + \lambda(\pi - \bar{\pi}),$$

onde $\bar{\pi}$ é a meta de inflação, $\kappa > 0$ captura a sensibilidade da inflação ao hiato e λ determina a persistência. Reescrevendo: $\dot{\pi} - \lambda\pi = -\kappa y - \lambda\bar{\pi}$. É exatamente a forma $\dot{x} + ax = b$ estudada neste capítulo (com $a = -\lambda$ e $b = -\kappa y - \lambda\bar{\pi}$). Para $\lambda < 0$, a inflação converge para $\bar{\pi}$ na ausência de hiato — condição de estabilidade da âncora de inflação.

Ajustamento de preços de Walras. Na dinâmica walrasiana, o preço ajusta-se ao excesso de demanda:

$$\dot{p} = \beta[D(p) - S(p)], \quad \beta > 0.$$

Linearizando em torno do equilíbrio p^* : $\dot{p} \approx \beta[D'(p^*) - S'(p^*)](p - p^*)$. Como $D' < 0$ e $S' > 0$, o coeficiente é negativo — o equilíbrio é estável.

EDO de 2ª ordem — modelo IS-LM dinâmico. Em versões dinâmicas do modelo IS-LM, o produto e a taxa de juros obedecem a um sistema de equações diferenciais. Na forma reduzida, o produto pode seguir uma EDO de 2ª ordem cujas raízes da equação característica determinam se a convergência ao equilíbrio é monotônica ($\Delta > 0$), crítica ($\Delta = 0$) ou oscilatória ($\Delta < 0$).

22.2 EDO de 1ª Ordem com Coeficiente Constante

22.2.1 Forma Geral

Consideramos a EDO linear de 1ª ordem com coeficientes constantes:

$$\dot{x} + ax = b, \quad x(0) = x_0,$$

onde $a, b \in \mathbb{R}$ são constantes e $\dot{x} \equiv \frac{dx}{dt}$.

22.2.2 Solução Homogênea

A equação homogênea associada é $\dot{x} + ax = 0$, ou seja, $\dot{x} = -ax$. Separando variáveis:

$$\frac{dx}{x} = -a dt \Rightarrow \int \frac{dx}{x} = \int -a dt \Rightarrow \ln |x| = -at + C_0.$$

Exponenciando:

$$x_t^H = k e^{-at}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

22.2.3 Solução Particular

Buscamos uma solução constante $x^* = K$. Como $\dot{x}^* = 0$, substituindo na EDO:

$$0 + aK = b \Rightarrow K = \frac{b}{a} \quad (a \neq 0).$$

22.2.4 Solução Geral e Condição Inicial

$$x_t = x_t^H + x^* = k e^{-at} + \frac{b}{a}.$$

Aplicando $x(0) = x_0$:

$$x_0 = k + \frac{b}{a} \Rightarrow k = x_0 - \frac{b}{a}.$$

$$x_t = \left(x_0 - \frac{b}{a}\right) e^{-at} + \frac{b}{a}.$$

Interpretação: x_t é a soma do **transiente** (que depende da condição inicial e decai ou explode ao longo do tempo) com o **estado estacionário** b/a .

22.2.5 Estabilidade

- $a > 0$: $e^{-at} \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty \Rightarrow x_t \rightarrow b/a$. **Estável** (equilíbrio atrator).
- $a < 0$: $e^{-at} \rightarrow \infty \Rightarrow x_t$ diverge. **Instável**.
- $a = 0$: $x_t = x_0 + bt$ (solução linear no tempo).

22.2.6 Diagrama de Fase

O diagrama de fase representa \dot{x} em função de x :

$$\dot{x} = -ax + b.$$

É uma reta com inclinação $-a$ e intercepto b . O equilíbrio ocorre em $x^* = b/a$ (onde $\dot{x} = 0$).

- Se $a > 0$: a inclinação é negativa \Rightarrow as trajetórias convergem para x^* .
 - Se $a < 0$: a inclinação é positiva \Rightarrow as trajetórias divergem de x^* .
-

22.3 EDO de 1ª Ordem com Coeficiente Variável

22.3.1 Forma Geral

Quando os coeficientes dependem de t , a EDO de 1ª ordem tem a forma:

$$\frac{dx}{dt} + p(t)x = q(t),$$

onde $p(t)$ e $q(t)$ são funções contínuas de t . O caso $p(t) = a$ (constante) e $q(t) = b$ (constante) é o caso particular já estudado.

22.3.2 Método do Fator Integrante

A ideia é multiplicar ambos os lados por uma função $\mu(t)$ de modo que o lado esquerdo se torne a derivada de um produto:

$$\mu(t) \frac{dx}{dt} + \mu(t) p(t) x = \frac{d}{dt} [\mu(t) x].$$

Para isso, basta que $\mu'(t) = \mu(t) p(t)$, o que dá:

$$\frac{d\mu}{\mu} = p(t) dt \Rightarrow \ln \mu = \int p(t) dt \Rightarrow$$

$$\boxed{\mu(t) = e^{\int p(t) dt}}$$

Com esse $\mu(t)$, a equação torna-se:

$$\frac{d}{dt} [\mu(t) x] = \mu(t) q(t).$$

Integrando ambos os lados:

$$\mu(t) x = \int \mu(t) q(t) dt + C \Rightarrow$$

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{\mu(t)} \left[\int \mu(t) q(t) dt + C \right]}$$

22.3.3 Exemplos Resolvidos — Coeficiente Variável

22.3.3.1 Exemplo 1 — $\dot{x} + 2t x = t$, $x_0 = 1$

Identificação: $p(t) = 2t$, $q(t) = t$.

Fator integrante: $\int 2t dt = t^2 \Rightarrow \mu(t) = e^{t^2}$.

Equação transformada:

$$\frac{d}{dt} [e^{t^2} x] = t e^{t^2}.$$

Integração (substituição $u = t^2$, $du = 2t dt$):

$$\int t e^{t^2} dt = \frac{1}{2} \int e^u du = \frac{1}{2} e^{t^2}.$$

Logo $e^{t^2} x = \frac{1}{2} e^{t^2} + C$, ou seja,

$$x(t) = \frac{1}{2} + C e^{-t^2}.$$

Condição inicial $x_0 = 1$: $1 = \frac{1}{2} + C \Rightarrow C = \frac{1}{2}$. Portanto,

$$x(t) = \frac{1}{2}(1 + e^{-t^2}).$$

Verificação: $\dot{x} = -t e^{-t^2}$ e $\dot{x} + 2tx = -t e^{-t^2} + 2t \cdot \frac{1}{2}(1 + e^{-t^2}) = t$. ✓

22.3.3.2 Exemplo 2 — $\dot{x} + 2x = t e^{-2t}$, $x_0 = -1$

Identificação: $p(t) = 2$, $q(t) = t e^{-2t}$.

Fator integrante: $\mu(t) = e^{2t}$.

Equação transformada:

$$\frac{d}{dt}[e^{2t}x] = e^{2t} \cdot t e^{-2t} = t.$$

Integração: $e^{2t}x = \frac{t^2}{2} + C$, ou seja,

$$x(t) = \left(\frac{t^2}{2} + C\right) e^{-2t}.$$

Condição inicial $x_0 = -1$: $-1 = C$. Portanto,

$$x(t) = \left(\frac{t^2}{2} - 1\right) e^{-2t}.$$

22.3.3.3 Exemplo 3 — $\dot{x} + \frac{3}{t}x = t^2$, $x(1) = 3$

Identificação: $p(t) = 3/t$, $q(t) = t^2$ (definida para $t > 0$).

Fator integrante:

$$\int \frac{3}{t} dt = 3 \ln |t| = \ln t^3 \Rightarrow \mu(t) = e^{\ln t^3} = t^3.$$

Equação transformada:

$$\frac{d}{dt}[t^3 x] = t^3 \cdot t^2 = t^5.$$

Integração: $t^3 x = \frac{t^6}{6} + C$, ou seja,

$$x(t) = \frac{t^3}{6} + \frac{C}{t^3}.$$

Condição inicial $x(1) = 3$: $3 = \frac{1}{6} + C \Rightarrow C = \frac{17}{6}$. Portanto,

$$x(t) = \frac{t^3}{6} + \frac{17}{6t^3}.$$

22.3.3.4 Observação — Quando a integral não fecha em forma elementar

Trocando $q(t) = t$ por $q(t) = t^2$ no Exemplo 1, obtemos $\dot{x} + 2tx = t^2$. O fator integrante continua $\mu = e^{t^2}$, mas agora a integral envolve

$$\int t^2 e^{t^2} dt = \frac{t}{2} e^{t^2} - \frac{1}{2} \int e^{t^2} dt,$$

e $\int e^{t^2} dt$ não admite primitiva em funções elementares (relaciona-se com a função erro imaginária). O método do fator integrante garante a solução formal, mas o cálculo explícito exige funções especiais. Em problemas de prova, $q(t)$ costuma ser escolhido de modo que $\int \mu(t) q(t) dt$ seja computável.

22.4 EDO de 2ª Ordem com Coeficientes Constantes

22.4.1 Forma Geral

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = c, \quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0,$$

onde $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $\ddot{x} \equiv d^2x/dt^2$.

22.4.2 Solução Homogênea — Solução Tentativa

Para a equação homogênea $\ddot{x} + a\dot{x} + bx = 0$, tentamos $x_t^H = e^{\lambda t}$:

Ideia: substituir uma solução tentativa $x_t^H = e^{\lambda t}$ na equação e determinar λ para que ela seja satisfeita. Como $e^{\lambda t} \neq 0$, podemos dividir ambos os lados por $e^{\lambda t}$ e obter uma equação algébrica em λ .

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + a\lambda e^{\lambda t} + b e^{\lambda t} = 0 \Rightarrow \lambda^2 + a\lambda + b = 0.$$

Esta é a **equação característica**. Suas raízes são:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}.$$

O discriminante $\Delta = a^2 - 4b$ determina três casos.

22.4.3 Caso 1: $\Delta > 0$ — Duas Raízes Reais Distintas

$$\lambda_1 = \frac{-a + \sqrt{\Delta}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{-a - \sqrt{\Delta}}{2}, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2.$$

Solução geral:

$$x_t = k_1 e^{\lambda_1 t} + k_2 e^{\lambda_2 t} + \frac{c}{b}.$$

As constantes k_1, k_2 são determinadas pelas condições iniciais $x(0) = x_0$ e $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$.

22.4.4 Caso 2: $\Delta = 0$ — Raiz Real Repetida

$$\lambda = \frac{-a}{2}.$$

Quando há raiz dupla, a segunda solução linearmente independente é $te^{\lambda t}$. Solução geral:

$$x_t = (k_1 + k_2 t) e^{\lambda t} + \frac{c}{b}.$$

22.4.5 Funções Trigonômicas e Fórmula de Euler

Quando $\Delta < 0$, as raízes da equação característica são números complexos. Para expressar a solução em termos de funções reais, precisamos das funções trigonométricas e da Fórmula de Euler.

22.4.5.1 Funções Trigonômicas

Considere um ângulo θ em radianos e um triângulo retângulo inscrito num círculo de raio R , com cateto oposto v e cateto adjacente h :

$$\sin \theta = \frac{v}{R}, \quad \cos \theta = \frac{h}{R}, \quad \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{v}{h}.$$

No **círculo unitário** ($R = 1$), o ponto $(\cos \theta, \sin \theta)$ percorre a circunferência à medida que θ varia:

θ	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin \theta$	0	1	0	-1	0
$\cos \theta$	1	0	-1	0	1

Ambas as funções são **periódicas** com período 2π . Suas derivadas são:

$$(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x.$$

22.4.5.2 Série de Maclaurin

Qualquer função infinitamente diferenciável em torno de $x = 0$ admite a representação:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} x^i = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots$$

Para e^x : como $(e^x)^{(n)} = e^x$ para todo n , temos $f^{(n)}(0) = 1$:

$$e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

As derivadas de $\sin x$ em $x = 0$ seguem o padrão $0, 1, 0, -1, 0, 1, \dots$ (período 4). Logo:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}.$$

Observação: derivando a série de $\sin x$ termo a termo recupera-se a série de $\cos x$, confirmando $(\sin x)' = \cos x$.

22.4.5.3 Fórmula de Euler

Define-se a **unidade imaginária** $i = \sqrt{-1}$, com $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$. Aplicando a série de Maclaurin a e^{ix} :

$$e^{ix} = 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \dots = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

Separando termos reais e imaginários:

$$e^{ix} = \underbrace{\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots\right)}_{\cos x} + i \underbrace{\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots\right)}_{\sin x}.$$

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \quad e^{-ix} = \cos x - i \sin x.$$

Fazendo $x = \pi$: $\cos \pi = -1$, $\sin \pi = 0$, logo $e^{i\pi} + 1 = 0$ (**Identidade de Euler**).

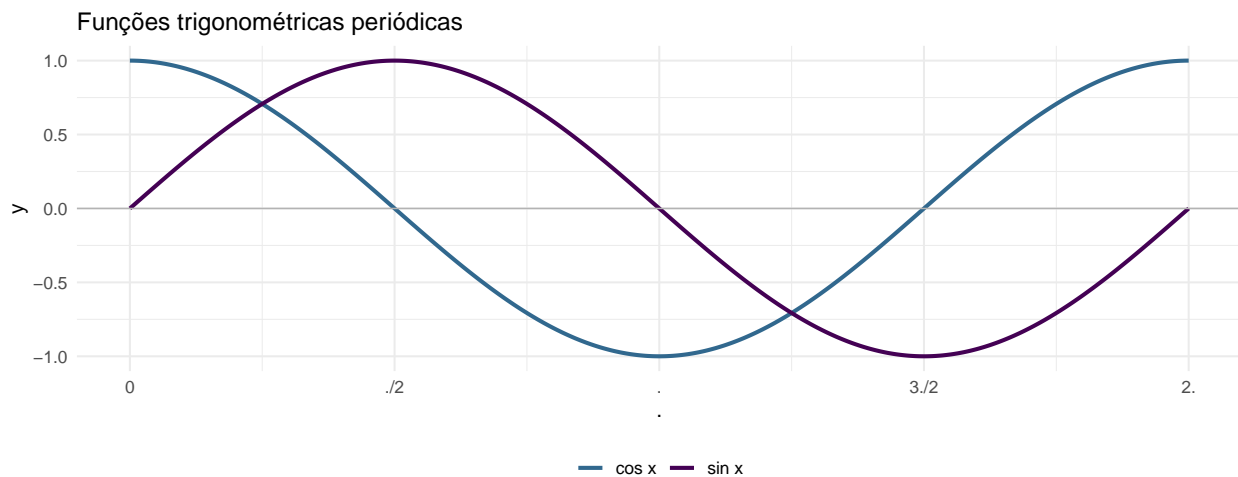


Figura 48: Funções $\sin x$ e $\cos x$ no intervalo $[0, 2\pi]$. Ambas são periódicas com período 2π e imagem $[-1, 1]$.

22.4.6 Caso 3: $\Delta < 0$ — Raízes Complexas Conjugadas

Com a Fórmula de Euler em mãos, podemos expressar a solução em termos reais. As raízes complexas são:

$$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta, \quad \alpha = -\frac{a}{2}, \quad \beta = \frac{\sqrt{4b - a^2}}{2} > 0.$$

Aplicando a Fórmula de Euler:

$$e^{(\alpha \pm i\beta)t} = e^{\alpha t}(\cos \beta t \pm i \sin \beta t).$$

Tomando combinações lineares reais ($C_1 = k_1 + k_2$, $C_2 = i(k_1 - k_2)$):

$$x_t = e^{\alpha t} [C_1 \cos(\beta t) + C_2 \sin(\beta t)] + \frac{c}{b}.$$

Resumo dos três casos:

$\Delta = a^2 - 4b$	Raízes λ	Solução homogênea
> 0	$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda_1 \neq \lambda_2$	$k_1 e^{\lambda_1 t} + k_2 e^{\lambda_2 t}$
$= 0$	$\lambda = -a/2$ (dupla)	$(k_1 + k_2 t) e^{\lambda t}$
< 0	$\alpha \pm i\beta$	$e^{\alpha t} [C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t]$

22.4.7 Solução Particular — Caso Constante

Buscamos uma solução constante $x^* = K$. Como $\dot{x}^* = \ddot{x}^* = 0$, substituindo na EDO:

$$bK = c \Rightarrow K = \frac{c}{b} \quad (b \neq 0).$$

22.4.8 Solução Geral e Condição Inicial

$$x_t = x_t^H + \frac{c}{b}.$$

As constantes k_1, k_2 (ou C_1, C_2) são determinadas aplicando as condições iniciais $x(0) = x_0$ e $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$.

22.5 Solução Particular com Termo Variável

Quando o lado direito não é constante — $\ddot{x} + a\dot{x} + bx = f(t)$ — o **método dos coeficientes indeterminados** determina x_t^* por meio de uma **solução tentativa** compatível com a forma de $f(t)$.

A solução geral continua sendo $x_t = x_t^H + x_t^*$, onde x_t^H é a solução homogênea e x_t^* é a particular.

Forma de $f(t)$	Solução tentativa para x_t^*
-----------------	--------------------------------

22.5.1 Regra de Escolha da Solução Tentativa

Forma de $f(t)$	Solução tentativa para x_t^*
c (constante)	A
t^n (polinômio grau n)	$A_n t^n + A_{n-1} t^{n-1} + \dots + A_0$
e^{rt}	Ae^{rt}
$t^n e^{rt}$	$(A_n t^n + \dots + A_0)e^{rt}$
$\sin(\omega t)$ ou $\cos(\omega t)$	$A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$
$e^{rt} \sin(\omega t)$ ou $e^{rt} \cos(\omega t)$	$e^{rt}[A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)]$

Exceção (modificação): se a solução tentativa coincidir com uma solução da equação homogênea, multiplica-se por t (ou t^2 se for raiz dupla).

22.5.2 Exemplo — $f(t) = e^{rt}$

EDO: $\ddot{x} + a\dot{x} + bx = e^{rt}$.

Tentamos $x_t^* = Ae^{rt}$. Calculando as derivadas:

$$\dot{x}^* = Are^{rt}, \quad \ddot{x}^* = Ar^2 e^{rt}.$$

Substituindo:

$$Ar^2 e^{rt} + aAre^{rt} + bAe^{rt} = e^{rt} \Rightarrow A(r^2 + ar + b) = 1.$$

Se r **não** é raiz da equação característica, então $r^2 + ar + b \neq 0$ e:

$$A = \frac{1}{r^2 + ar + b}, \quad x_t^* = \frac{e^{rt}}{r^2 + ar + b}.$$

Se r é raiz simples, tentamos $x_t^* = Ate^{rt}$; se for raiz dupla, $x_t^* = At^2 e^{rt}$.

22.5.3 Exemplo — $f(t) = \sin(\omega t)$

EDO: $\ddot{x} + a\dot{x} + bx = \sin(\omega t)$.

Tentamos $x_t^* = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$:

$$\dot{x}^* = -A\omega \sin(\omega t) + B\omega \cos(\omega t), \quad \ddot{x}^* = -A\omega^2 \cos(\omega t) - B\omega^2 \sin(\omega t).$$

Substituindo e igualando coeficientes de cos e sin:

$$\begin{aligned} \cos(\omega t): \quad & -A\omega^2 + aB\omega + bA = 0 \Rightarrow A(b - \omega^2) + aB\omega = 0. \\ \sin(\omega t): \quad & -B\omega^2 - aA\omega + bB = 1 \Rightarrow -aA\omega + B(b - \omega^2) = 1. \end{aligned}$$

Sistema linear em A e B :

$$\begin{pmatrix} b - \omega^2 & a\omega \\ -a\omega & b - \omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

O determinante é $(b - \omega^2)^2 + (a\omega)^2 > 0$ (quando $\omega^2 \neq b$ ou $a \neq 0$). Resolvendo:

$$\boxed{A = \frac{-a\omega}{(b - \omega^2)^2 + a^2\omega^2}, \quad B = \frac{b - \omega^2}{(b - \omega^2)^2 + a^2\omega^2}.}$$

22.6 Exemplos Resolvidos

22.6.1 Exemplo 1 — $\Delta > 0$

EDO: $\ddot{x} + 5\dot{x} + 6x = 1$, $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 1$.

Solução particular: $x^* = 1/6$.

Equação característica: $\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0 \Rightarrow (\lambda + 2)(\lambda + 3) = 0$.

$$\lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = -3.$$

$\Delta = 25 - 24 = 1 > 0$. Solução geral:

$$x_t = k_1 e^{-2t} + k_2 e^{-3t} + \frac{1}{6}.$$

Condições iniciais:

$$x(0) = 0: \quad k_1 + k_2 + \frac{1}{6} = 0 \Rightarrow k_1 + k_2 = -\frac{1}{6}.$$

$$\dot{x}(0) = 1 : \quad -2k_1 - 3k_2 = 1.$$

Do sistema:

$$k_1 = -\frac{1}{6} - k_2 \Rightarrow -2\left(-\frac{1}{6} - k_2\right) - 3k_2 = 1 \Rightarrow \frac{1}{3} + 2k_2 - 3k_2 = 1 \Rightarrow k_2 = -\frac{2}{3}.$$

$$k_1 = -\frac{1}{6} + \frac{2}{3} = \frac{1}{2}.$$

$$x_t = \frac{1}{2}e^{-2t} - \frac{2}{3}e^{-3t} + \frac{1}{6}.$$

Verificação em $t = 0$: $x(0) = 1/2 - 2/3 + 1/6 = 3/6 - 4/6 + 1/6 = 0$. ✓

Verificação em $\dot{x}(0)$: $\dot{x}_t = -e^{-2t} + 2e^{-3t}$, logo $\dot{x}(0) = -1 + 2 = 1$. ✓

22.6.2 Exemplo 2 — $\Delta = 0$

EDO: $\ddot{x} + 2\dot{x} + x = 0$, $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 0$.

Equação característica: $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = -1$ (raiz dupla).

$\Delta = 4 - 4 = 0$. Solução geral:

$$x_t = (k_1 + k_2 t) e^{-t}.$$

Condições iniciais:

$$x(0) = 1 : \quad k_1 = 1.$$

$$\dot{x}_t = k_2 e^{-t} - (k_1 + k_2 t) e^{-t} \Rightarrow \dot{x}(0) = k_2 - k_1 = 0 \Rightarrow k_2 = 1.$$

$$x_t = (1 + t) e^{-t}.$$

Verificação: $\dot{x}_t = e^{-t} - (1 + t)e^{-t} = -te^{-t}$; $\ddot{x}_t = -e^{-t} + te^{-t} = (t - 1)e^{-t}$.

$\ddot{x} + 2\dot{x} + x = (t - 1)e^{-t} + 2(-t)e^{-t} + (1 + t)e^{-t} = (t - 1 - 2t + 1 + t)e^{-t} = 0$. ✓

22.6.3 Exemplo 3 — $\Delta < 0$

EDO: $\ddot{x} + \dot{x} + x = 0$, $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 1$.

Equação característica: $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$.

$$\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$. Temos $\alpha = -1/2$, $\beta = \sqrt{3}/2$. Solução geral:

$$x_t = e^{-t/2} \left[C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \right].$$

Condições iniciais:

$$x(0) = 0 : \quad C_1 = 0.$$

$$\dot{x}_t = -\frac{1}{2}e^{-t/2} \left[C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \right] + e^{-t/2} \left[C_2 \frac{\sqrt{3}}{2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \right].$$

$$\dot{x}(0) = 1 : \quad C_2 \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 \Rightarrow C_2 = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

$$\boxed{x_t = \frac{2\sqrt{3}}{3} e^{-t/2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)}.$$

A solução exibe **oscilações amortecidas**: a amplitude $\frac{2\sqrt{3}}{3}e^{-t/2}$ decai exponencialmente enquanto $\sin(\sqrt{3}/2t)$ oscila com frequência $\beta = \sqrt{3}/2$.

22.6.4 Exemplo 4 — $\Delta = 0$ com termo constante e condição em $t \neq 0$

EDO: $2\ddot{x} + 2\dot{x} + \frac{x}{2} = e$, $x(0) = 2e$, $\dot{x}(-2) = 2e^2$.

Forma padrão (dividindo por 2): $\ddot{x} + \dot{x} + \frac{1}{4}x = \frac{e}{2}$, com $a = 1$, $b = \frac{1}{4}$, $c = \frac{e}{2}$.

Discriminante: $\Delta = 1 - 4 \cdot \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{a}{2} = -\frac{1}{2}$.

Solução particular (caso constante): $x^* = c/b = (e/2)/(1/4) = 2e$.

Solução geral:

$$x(t) = (k_1 + k_2 t) e^{-t/2} + 2e.$$

Condição $x(0) = 2e$: $k_1 + 2e = 2e \Rightarrow k_1 = 0$, portanto $x(t) = k_2 t e^{-t/2} + 2e$.

Derivada:

$$\dot{x}(t) = k_2 e^{-t/2} - \frac{1}{2} k_2 t e^{-t/2} = k_2 e^{-t/2} \left(1 - \frac{t}{2}\right).$$

Condição $\dot{x}(-2) = 2e^2$: substituindo $t = -2$,

$$k_2 \cdot e^1 \cdot (1 + 1) = 2k_2 e = 2e^2 \Rightarrow k_2 = e.$$

Portanto:

$$\boxed{x(t) = t e^{1-t/2} + 2e.}$$

Observação — condição inicial em $t \neq 0$. Quando a condição é dada em $t = t_0 \neq 0$, basta avaliar $x(t)$ ou $\dot{x}(t)$ no ponto t_0 correspondente — o procedimento é idêntico ao caso $t_0 = 0$, mudando apenas o argumento na hora de impor a condição.

22.7 Estabilidade das EDOs de 2ª Ordem

Para a EDO homogênea $\ddot{x} + a\dot{x} + bx = 0$, a solução converge para zero (equilíbrio estável) se e somente se a parte real de todas as raízes for negativa. Pelas fórmulas:

$$\operatorname{Re}(\lambda_{1,2}) = \frac{-a \pm \sqrt{\Delta}}{2} \cdot \mathbf{1}_{\Delta \geq 0} + \left(-\frac{a}{2}\right) \cdot \mathbf{1}_{\Delta < 0}.$$

Uma condição suficiente simples: $a > 0$ e $b > 0$. Nesse caso:

- $\Delta < 0$: $\alpha = -a/2 < 0 \Rightarrow$ oscilações amortecidas.
- $\Delta \geq 0$: ambas as raízes têm parte real < 0 (pois $\lambda_1 + \lambda_2 = -a < 0$ e $\lambda_1 \lambda_2 = b > 0$).

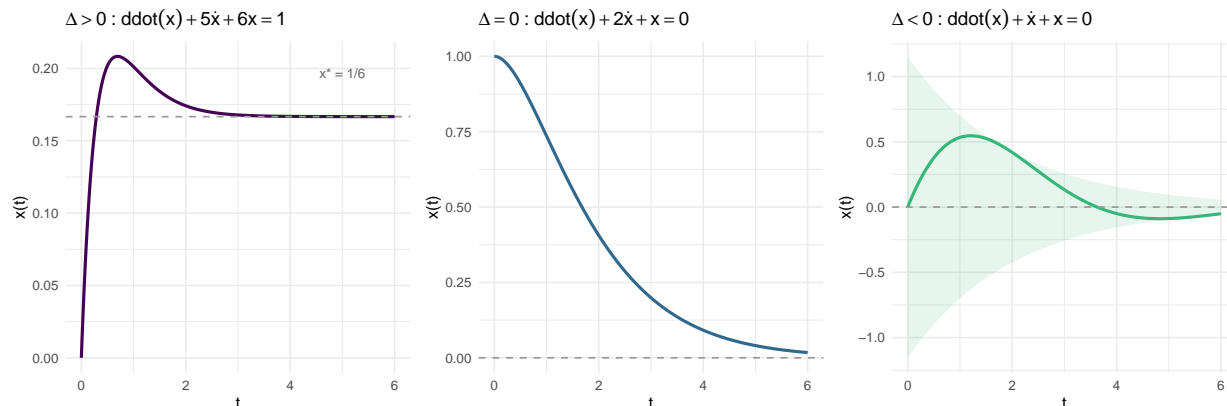


Figura 49: Soluções dos três exemplos de EDO de 2ª ordem. **Esquerda:** $\Delta > 0$ — solução $x_t = \frac{1}{2}e^{-2t} - \frac{2}{3}e^{-3t} + \frac{1}{6}$, convergindo monotonicamente ao equilíbrio $1/6$. **Centro:** $\Delta = 0$ — solução $(1 + t)e^{-t}$, decaimento sem oscilação. **Direita:** $\Delta < 0$ — oscilações amortecidas $\frac{2\sqrt{3}}{3}e^{-t/2} \sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t)$.

22.8 Sistemas de EDOs de 1ª Ordem

Até aqui tratamos uma única variável dinâmica de cada vez. Em economia, é comum que **várias** variáveis estado evoluam **simultaneamente** e se influenciem mutuamente — produto e taxa de juros num modelo IS-LM dinâmico, capital e consumo no problema de Ramsey, salário e desemprego em modelos de busca. A formulação natural é um **sistema** linear de EDOs de 1ª ordem.

22.8.1 Forma Geral

Para duas variáveis $x(t)$ e $y(t)$:

$$\begin{pmatrix} \dot{y} \\ \dot{x} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

A matriz A codifica a interação entre as variáveis; o vetor \mathbf{b} é o termo independente. Em notação compacta, $\dot{\mathbf{z}} = A\mathbf{z} + \mathbf{b}$ com $\mathbf{z} = (y, x)^\top$.

22.8.2 Conexão com EDO de 2ª Ordem: Toda 2ª Ordem é um Sistema 2x1

A EDO de 2ª ordem $\ddot{x} + a\dot{x} + bx = c$ pode ser **reescrita** como sistema de 1ª ordem por uma troca de variáveis. Defina $y := \dot{x}$. Então $\dot{y} = \ddot{x} = -a\dot{x} - bx + c = -ay - bx + c$, e a equação $\dot{x} = y$ é tautológica. Logo:

$$\begin{cases} \dot{y} = -ay - bx + c, \\ \dot{x} = y, \end{cases} \iff \begin{pmatrix} \dot{y} \\ \dot{x} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -a & -b \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}.$$

O ponto crucial: a **mesma solução** que obteríamos resolvendo a EDO de 2ª ordem reaparece se resolvermos o sistema. A fórmula da equação característica da EDO de 2ª ordem é, na verdade, a fórmula dos **autovalores** dessa matriz A :

$$\lambda_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2} = \frac{\text{tr } A \pm \sqrt{(\text{tr } A)^2 - 4|A|}}{2},$$

já que $\text{tr } A = -a$ e $|A| = (-a) \cdot 0 - (-b) \cdot 1 = b$.

22.8.3 Estabilidade via Traço e Determinante

Para um sistema linear $\dot{\mathbf{z}} = A\mathbf{z} + \mathbf{b}$ com A invertível, o **equilíbrio** é $\mathbf{z}^* = -A^{-1}\mathbf{b}$ (resolvendo $\dot{\mathbf{z}} = 0$). A estabilidade depende dos autovalores de A : o equilíbrio é assintoticamente estável se e somente se ambos os autovalores têm **parte real negativa**.

Em 2×2 , isso é equivalente a um par de condições simples sobre traço e determinante:

$$\boxed{\text{tr } A < 0 \quad \text{e} \quad |A| > 0.}$$

De fato: como $\lambda_1 + \lambda_2 = \text{tr } A$ e $\lambda_1 \lambda_2 = |A|$, ter $|A| > 0$ garante que os autovalores tenham o mesmo sinal (caso reais) ou parte real comum (caso complexos), e $\text{tr } A < 0$ força esse sinal/parte real a ser negativo. No caso da matriz vinda da EDO de 2ª ordem, $\text{tr } A < 0 \Leftrightarrow a > 0$ e $|A| > 0 \Leftrightarrow b > 0$ — recuperamos exatamente a condição de estabilidade da seção anterior.

22.8.4 Por que Importa: Sistemas Genuinamente Acoplados

A vantagem real do enfoque por sistema aparece quando A tem **estrutura genérica** (não vinda de uma 2ª ordem): qualquer interação a_{ij} é admissível, e o método unifica EDOs escalares de qualquer ordem com sistemas multivariados acoplados. Os mesmos critérios — autovalores, traço, determinante — classificam todos esses casos.

22.8.5 Exemplo Numérico

Considere a EDO $\ddot{x} + 3\dot{x} + 2x = 0$ ($\Delta=1>0$, raízes -1 e -2). Reescrita como sistema:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{tr } A = -3, \quad |A| = 2.$$

Como $\text{tr } A < 0$ e $|A| > 0$, o equilíbrio $(0, 0)$ é estável.

$$\text{tr}(A) = -3, \quad |A| = 2$$

Autovalores de A : $-2 \quad -1$

Raízes do polinômio característico de 2ª ordem: $-2 \quad -1$

$$\text{tr}(A) = -3, |A| = 2$$

Autovalores de A : [-2. -1.]

Raízes pelo polinômio característico: [-2. -1.]

Os autovalores de A coincidem exatamente com as raízes da equação característica $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$. A solução $x(t)$ que sairia da EDO escalar — combinação linear de e^{-t} e e^{-2t} — é a segunda componente do vetor-solução do sistema.

23 Monitoria 10

23.1 Receita para EDO de 2ª Ordem com Coeficientes Constantes

Para $a\ddot{y} + b\dot{y} + cy = d$ com a, b, c, d constantes:

1. **Solução homogênea** $y_h(t)$ — resolver o polinômio característico $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$. As raízes determinam o formato:

Discriminante	Raízes	$y_h(t)$
$\Delta > 0$	$\lambda_1 \neq \lambda_2$ reais	$Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$
$\Delta = 0$	λ_0 real (dupla)	$Ae^{\lambda_0 t} + Bte^{\lambda_0 t}$
$\Delta < 0$	$\alpha \pm i\beta$	$e^{\alpha t}[A \cos(\beta t) + B \sin(\beta t)]$

2. **Solução particular** $y_p(t)$ — para termo independente **constante** d , basta tentar $y_p = \text{constante}$. Com $\dot{y}_p = \ddot{y}_p = 0$, sobra $cy_p = d \Rightarrow y_p = d/c$ (desde que $c \neq 0$).
3. **Solução geral:** $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$.
4. **Condições iniciais** $(y(0), \dot{y}(0))$ — montar e resolver sistema linear 2×2 em (A, B) . Para \dot{y} , derivar y explicitamente antes de avaliar em $t = 0$.

23.2 Exercício — P1, 2025

Resolva o problema de valor inicial

$$\ddot{y} + 6\dot{y} + 9y = 5, \quad y(0) = \frac{14}{9}, \quad \dot{y}(0) = 0.$$

23.2.1 Passo 1 — Solução homogênea

A equação homogênea associada é $\ddot{y} + 6\dot{y} + 9y = 0$. O polinômio característico é

$$\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0.$$

Discriminante: $\Delta = 36 - 36 = 0$, então temos **raiz dupla**:

$$\lambda = \frac{-6}{2} = -3.$$

Pelo Caso 2 da receita,

$$y_h(t) = Ae^{-3t} + Bte^{-3t}.$$

23.2.2 Passo 2 — Solução particular

O termo independente é constante ($d = 5$). Tentamos $y_p(t) = K$, com $\dot{y}_p = \ddot{y}_p = 0$:

$$0 + 6 \cdot 0 + 9K = 5 \implies K = \frac{5}{9}.$$

Logo $y_p(t) = 5/9$.

23.2.3 Passo 3 — Solução geral

$$y(t) = A e^{-3t} + B t e^{-3t} + \frac{5}{9}.$$

23.2.4 Passo 4 — Condições iniciais

Avaliando em $t = 0$:

$$y(0) = A + \frac{5}{9} = \frac{14}{9} \implies A = \frac{14}{9} - \frac{5}{9} = 1.$$

Diferenciando $y(t)$ pela regra do produto no segundo termo,

$$\dot{y}(t) = -3A e^{-3t} + B e^{-3t} - 3B t e^{-3t} = e^{-3t}[(-3A + B) - 3Bt].$$

Em $t = 0$:

$$\dot{y}(0) = -3A + B = 0 \implies B = 3A = 3.$$

23.2.5 Solução

$$y(t) = e^{-3t} + 3t e^{-3t} + \frac{5}{9}.$$

23.2.6 Verificação

Derivando a solução:

$$\dot{y}(t) = -3e^{-3t} + 3e^{-3t} - 9te^{-3t} = -9te^{-3t},$$

$$\ddot{y}(t) = -9e^{-3t} + 27te^{-3t} = (27t - 9)e^{-3t}.$$

Substituindo na EDO:

$$\begin{aligned} \ddot{y} + 6\dot{y} + 9y &= (27t - 9)e^{-3t} + 6(-9t)e^{-3t} + 9(e^{-3t} + 3te^{-3t} + \frac{5}{9}) \\ &= [(27t - 9) - 54t + 9 + 27t]e^{-3t} + 5 = 0 \cdot e^{-3t} + 5 = 5. \quad \checkmark \end{aligned}$$

E nas condições iniciais: $y(0) = 1 + 0 + 5/9 = 14/9$, $\dot{y}(0) = -9 \cdot 0 \cdot 1 = 0$.

23.3 Visualização

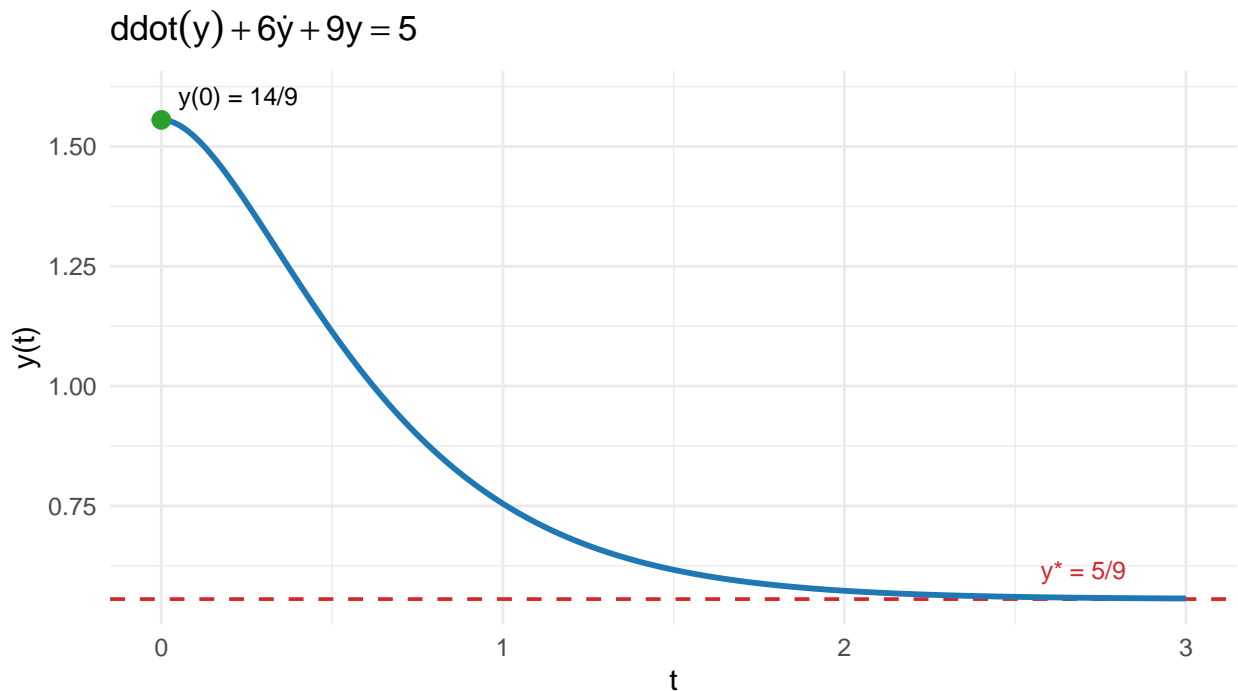


Figura 50: Solução do exercício: $y(t) = e^{-3t} + 3te^{-3t} + 5/9$ (sólida) e equilíbrio $y^* = 5/9$ (tracejada). Note que $y(t)$ converge ao equilíbrio sem oscilar — comportamento típico do caso $\Delta = 0$ com raiz característica negativa.

$$y(0) = 1.555556 \quad (\text{esperado } 14/9 = 1.555556)$$

$$t= 0.0: y'' + 6y' + 9y = 5.000000 \quad (\text{esperado } 5)$$

$$t= 0.5: y'' + 6y' + 9y = 5.000000 \quad (\text{esperado } 5)$$

$$t= 1.0: y'' + 6y' + 9y = 5.000000 \quad (\text{esperado } 5)$$

$$t= 2.0: y'' + 6y' + 9y = 5.000000 \quad (\text{esperado } 5)$$

A solução converge monotonicamente ao equilíbrio $y^* = 5/9$ — o caso $\Delta = 0$ com raiz negativa é o **limiar entre decaimento puro e oscilação amortecida**: qualquer perturbação no coeficiente que torne Δ positivo produz duas raízes reais negativas (decaimento exponencial sem termo t); qualquer perturbação que torne Δ negativo produz raízes complexas e a solução passa a oscilar enquanto decai.

24 Funções de Várias Variáveis Reais

24.1 Motivação Econômica

Quase toda relação econômica de interesse depende de **múltiplos fatores simultaneamente**. Funções de várias variáveis são a linguagem natural da teoria econômica:

- **Função de utilidade:** $U(x_1, x_2, \dots, x_n)$ representa a satisfação do consumidor com n bens. O problema do consumidor — maximizar U sujeito à restrição orçamentária $\sum p_i x_i = m$ — exige derivadas parciais e condições de primeira ordem em cada argumento.
- **Função de produção Cobb-Douglas:** $F(K, L) = AK^\alpha L^\beta$ relaciona produto a capital K e trabalho L . As produtividades marginais $\partial F/\partial K$ e $\partial F/\partial L$ determinam a demanda por fatores; a taxa marginal de substituição técnica (TMST) é o quociente dessas derivadas.
- **Função de lucro:** $\pi(p, w, r) = p \cdot F(K^*, L^*) - wL^* - rK^*$ depende do preço do produto p , do salário w e do custo do capital r . O Lema de Hotelling — $\partial\pi/\partial p = y^*$ — é um resultado direto de diferenciação parcial.
- **Estática comparativa:** como $y^* = f(p, w, r, \dots)$ varia quando um parâmetro muda, mantendo os demais fixos? A resposta é sempre uma derivada parcial — o objeto central deste capítulo.

24.2 Introdução

Na matemática do ensino médio e no cálculo univariado, estudamos funções de uma única variável real: $y = f(x)$, em que um número real x é mapeado em um número real y . Em Economia, porém, quase todas as relações de interesse dependem de **múltiplos fatores simultaneamente** — o consumo depende da renda e dos preços; a utilidade depende das quantidades de vários bens; o produto depende do capital, do trabalho e da tecnologia. Para modelar essas relações, precisamos generalizar o conceito de função para o caso de **várias variáveis**.

24.2.1 Definição Formal

Uma **função de várias variáveis reais** é uma regra que associa a cada vetor $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ um único valor real $z \in \mathbb{R}$. Formalmente:

$$f : D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto z = f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Os elementos do domínio D são **vetores** (ou pontos) em \mathbb{R}^n , e o valor z é um escalar real. O caso mais comum em Economia é $n = 2$, com duas variáveis independentes x e y :

$$f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto z = f(x, y).$$

O gráfico de f neste caso é uma **superfície** no espaço tridimensional \mathbb{R}^3 .

24.2.2 Conceitos Fundamentais

- **Domínio** D : conjunto de todos os pontos (x_1, \dots, x_n) para os quais f está definida.
- **Imagem** $\text{Im}(f)$: conjunto de todos os valores $z = f(x_1, \dots, x_n)$ assumidos por f .
- **Gráfico**: conjunto $\{(x_1, \dots, x_n, z) \in \mathbb{R}^{n+1} : z = f(x_1, \dots, x_n), (x_1, \dots, x_n) \in D\}$.

24.2.3 Exemplo Simples: Custo Total

Considere uma firma que produz um bem usando dois insumos com preços w_1 e w_2 , adquirindo quantidades x_1 e x_2 . O **custo total** é:

$$C(x_1, x_2) = w_1 x_1 + w_2 x_2.$$

Fixando $w_1 = 3$ e $w_2 = 5$, temos $C(x_1, x_2) = 3x_1 + 5x_2$. Alguns valores:

x_1	x_2	$C(x_1, x_2)$
0	0	0
2	0	6
0	2	10
2	3	21
4	4	32

O domínio natural é $D = \mathbb{R}_+^2 = \{(x_1, x_2) : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$ e a imagem é $[0, +\infty)$. As curvas de nível $C(x_1, x_2) = \bar{C}$ são **retas** no plano (x_1, x_2) — as **isocustas** da teoria microeconômica:

$$x_2 = \frac{\bar{C}}{w_2} - \frac{w_1}{w_2} x_1 = \frac{\bar{C}}{5} - \frac{3}{5} x_1.$$

24.3 A Função de Produção

24.3.1 Motivação

Um exemplo clássico em Economia é a **função de produção**, que descreve a quantidade máxima de produto Q que uma firma pode obter combinando dois insumos: **capital** K e **trabalho** L :

$$f : \mathbb{R}_+^2 \longrightarrow \mathbb{R}_+, \quad (K, L) \mapsto Q = f(K, L).$$

24.3.2 A Função Cobb-Douglas

A especificação mais utilizada na literatura é a **Cobb-Douglas**:

$$Q = f(K, L) = A K^\alpha L^\beta,$$

onde:

Parâmetro	Interpretação
$A > 0$	Produtividade total dos fatores (PTF)
$\alpha \in (0, 1)$	Elasticidade do produto em relação ao capital
$\beta \in (0, 1)$	Elasticidade do produto em relação ao trabalho

24.3.3 Capital Fixo: f como Função de L

Fixando $K = \bar{K}$, a Cobb-Douglas se reduz a uma função de **uma única variável**:

$$Q(L) = \underbrace{A \bar{K}^\alpha}_{\text{constante}} L^\beta,$$

que é uma função de potência em L . Para $\beta \in (0, 1)$, Q é crescente e côncava — refletindo o **produto marginal decrescente do trabalho**.

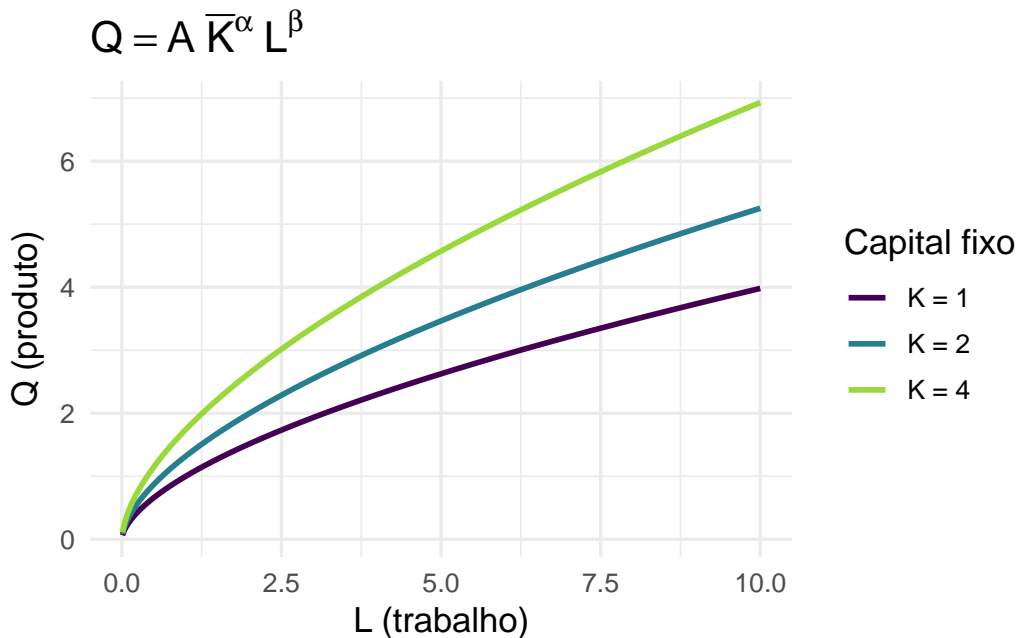


Figura 51: Função de produção Cobb-Douglas com K fixo ($A = 1$, $\alpha = 0.4$, $\beta = 0.6$)

24.3.4 Retornos de Escala

Multiplicando todos os insumos por um fator $\lambda > 0$:

$$f(\lambda K, \lambda L) = A(\lambda K)^\alpha (\lambda L)^\beta = \lambda^{\alpha+\beta} AK^\alpha L^\beta = \lambda^{\alpha+\beta} f(K, L).$$

- Se $\alpha + \beta = 1$: **retornos constantes de escala.**
- Se $\alpha + \beta > 1$: **retornos crescentes de escala.**
- Se $\alpha + \beta < 1$: **retornos decrescentes de escala.**

Para visualizar, fixamos $(K_0, L_0) = (1, 1)$ e escalamos os insumos por $\lambda \in [1, 4]$. O produto resultante é $Q(\lambda) = \lambda^{\alpha+\beta} \cdot f(K_0, L_0)$. Quando λ dobra, o produto mais do que dobra (crescentes), dobra exatamente (constantes) ou menos que dobra (decrescentes).

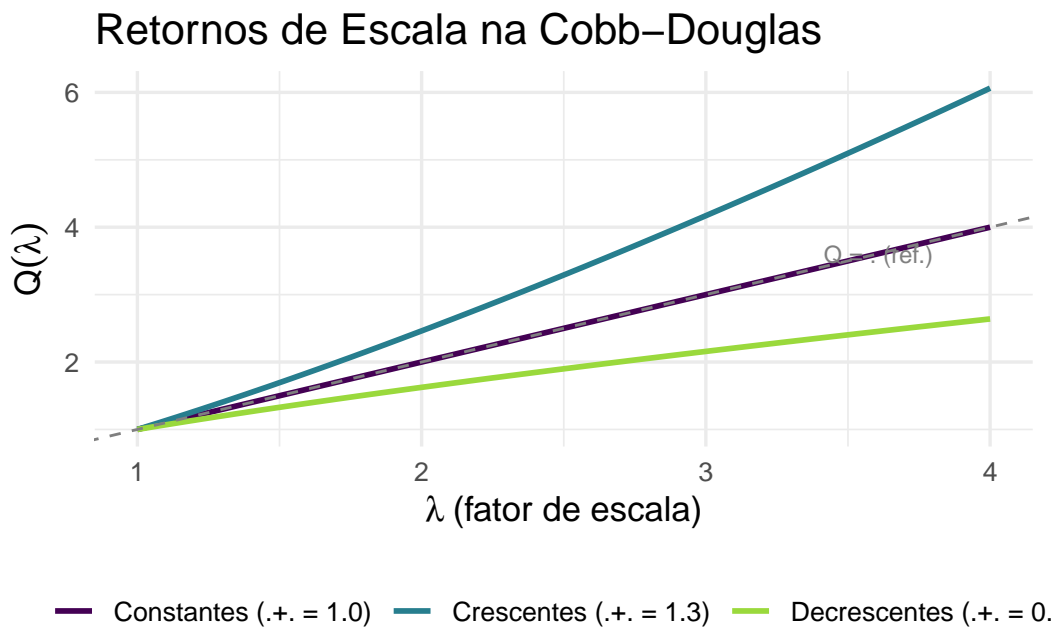


Figura 52: Retornos de escala: produto $Q(\lambda)$ ao escalar os insumos por λ

24.4 Curvas de Nível

24.4.1 Definição

Dada $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, a **curva de nível** de valor $c \in \mathbb{R}$ é o conjunto:

$$\mathcal{C}_c = \{(x, y) \in D : f(x, y) = c\}.$$

Geometricamente, \mathcal{C}_c é a projeção no plano xy da interseção do gráfico de f com o plano horizontal $z = c$. O conjunto de todas as curvas de nível, para diferentes valores de c , é chamado de **mapa de contorno** de f .

24.4.2 Interpretação Econômica: Isoquantas

Na função de produção $Q = f(K, L)$, as curvas de nível são as **isoquantas** — combinações de capital e trabalho que geram o mesmo nível de produto:

$$\mathcal{C}_{\bar{Q}} = \{(K, L) : A K^\alpha L^\beta = \bar{Q}\}.$$

Isolando L :

$$L = \left(\frac{\bar{Q}}{A K^\alpha} \right)^{1/\beta} = \left(\frac{\bar{Q}}{A} \right)^{1/\beta} K^{-\alpha/\beta}.$$

Para $\alpha, \beta > 0$, a isoquanta é **decrecente e convexa** no plano (K, L) — a firma pode trocar capital por trabalho mantendo o produto constante, mas a substituição é cada vez mais custosa.

24.4.3 Circunferências e a Equação Geral

A equação geral de uma circunferência de raio R centrada no ponto (a, b) é:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2.$$

No caso de $f(x, y) = x^2 + y^2$, a curva de nível $f(x, y) = c$ é:

$$x^2 + y^2 = c \iff (x - 0)^2 + (y - 0)^2 = (\sqrt{c})^2,$$

ou seja, uma circunferência com $a = 0$, $b = 0$ e $R = \sqrt{c}$ — centrada na **origem**. À medida que c cresce, o raio $R = \sqrt{c}$ aumenta, e as circunferências se afastam da origem.

24.4.4 Exemplos Gráficos

A forma das curvas de nível revela a geometria da função. Três casos ilustrativos:

Função	Curvas de nível	Geometria
$f(x, y) = x^2 + y^2$	$x^2 + y^2 = c$	Circunferências
$f(x, y) = x^2 - y^2$	$x^2 - y^2 = c$	Hipérbolas
$f(x, y) = K^{0.4}L^{0.6}$	$K^{0.4}L^{0.6} = c$	Isoquantas côncavas

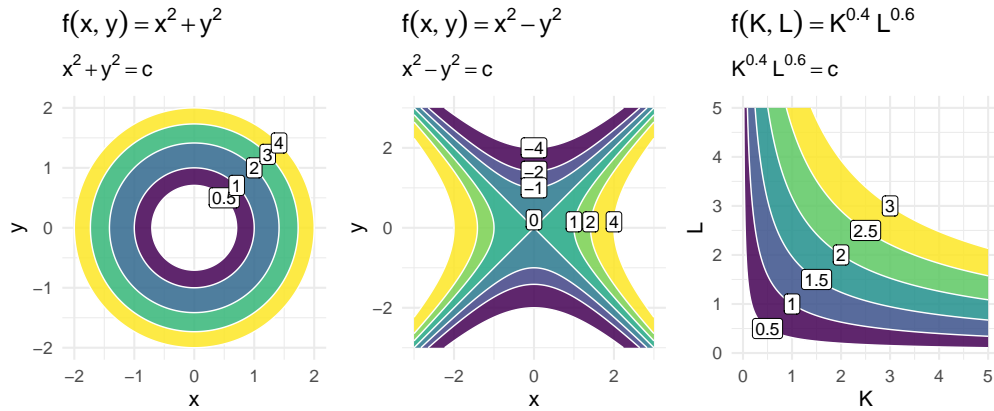


Figura 53: Curvas de nível para três funções distintas

24.4.5 Translações e Reflexões

Pequenas modificações em $f(x, y) = x^2 + y^2$ deslocam o centro, alteram o conjunto de níveis admissíveis ou invertem a orientação da superfície. Comparemos três variantes.

24.4.5.1 a) $f(x, y) = (x - 2)^2 + (y - 1)^2$ — centro deslocado

Igualando a c :

$$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = c.$$

Comparando com $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$, as curvas de nível são **circunferências centradas em** $(2, 1)$ com raio $R = \sqrt{c}$, $c \geq 0$. O parabolóide é o mesmo do exemplo padrão, apenas transladado para que o vértice ocorra em $(2, 1, 0)$.

24.4.5.2 b) $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ — deslocamento vertical

$$x^2 + y^2 - 1 = c \Rightarrow x^2 + y^2 = c + 1 = R^2.$$

As curvas de nível continuam sendo circunferências centradas na origem, mas agora $R = \sqrt{c + 1}$, com a restrição $c \geq -1$. O nível $c = -1$ corresponde ao vértice $(0, 0, -1)$ — note que $f(0, 0) = -1$, e o parabolóide fica deslocado para baixo em uma unidade.

c	$R = \sqrt{c + 1}$
-1	0
0	1
3	2
8	3

24.4.5.3 c) $f(x, y) = -x^2 - y^2$ — parabolóide invertido

$$-x^2 - y^2 = c \Rightarrow x^2 + y^2 = -c = R^2.$$

Agora o sinal se inverte: as curvas de nível existem apenas para $c \leq 0$, com $R = \sqrt{-c}$. A superfície é um **parabolóide invertido** com vértice em $(0, 0, 0)$ apontando para baixo. Os níveis com $c > 0$ são vazios.

Síntese. Em todas as variantes do parabolóide, as curvas de nível são circunferências; o que muda é (i) o centro (translação horizontal) e (ii) o intervalo de c admissível (translação vertical ou reflexão). Reconhecer essas transformações dispensa recalcular a estrutura do gráfico do zero.

24.4.6 Outras Formas de Superfície

As variantes do parabolóide acima compartilham um traço: as curvas de nível são todas **circunferências**. Mas curvas de nível circulares **não determinam** o formato da superfície — duas funções podem ter o mesmo padrão de níveis e gráficos qualitativamente distintos. Vejamos dois casos onde isso aparece com clareza.

24.4.6.1 d) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ — cone

Igualando a $c \geq 0$:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = c \Rightarrow x^2 + y^2 = c^2 = R^2.$$

As curvas de nível são **circunferências centradas na origem** com raio $R = c$ — o **mesmo padrão** do parabolóide $x^2 + y^2$, exceto pelo espaçamento radial:

c	R no parabolóide (\sqrt{c})	R no cone (c)
1	1	1
4	2	4
9	3	9

No parabolóide, os raios crescem como \sqrt{c} — os níveis se acumulam à medida que c aumenta, e a superfície fica mais íngreme ao se afastar da origem. No cone, os raios crescem **linearmente** com c — os níveis são equiespaçados, e a superfície sobe com inclinação **constante**. Geometricamente, o gráfico de f é um **cone reto** com vértice em $(0, 0, 0)$.

Observação importante. Diferentemente do parabolóide, o cone tem uma “ponta” na origem: a função não é diferenciável em $(0, 0)$ — ao tentar definir a derivada parcial $\partial f / \partial x$ em $(0, 0)$, o limite pela direita ($x \rightarrow 0^+$, $y = 0$) dá $+1$, e pela esquerda dá -1 . Mesmo padrão de curvas de nível, regularidades muito distintas.

24.4.6.2 e) $f(x, y) = (x - 2)^2$ — calha cilíndrica

A função depende **apenas de x** : o valor não muda quando movemos y . Igualando a c :

$$(x - 2)^2 = c \Rightarrow x = 2 \pm \sqrt{c}, \quad c \geq 0.$$

As curvas de nível são **pares de retas verticais** $x = 2 \pm \sqrt{c}$, paralelas ao eixo y — não circunferências, não fechadas. O gráfico no \mathbb{R}^3 é uma **calha cilíndrica**: a parábola $z = (x - 2)^2$ no plano xz varrida ao longo do eixo y .

c	retas de nível
0	$x = 2$ (reta dupla)
1	$x = 1$ e $x = 3$
4	$x = 0$ e $x = 4$
9	$x = -1$ e $x = 5$

Por que isso é didático. Mostra que (i) uma função de duas variáveis pode “ignorar” uma delas, e (ii) curvas de nível **não precisam ser fechadas** — a forma reflete a estrutura algébrica da função, não uma regra geral. Casos como esse aparecem em economia quando uma utilidade depende de um único bem (com o outro entrando livremente) ou quando uma tecnologia é insensível a um insumo na margem.

24.5 Exemplo: $f(x, y) = x^2 + y^2$

Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x, y) = x^2 + y^2.$$

24.5.1 Domínio e Imagem

- **Domínio:** $D = \mathbb{R}^2$, pois a expressão está definida para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
- **Imagem:** $\text{Im}(f) = [0, +\infty)$, pois $x^2 + y^2 \geq 0$ para todo (x, y) , com igualdade apenas na origem.

24.5.2 Curvas de Nível

As **curvas de nível** de f são os conjuntos $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = c\}$ para $c \geq 0$:

$$x^2 + y^2 = c.$$

Para $c > 0$, cada curva de nível é uma **circunferência** de raio \sqrt{c} centrada na origem; para $c = 0$, é o ponto $(0, 0)$.

24.5.3 Avaliação em Pontos

Alguns valores ilustrativos:

(x, y)	$f(x, y)$
(0, 0)	0
(1, 0)	1
(1, 1)	2
(3, 4)	25

24.5.4 Gráfico

O gráfico de f é um **paraboloide elíptico** (circular) com vértice na origem, que se abre para cima:

$$z = x^2 + y^2, \quad z \geq 0.$$

24.5.4.1 Com R (ggplot2)

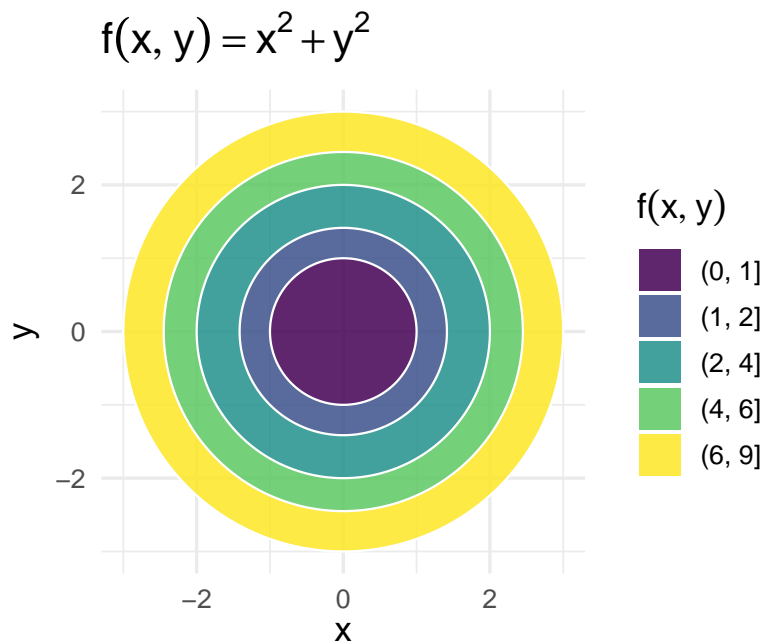


Figura 54: Curvas de nível de $f(x, y) = x^2 + y^2$ — R

24.5.4.2 Com Python (matplotlib + numpy)

A lógica é idêntica à do R: construímos uma **grade de pontos** no plano xy , avaliamos f em cada ponto e pedimos ao `matplotlib` que trace as curvas de nível.

<matplotlib.colorbar.Colorbar object at 0x13beba120>

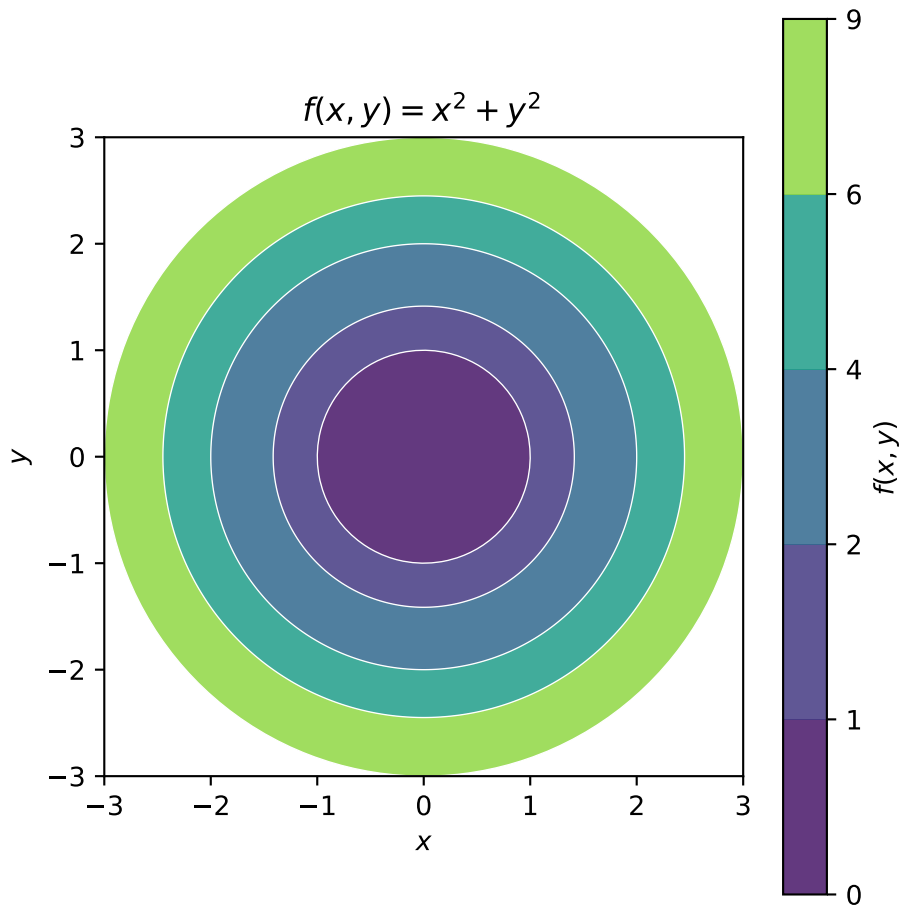


Figura 55: Curvas de nível de $f(x, y) = x^2 + y^2$ — Python

24.6 Exemplo: $f(x, y) = \frac{1}{x - y^2}$

24.6.1 Domínio

A função não está definida quando o denominador se anula. Portanto:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - y^2 \neq 0\} = \mathbb{R}^2 \setminus \{x = y^2\}.$$

O conjunto excluído, $x = y^2$, é uma **parábola** no plano xy . À esquerda dela ($x < y^2$), $f < 0$; à direita ($x > y^2$), $f > 0$.

24.6.2 Imagem

- Quando $x - y^2 \rightarrow 0^+$, $f \rightarrow +\infty$.
- Quando $x - y^2 \rightarrow 0^-$, $f \rightarrow -\infty$.
- f pode assumir qualquer valor real exceto zero (pois $1/(x - y^2) = 0$ não tem solução).

$$\text{Im}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

24.6.3 Curvas de Nível

Igualando $f(x, y) = c \neq 0$:

$$\frac{1}{x - y^2} = c \implies x - y^2 = \frac{1}{c} \implies \boxed{x = y^2 + \frac{1}{c}}.$$

Cada curva de nível é uma **parábola** com eixo horizontal, deslocada da parábola-fronteira $x = y^2$ por $1/c$:

- $c > 0$: parábola deslocada para a **direita** ($1/c > 0$).
- $c < 0$: parábola deslocada para a **esquerda** ($1/c < 0$).
- À medida que $|c| \rightarrow \infty$, as curvas se aproximam da fronteira $x = y^2$.

24.6.4 Gráfico

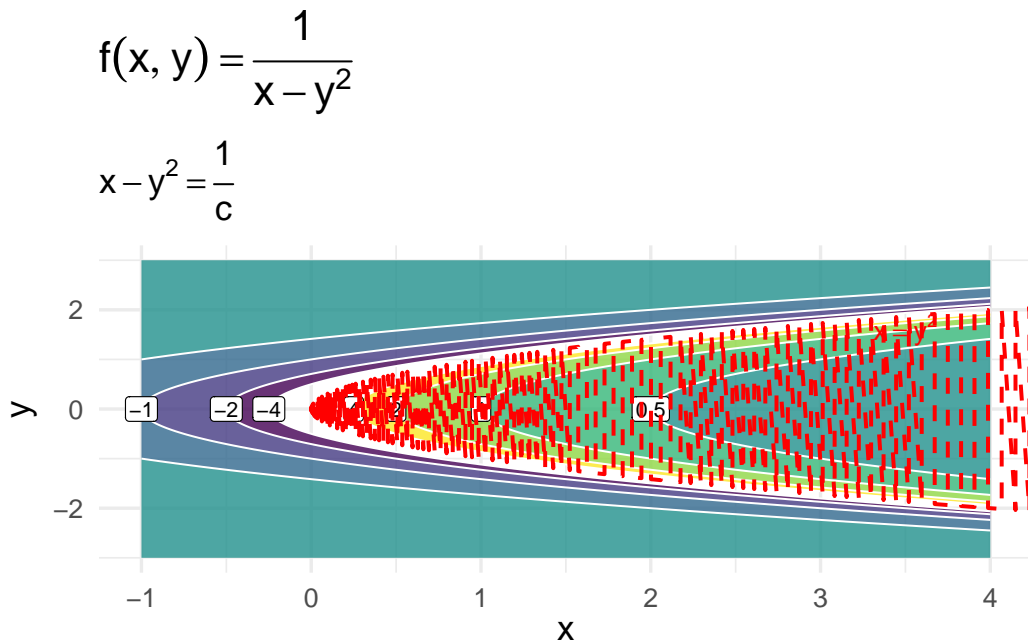


Figura 56: Curvas de nível de $f(x, y) = 1/(x - y^2)$

24.7 Exemplo: $f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$

24.7.1 Domínio e Imagem

O denominador se anula apenas na origem, portanto:

$$D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}.$$

Como $x^2 + y^2 > 0$ em todo o domínio, $f > 0$ em todo ponto. Além disso:

- Quando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$: $x^2 + y^2 \rightarrow 0^+$, logo $f \rightarrow +\infty$.
- Quando $\|(x, y)\| \rightarrow \infty$: $x^2 + y^2 \rightarrow +\infty$, logo $f \rightarrow 0^+$.

Portanto $\text{Im}(f) = (0, +\infty)$.

24.7.2 Curvas de Nível

Igualando $f(x, y) = c > 0$:

$$\frac{1}{x^2 + y^2} = c \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = \frac{1}{c}.$$

Comparando com a equação geral $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$, temos $a = 0$, $b = 0$ e $R^2 = 1/c$ — circunferências centradas na origem com raio decrescente em c .

Contraste com $f = x^2 + y^2$: naquele exemplo $R^2 = c$ cresce com c ; aqui $R^2 = 1/c$ **decrece** — curvas de nível maiores correspondem a círculos **menores**, mais próximos da origem.

c	$R^2 = 1/c$
0.25	4
0.5	2
1	1
2	0.5
4	0.25

24.7.3 Gráfico

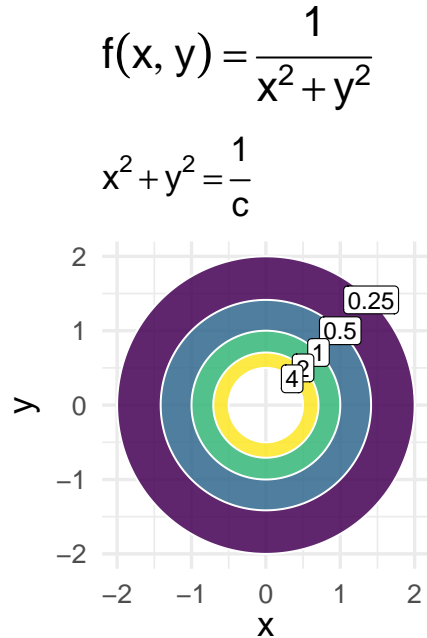


Figura 57: Curvas de nível de $f(x, y) = 1/(x^2 + y^2)$

24.8 Derivadas Parciais

24.8.1 Definição

Dada $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, a **derivada parcial de f em relação a x** no ponto (x_0, y_0) é definida pelo limite:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h},$$

e analogamente para y :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

A ideia é simples: **congela-se uma variável e diferencia-se em relação à outra**, exatamente como na derivada univariada.

24.8.2 Notação

Para $z = f(x, y)$, todas as notações abaixo são equivalentes:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x = \partial_x f = D_x f = z_x.$$

24.8.3 Interpretação Geométrica

$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ é a **inclinação da curva** obtida pela interseção do gráfico de f com o plano $y = y_0$ — ou seja, a taxa de variação de f na direção do eixo x , mantendo y fixo.

24.8.4 Cálculo Prático

Para calcular $\partial f/\partial x$, trata-se y como constante e aplica-se as regras usuais de derivação. Analogamente para $\partial f/\partial y$.

24.8.5 Exemplos

24.8.5.1 $f(x, y) = x^2 + y^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y.$$

24.8.5.2 $f(x, y) = x^2 - y^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2y.$$

24.8.5.3 $f(x, y) = \frac{1}{x - y^2}$

Usando a regra da cadeia com $u = x - y^2$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{1}{(x - y^2)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{(x - y^2)^2}.$$

24.8.5.4 Cobb-Douglas: $f(K, L) = AK^\alpha L^\beta$

$$\frac{\partial f}{\partial K} = \alpha AK^{\alpha-1} L^\beta = \frac{\alpha Q}{K}, \quad \frac{\partial f}{\partial L} = \beta AK^\alpha L^{\beta-1} = \frac{\beta Q}{L}.$$

Estas são o **produto marginal do capital** ($PMgK$) e o **produto marginal do trabalho** ($PMgL$) — a variação no produto decorrente de uma unidade adicional de cada insumo, mantendo o outro fixo.

24.8.6 Interpretação Econômica

Na Cobb-Douglas, α e β têm uma interpretação direta via derivadas parciais:

$$\frac{\partial \ln Q}{\partial \ln K} = \alpha, \quad \frac{\partial \ln Q}{\partial \ln L} = \beta,$$

ou seja, α e β são as **elasticidades** do produto em relação ao capital e ao trabalho, respectivamente. Um aumento de 1% em K , mantendo L fixo, eleva Q em $\alpha\%$.

24.8.7 Ilustração Gráfica

O gráfico abaixo mostra $\partial f/\partial x$ e $\partial f/\partial y$ para $f(x, y) = x^2 + y^2$ como campos de vetores sobre as curvas de nível — cada seta aponta na direção de maior crescimento local de cada componente.

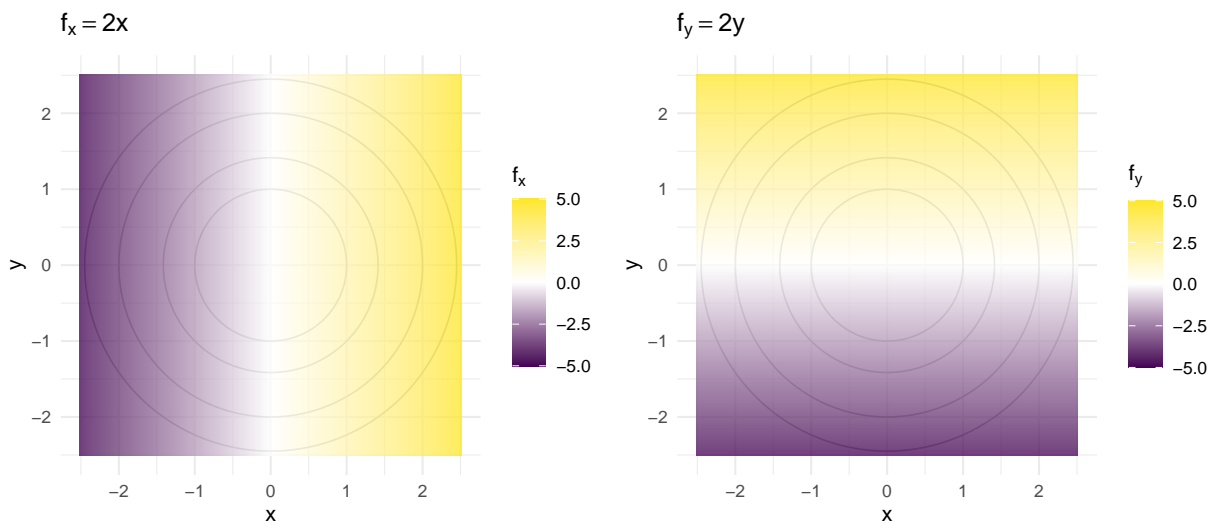


Figura 58: Derivadas parciais de $f(x, y) = x^2 + y^2$: $f_x = 2x$ (esq.) e $f_y = 2y$ (dir.)

24.9 Derivadas Parciais de Segunda Ordem

24.9.1 Definição e Notação

Dada $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ com derivadas parciais de primeira ordem, as **derivadas parciais de segunda ordem** são obtidas diferenciando novamente. Para $z = f(x, y)$, há quatro derivadas de segunda ordem, cada uma com notações equivalentes:

Derivadas puras:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right).$$

Derivadas mistas (diferencia-se em relação a variáveis distintas):

$$f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right), \quad f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right).$$

Ordem de leitura: tanto nos subscritos quanto na notação de Leibniz, lê-se da **esquerda para a direita**. Assim, $f_{yx} = \partial^2 f / \partial y \partial x$ significa diferenciar primeiro em y e depois em x . O operador mais à esquerda é o aplicado por último — envolve o resultado da diferenciação anterior.

24.9.2 Teorema de Young

Enunciado: Seja $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Se as derivadas mistas f_{xy} e f_{yx} existem e são **contínuas** em (x_0, y_0) , então:

$$\boxed{f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)}.$$

O que o teorema diz: a ordem de diferenciação é irrelevante — diferencia-se primeiro em x e depois em y , ou vice-versa, e o resultado é o mesmo. Isso reduz o número de derivadas distintas de 4 para 3: f_{xx} , f_{yy} e $f_{xy} = f_{yx}$.

Por que a continuidade importa: sem ela, o teorema pode falhar. O contraexemplo clássico é:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

para a qual $f_{xy}(0, 0) = 1 \neq -1 = f_{yx}(0, 0)$ — as mistas existem mas não são contínuas na origem.

Consequência prática: para as funções usuais em Economia (polinômios, exponenciais, logaritmos, potências), as derivadas mistas são contínuas em todo o domínio, de modo que $f_{xy} = f_{yx}$ é garantido e a Hessiana é sempre **simétrica**.

Ou seja, a ordem de diferenciação não importa — resultado de grande utilidade prática.

24.9.3 A Matriz Hessiana

Todas as derivadas de segunda ordem de $f(x, y)$ organizam-se na **matriz Hessiana**:

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}.$$

Pelo Teorema de Schwarz, H_f é **simétrica** sempre que as derivadas mistas são contínuas. A Hessiana captura a **curvatura** de f e é central nas condições de segunda ordem para otimização.

24.9.4 Exemplos

24.9.4.1 $f(x, y) = x^2 + y^2$

$$f_x = 2x, \quad f_y = 2y,$$

$$f_{xx} = 2, \quad f_{yy} = 2, \quad f_{xy} = f_{yx} = 0,$$

$$H_f = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Hessiana diagonal com entradas positivas: curvatura positiva em todas as direções — parabolóide convexo.

24.9.4.2 $f(x, y) = x^2 - y^2$

$$f_{xx} = 2, \quad f_{yy} = -2, \quad f_{xy} = 0,$$

$$H_f = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Curvatura positiva em x e negativa em y — superfície de **sela**.

24.9.4.3 Cobb-Douglas: $f(K, L) = AK^\alpha L^\beta$

$$f_{KK} = \alpha(\alpha - 1) AK^{\alpha-2} L^\beta, \quad f_{LL} = \beta(\beta - 1) AK^\alpha L^{\beta-2},$$

$$f_{KL} = f_{LK} = \alpha\beta AK^{\alpha-1} L^{\beta-1}.$$

$$H_f = \begin{pmatrix} \alpha(\alpha - 1) AK^{\alpha-2} L^\beta & \alpha\beta AK^{\alpha-1} L^{\beta-1} \\ \alpha\beta AK^{\alpha-1} L^{\beta-1} & \beta(\beta - 1) AK^\alpha L^{\beta-2} \end{pmatrix}.$$

Para $\alpha, \beta \in (0, 1)$: $f_{KK} < 0$ e $f_{LL} < 0$ — **produto marginal decrescente** de cada insumo.

24.9.4.4 $f(x, y) = \ln(1 + x^2 + y^2)$

Seja $u = 1 + x^2 + y^2$. Pela regra da cadeia:

$$f_x = \frac{2x}{1 + x^2 + y^2}, \quad f_y = \frac{2y}{1 + x^2 + y^2}.$$

Diferenciando novamente pela regra do quociente:

$$f_{xx} = \frac{2(1 + x^2 + y^2) - 2x \cdot 2x}{(1 + x^2 + y^2)^2} = \frac{2(1 - x^2 + y^2)}{(1 + x^2 + y^2)^2},$$

$$f_{yx} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{2x}{1 + x^2 + y^2} \right) = \frac{-4xy}{(1 + x^2 + y^2)^2},$$

$$f_{xy} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{2y}{1 + x^2 + y^2} \right) = \frac{-4xy}{(1 + x^2 + y^2)^2} = f_{yx}. \quad \checkmark$$

24.9.4.5 $f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$

Seja $r^2 = x^2 + y^2$. Escrevendo $f = (x^2 + y^2)^{-1}$:

$$f_x = \frac{-2x}{(x^2 + y^2)^2}, \quad f_y = \frac{-2y}{(x^2 + y^2)^2}.$$

$$f_{xx} = \frac{-2(x^2 + y^2)^2 + 2x \cdot 2(x^2 + y^2) \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^4} = \frac{6x^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^3},$$

$$f_{yx} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{-2x}{(x^2 + y^2)^2} \right) = \frac{8xy}{(x^2 + y^2)^3},$$

$$f_{xy} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{-2y}{(x^2 + y^2)^2} \right) = \frac{8xy}{(x^2 + y^2)^3} = f_{yx}. \quad \checkmark$$

24.9.4.6 $F(x, y) = x e^{x^2-y^2}$

Seja $u = x^2 - y^2$. Pela regra do produto e da cadeia:

$$F_x = e^{x^2-y^2} + x \cdot 2x e^{x^2-y^2} = e^{x^2-y^2} (1 + 2x^2),$$

$$F_y = x \cdot (-2y) e^{x^2-y^2} = -2xy e^{x^2-y^2}.$$

$$F_{xx} = 2x e^{x^2-y^2} (1 + 2x^2) + e^{x^2-y^2} \cdot 4x = 2x e^{x^2-y^2} (3 + 2x^2),$$

$$F_{yx} = \frac{\partial}{\partial y} [e^{x^2-y^2} (1 + 2x^2)] = -2y(1 + 2x^2) e^{x^2-y^2},$$

$$F_{xy} = \frac{\partial}{\partial x} [-2xy e^{x^2-y^2}] = -2y e^{x^2-y^2} - 4x^2 y e^{x^2-y^2} = -2y(1 + 2x^2) e^{x^2-y^2} = F_{yx}. \quad \checkmark$$

24.9.5 Interpretação Econômica

Na Cobb-Douglas, $f_{KK} < 0$ e $f_{LL} < 0$ traduzem a **lei dos rendimentos marginais decrescentes**: cada unidade adicional de capital (ou trabalho), mantendo o outro fator fixo, contribui cada vez menos para o produto. A derivada mista $f_{KL} > 0$ indica **complementaridade**: mais capital eleva o produto marginal do trabalho, e vice-versa.

24.9.6 Ilustração: Curvatura via f_{xx} e f_{yy}

24.10 Aproximação Linear de uma Função

24.10.1 Caso Univariado

A derivada $f'(x^*)$ é, por definição, o limite da razão incremental — geometricamente, a inclinação da reta tangente ao gráfico de f em $x = x^*$. Para incrementos Δx pequenos, podemos **aproximar** a variação de f pela variação na reta tangente:

$$\Delta y \approx f'(x^*) \Delta x \quad \iff \quad \boxed{f(x^* + \Delta x) \approx f(x^*) + f'(x^*) \Delta x.}$$

Esta é a **aproximação linear** ou **Taylor de primeira ordem** em torno de x^* . O erro $\Delta y - f'(x^*)\Delta x$ é de ordem $O(\Delta x^2)$ — pequeno comparado a Δx quando $\Delta x \rightarrow 0$.

A notação **diferencial** torna a aproximação exata no limite:

$$dy = f'(x^*) dx.$$

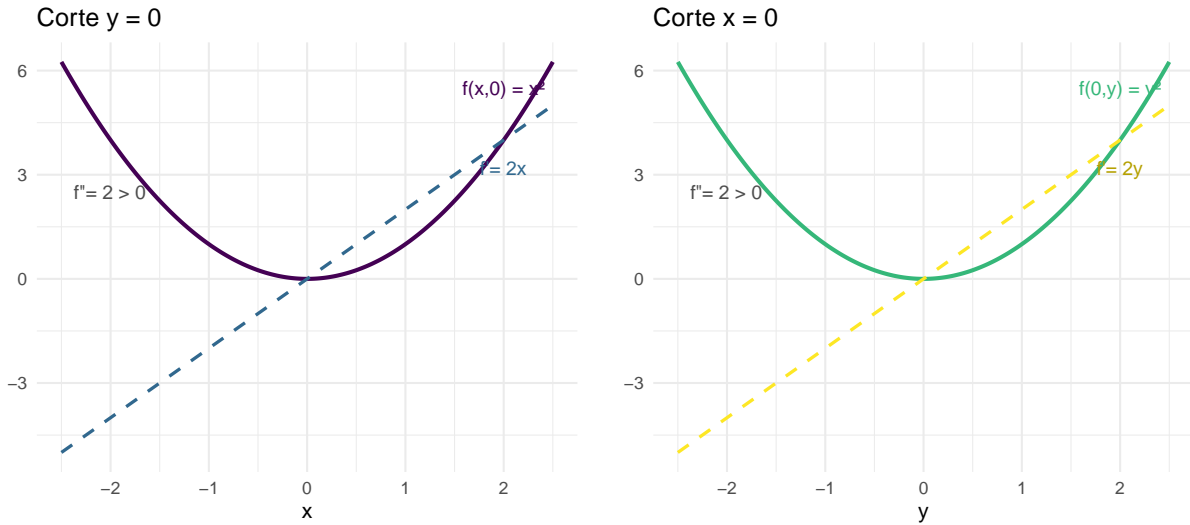


Figura 59: Derivadas de segunda ordem de $f(x, y) = x^2 + y^2$: $f_{xx} = 2$ (constante) e $f_{yy} = 2$ (constante). O gráfico mostra cortes de f fixando $y = 0$ (esq.) e $x = 0$ (dir.), com a curvatura positiva evidenciada.

24.10.2 Caso Multivariado

Para $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, a aproximação linear em torno de $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ é:

$$f(x^* + \Delta x) \approx f(x^*) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^*) \Delta x_i.$$

Cada derivada parcial $\partial f / \partial x_i$ entra como peso da variação Δx_i na direção i . Equivalentemente, em forma diferencial:

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i.$$

Esta é a base de toda a estática comparativa: se uma relação de equilíbrio depende de variáveis endógenas e parâmetros, diferenciar implicitamente a relação **lineariza** o problema em torno do equilíbrio inicial — e a álgebra linear (Cramer, inversa, Jacobiana) toma o controle.

24.11 Funções Explícitas e Implícitas

24.11.1 Funções Explícitas

Uma função é **explícita** quando podemos escrever a variável endógena y isolada em função das exógenas x :

$$y = f(x), \quad \text{e.g., } y = 3x^2.$$

24.11.2 Funções Implícitas

Em muitos contextos econômicos, a relação entre endógenas e exógenas vem na forma:

$$F(y, x) = c,$$

sem que seja possível (ou conveniente) isolar y . Exemplos:

- **Curvas de indiferença:** $U(x_1, x_2) = \bar{U}$ — combinações de bens com mesmo nível de utilidade. Isolar x_2 pode ser difícil para utilidades não-separáveis.
- **Curva IS:** $Y - C(Y - T) - I(r) - G = 0$ — relação implícita entre Y e r .
- **Equação de Euler em consumo:** $u'(c_t) = \beta(1 + r)u'(c_{t+1})$ — relação implícita entre c_t e c_{t+1} dada uma função utilidade u .
- **Equilíbrio de mercado:** $D(p) - S(p) = 0$ define p^* implicitamente em função de parâmetros de demanda e oferta.

24.11.3 Por que isso importa

Em todos esses casos, sabemos que **existe** uma relação $y = f(x)$ — no entorno de um equilíbrio — mesmo sem conseguir escrever f em forma fechada. A pergunta é: **quanto y varia quando x muda?**

Ou seja, queremos $f'(x)$, sem ter f . O **Teorema da Função Implícita** responde essa pergunta.

24.12 O Teorema da Função Implícita

24.12.1 Caso de uma Equação e Duas Variáveis

Enunciado. Seja $F : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ continuamente diferenciável em torno do ponto (y^*, x^*) e suponha que

$$F(y^*, x^*) = c \quad \text{e} \quad \frac{\partial F}{\partial y}(y^*, x^*) \neq 0.$$

Então existe uma vizinhança de x^* e uma única função f continuamente diferenciável tal que:

- $F(f(x), x) \equiv c$ — f resolve a relação implícita localmente;
- $y^* = f(x^*)$ — f passa pelo ponto de partida;
- $f'(x) = -\frac{\partial F / \partial x}{\partial F / \partial y}$.

A condição-chave é (c), que dá a derivada da função implícita **sem precisar isolar y** :

$$f'(x) = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y}.$$

24.12.2 Derivação

Partindo de $F(y, x) = c$ e diferenciando totalmente:

$$\frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial x} dx = 0.$$

Se $\partial F/\partial y \neq 0$, isolamos dy/dx :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y}.$$

Equivalentemente, partindo de $F(f(x), x) = c$ e derivando em x pela regra da cadeia:

$$\frac{\partial F}{\partial y} f'(x) + \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \implies f'(x) = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y}.$$

24.12.3 Exemplo: O Círculo Unitário

Considere $F(y, x) = x^2 + y^2 = 1$. As derivadas parciais são:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y.$$

Pela TFI, em qualquer ponto com $y \neq 0$ podemos escrever $y = f(x)$ localmente, com:

$$f'(x) = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}.$$

A relação não define y globalmente como função de x — para cada $x \in (-1, 1)$ existem **dois** valores de y , $y = \sqrt{1 - x^2}$ (semicírculo superior) e $y = -\sqrt{1 - x^2}$ (semicírculo inferior). Localmente, em cada ponto não-extremo, há uma das duas:

Ponto	y	TFI vale?	Função local
(0, 1)	$1 > 0$	Sim	$y = \sqrt{1 - x^2}$
(0, -1)	$-1 < 0$	Sim	$y = -\sqrt{1 - x^2}$
(1, 0)	0	Não	reta vertical, y não é função de x
(-1, 0)	0	Não	reta vertical, y não é função de x

Nos pontos extremos $(\pm 1, 0)$, o gradiente de F é horizontal (a tangente ao círculo é vertical), e nenhuma das duas funções locais é definível.

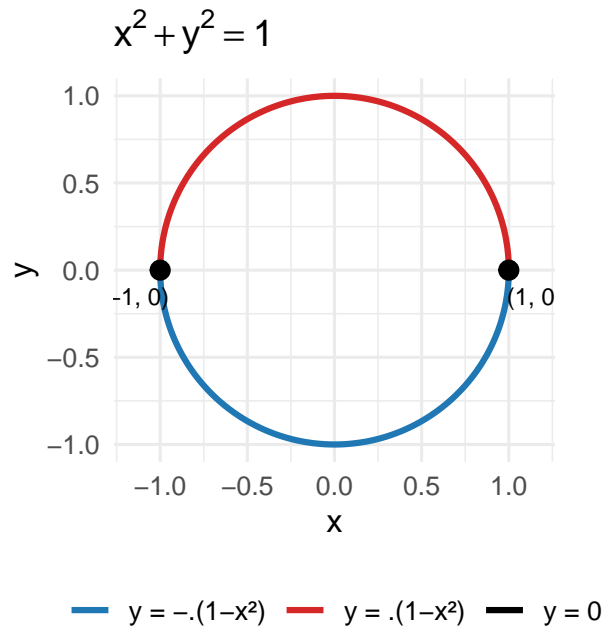


Figura 60: Círculo unitário $x^2 + y^2 = 1$. Em pontos com $y \neq 0$ (azul/vermelho), o TFI dá y como função local de x . Nos pontos $(\pm 1, 0)$ (preto), $\partial F / \partial y = 0$ e o teorema falha.

24.12.4 Aplicação Econômica: Taxa Marginal de Substituição (TMS)

Considere a utilidade Cobb-Douglas $U(x_1, x_2) = x_1^\alpha x_2^{1-\alpha}$ com $\alpha \in (0, 1)$. Uma curva de indiferença é o conjunto $U(x_1, x_2) = \bar{U}$. A questão econômica é: dado um deslocamento dx_1 , quanto x_2 precisa variar para manter a utilidade constante?

Tratando x_2 como endógena (ajustada para preservar \bar{U}) e x_1 como exógena, definimos $F(x_2, x_1) = x_1^\alpha x_2^{1-\alpha} - \bar{U}$. As derivadas parciais são:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = \alpha x_1^{\alpha-1} x_2^{1-\alpha}, \quad \frac{\partial F}{\partial x_2} = (1 - \alpha) x_1^\alpha x_2^{-\alpha}.$$

Pelo TFI:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = - \frac{\partial F / \partial x_1}{\partial F / \partial x_2} = - \frac{\alpha}{1 - \alpha} \frac{x_2}{x_1}.$$

Logo a taxa marginal de substituição é:

$$\boxed{\text{TMS} = - \frac{dx_2}{dx_1} = \frac{\alpha}{1 - \alpha} \frac{x_2}{x_1}.}$$

A TMS é decrescente ao longo da curva de indiferença (à medida que x_1 cresce, x_2 cai e a TMS se reduz), capturando a convexidade das preferências Cobb-Douglas.

Verificando computacionalmente em R, comparando a fórmula fechada com a TMS numérica via diferenciação implícita:

	x1	x2	TMS_formula	TMS_numerica
1	2	29.240	9.7467	9.7467
2	5	15.874	2.1165	2.1165
3	10	10.000	0.6667	0.6667
4	20	6.300	0.2100	0.2100

E em Python:

x1	x2	TMS (fórmula)	TMS (numérica)
2	29.240	9.7467	9.7467
5	15.874	2.1165	2.1165
10	10.000	0.6667	0.6667
20	6.300	0.2100	0.2100

A TMS analítica e a numérica coincidem até a precisão da diferença finita — confirmando o TFI sem necessidade de isolar x_2 como função de x_1 explicitamente.

24.12.5 Generalização: Várias Variáveis Exógenas

Enunciado. Seja $F(y, x_1, \dots, x_n)$ continuamente diferenciável em torno de $(y^*, x_1^*, \dots, x_n^*)$ e suponha que

$$F(y^*, x_1^*, \dots, x_n^*) = c \quad \text{e} \quad \frac{\partial F}{\partial y}(y^*, x_1^*, \dots, x_n^*) \neq 0.$$

Então existe uma vizinhança de (x_1^*, \dots, x_n^*) e uma única função g continuamente diferenciável tal que:

- (a) $F(g(x_1, \dots, x_n), x_1, \dots, x_n) \equiv c$;
- (b) $y^* = g(x_1^*, \dots, x_n^*)$;
- (c) $\frac{\partial g}{\partial x_i} = -\frac{\partial F / \partial x_i}{\partial F / \partial y}$, $i = 1, \dots, n$.

Em forma compacta, a fórmula das derivadas parciais é

$$\boxed{\frac{\partial g}{\partial x_i} = - \frac{\partial F / \partial x_i}{\partial F / \partial y}, \quad i = 1, \dots, n.}$$

A demonstração é análoga ao caso de duas variáveis: partindo de $F(g(x_1, \dots, x_n), x_1, \dots, x_n) = c$ e derivando em x_i pela regra da cadeia, mantendo x_j fixo para $j \neq i$:

$$\frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x_i} + \frac{\partial F}{\partial x_i} = 0.$$

24.13 Sistemas de Funções Implícitas

24.13.1 Generalização: m Endógenas e n Exógenas

A versão mais geral do TFI trata sistemas:

$$\begin{cases} F^1(y_1, \dots, y_m, x_1, \dots, x_n) = c_1, \\ \vdots \\ F^m(y_1, \dots, y_m, x_1, \dots, x_n) = c_m. \end{cases}$$

Hipótese chave (condição do Jacobiano): se a **matriz Jacobiana das endógenas**

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F^1}{\partial y_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F^m}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F^m}{\partial y_m} \end{pmatrix}$$

tem **determinante diferente de zero** ($|J| \neq 0$) num ponto que satisfaz o sistema, então localmente as endógenas y_i podem ser escritas como funções $g_i(x_1, \dots, x_n)$ das exógenas, e suas derivadas parciais satisfazem o sistema linear:

$$J \cdot \begin{pmatrix} \partial y_1 / \partial x_k \\ \vdots \\ \partial y_m / \partial x_k \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \partial F^1 / \partial x_k \\ \vdots \\ \partial F^m / \partial x_k \end{pmatrix}, \quad k = 1, \dots, n.$$

24.13.2 Solução via Cramer

O sistema acima é exatamente da forma $Ax = b$, com $A = J$ e $b = -(\partial F^i / \partial x_k)_i$. Quando $|J| \neq 0$, a regra de Cramer dá:

$$\boxed{\frac{\partial y_i}{\partial x_k} = \frac{|J_i|}{|J|}},$$

onde J_i é a matriz J com a i -ésima coluna substituída por $-(\partial F^j / \partial x_k)_j$.

Esta é a fórmula que torna o TFI a ferramenta universal de estática comparativa em Economia.

24.13.3 Aplicação Econômica: Estática Comparativa do IS/LM

Considere o modelo IS/LM com as funções gerais:

$$\begin{cases} \text{(IS):} & Y = C(Y - T) + I(r) + G, \\ \text{(LM):} & M(Y, r) = M^s, \end{cases}$$

com hipóteses de sinal:

- $0 < C'(\cdot) < 1$ (propensão marginal a consumir);
- $I'(r) < 0$ (investimento decresce com a taxa de juros);
- $M_Y \equiv \partial M / \partial Y > 0$ e $M_r \equiv \partial M / \partial r < 0$ (demanda por moeda).

Endógenas: Y, r . **Exógenas (parâmetros de política):** T, G, M^s .

Reescrevendo na forma $F^i = c_i$:

$$\begin{cases} F^1(Y, r; T, G) = Y - C(Y - T) - I(r) - G = 0, \\ F^2(Y, r; M^s) = M(Y, r) - M^s = 0. \end{cases}$$

24.13.3.1 Diferenciação Total

Diferenciando cada equação:

$$\begin{aligned} dY - C'(dY - dT) - I' dr - dG &= 0, \\ M_Y dY + M_r dr - dM^s &= 0, \end{aligned}$$

ou seja:

$$\begin{aligned} (1 - C') dY - I' dr &= -C' dT + dG, \\ M_Y dY + M_r dr &= dM^s. \end{aligned}$$

24.13.3.2 Forma Matricial

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 - C' & -I' \\ M_Y & M_r \end{pmatrix}}_J \begin{pmatrix} dY \\ dr \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -C' \\ 0 \end{pmatrix} dT + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} dG + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} dM^s.$$

24.13.3.3 Determinante do Jacobiano

$$|J| = (1 - C') M_r + I' M_Y.$$

Sob as hipóteses de sinal:

- $(1 - C') > 0$ e $M_r < 0$: primeiro termo < 0 ;
- $I' < 0$ e $M_Y > 0$: segundo termo < 0 ;

logo $|J| < 0$. (Os sinais coincidem com o que já vimos para a calibração linear: $|J|$ tem sinal estabelecido pelas hipóteses gerais, tornando a análise robusta a especificações não-lineares.)

24.13.3.4 Multiplicadores via Cramer

Fixando $dT = dM^s = 0$ e $dG \neq 0$ para isolar $\partial Y / \partial G$:

$$\frac{\partial Y}{\partial G} = \frac{1}{|J|} \begin{vmatrix} 1 & -I' \\ 0 & M_r \end{vmatrix} = \frac{M_r}{|J|} = \frac{(-)}{(-)} > 0.$$

$$\frac{\partial r}{\partial G} = \frac{1}{|J|} \begin{vmatrix} 1 - C' & 1 \\ M_Y & 0 \end{vmatrix} = \frac{-M_Y}{|J|} = \frac{(-)}{(-)} > 0.$$

Fixando $dG = dM^s = 0$ e $dT \neq 0$:

$$\frac{\partial Y}{\partial T} = \frac{1}{|J|} \begin{vmatrix} -C' & -I' \\ 0 & M_r \end{vmatrix} = \frac{-C' M_r}{|J|} = \frac{(+)(-)}{(-)} < 0.$$

Fixando $dT = dG = 0$ e $dM^s \neq 0$:

$$\frac{\partial Y}{\partial M^s} = \frac{1}{|J|} \begin{vmatrix} 0 & -I' \\ 1 & M_r \end{vmatrix} = \frac{I'}{|J|} = \frac{(-)}{(-)} > 0.$$

$$\frac{\partial r}{\partial M^s} = \frac{1}{|J|} \begin{vmatrix} 1 - C' & 0 \\ M_Y & 1 \end{vmatrix} = \frac{1 - C'}{|J|} = \frac{(+)}{(-)} < 0.$$

24.13.3.5 Síntese: Tabela de Sinais

Variação	Sinal	Interpretação
$\partial Y/\partial G$	> 0	Multiplicador fiscal (expansão fiscal eleva Y)
$\partial Y/\partial T$	< 0	Tributos contraem Y
$\partial Y/\partial M^s$	> 0	Expansão monetária eleva Y
$\partial r/\partial G$	> 0	Crowding-out: gasto público eleva juros
$\partial r/\partial M^s$	< 0	Expansão monetária reduz juros

Os sinais saem **somente das hipóteses qualitativas** sobre C', I', M_Y, M_r — não dependem da forma funcional específica de $C(\cdot), I(\cdot)$ ou $M(\cdot, \cdot)$. Esta é a essência da **estática comparativa**: ir do **equilíbrio inicial** ao **novo equilíbrio** após uma mudança paramétrica, captando o sinal (e às vezes a magnitude) da resposta sem resolver explicitamente o sistema.

24.13.3.6 Cálculo Numérico com Funções Não-Lineares

Para ilustrar o uso do TFI em modelos genuinamente não-lineares, calibramos:

- $C(z) = c_0 + c_1z + c_2\sqrt{z}$ (consumo côncavo);
- $I(r) = I_0 e^{-br}$ (investimento decrescente convexo);
- $M(Y, r) = m_1Y - m_2r$ (demanda por moeda linear, para simplificar).

O equilíbrio (Y^*, r^*) é encontrado numericamente, e os multiplicadores saem pela TFI aplicada **no equilíbrio** — a Jacobiana é avaliada usando os valores de C', I', M_Y, M_r nesse ponto.

Em R:

```
Equilíbrio: Y* = 677.04, r* = 1.1926
```

```
|J| = -48.7996 (esperado: < 0)
```

	Multiplicador	Valor	Sinal_Esperado
1	Y/ G	2.0492	+
2	r/ G	0.0051	+
3	Y/ T	-1.2379	-
4	r/ T	-0.0031	-
5	Y/ Ms	0.7547	+
6	r/ Ms	-0.0081	-

E em Python:

```
Equilíbrio: Y* = 677.04, r* = 1.1926
```

```
|J| = -48.7996 (esperado: < 0)
```

	Multiplicador	Valor	Sinal
--	---------------	-------	-------

Y/ G	2.0492	+
r/ G	0.0051	+
Y/ T	-1.2379	-
r/ T	-0.0031	-
Y/ Ms	0.7547	+
r/ Ms	-0.0081	-

Os sinais numéricos confirmam exatamente as previsões teóricas — independentemente da forma funcional de C , I ou M , desde que as **hipóteses de sinal** ($0 < C' < 1$, $I' < 0$, $M_Y > 0$, $M_r < 0$) sejam respeitadas. Esta é a essência da estática comparativa via TFI: **resultados qualitativos robustos** que sobrevivem a mudanças de especificação do modelo.

25 Álgebra Linear

25.1 Motivação Econômica

A Álgebra Linear é a linguagem natural de uma boa parte da Economia moderna — sempre que o problema envolve **vários objetos relacionados de forma linear**, ela aparece:

- **Sistemas lineares e equilíbrio:** o modelo de Leontief de insumo-produto, $(I - A)x = d$, descreve a produção de n setores que se demandam mutuamente; encontrar x exige resolver um sistema linear, e a existência de solução econômica não-negativa depende de propriedades espectrais da matriz A .
- **Estática comparativa:** ao diferenciar implicitamente um sistema de equações de equilíbrio em torno de um ponto, obtém-se um sistema linear nas variações dos endógenos. A **regra de Cramer** fornece os sinais das respostas em termos de razões de determinantes — ferramenta central no apêndice matemático de Mas-Colell, Whinston e Green.
- **Otimização:** as condições de segunda ordem em problemas com várias variáveis exigem analisar o sinal da **matriz Hessiana** via seus **menores principais** (determinantes), ou equivalentemente via seus **autovalores**. Toda a teoria de otimização côncava/convexa em Economia repousa sobre formas quadráticas.
- **Dinâmica:** em sistemas dinâmicos lineares — $x_{t+1} = Ax_t$ no caso discreto, $\dot{x} = Ax$ no contínuo — a estabilidade do equilíbrio é determinada pelos **autovalores** de A . Modelos de crescimento, ciclos de negócios e VARs em macroeconometria são todos analisados desta forma.
- **Identificação econométrica:** estimar coeficientes em $y = X\beta + \varepsilon$ exige que $X^\top X$ seja **não-singular** (determinante diferente de zero), condição equivalente à ausência de colinearidade perfeita entre regressores.

Neste capítulo desenvolvemos os blocos básicos: **determinantes, matrizes** (operações e inversão), **sistemas lineares** (regra de Cramer), **autovalores e autovetores**, e **formas quadráticas** — seguindo Shilov (Cap. 1) para a parte axiomática e Madala / Simon-Blume para o tratamento operacional.

25.2 Introdução

Uma **matriz** é um arranjo retangular de números organizados em linhas e colunas:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Diz-se que A é uma matriz $m \times n$ — m linhas e n colunas. Quando $m = n$, A é **quadrada de ordem n** .

Podemos ver matrizes de pelo menos três modos, todos úteis em Economia:

1. **Tabela de coeficientes** de um sistema linear $Ax = b$;
2. **Operador linear** $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, com $T(x) = Ax$;
3. **Lista organizada** de vetores (linhas ou colunas).

Dependendo do contexto, é mais útil pensar em uma ou outra interpretação. Por exemplo, ao discutir multilinearidade em econometria, pensamos nas colunas de X como vetores; ao calcular a Hessiana de uma função, pensamos na matriz como um operador que mede curvatura.

Começamos pelo **determinante** — um número associado a cada matriz quadrada que codifica boa parte de suas propriedades estruturais.

25.3 Determinantes

25.3.1 Definição Informal

A cada matriz **quadrada** A podemos associar um número real, o seu **determinante**, denotado por $\det A$ ou $|A|$. Para uma matriz 2×2 :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad |A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Inspicionando essa fórmula, três fatos saltam aos olhos — e são, na verdade, os ingredientes estruturais que generalizam o conceito para qualquer ordem n :

1. $|A|$ é uma **soma de termos**, cada um deles um **produto** de elementos da matriz;
2. cada termo possui exatamente **um elemento de cada linha e um de cada coluna**, sem repetir;
3. cada termo é precedido de um **sinal** (+ ou $-$) determinado por uma regra precisa.

A questão é: quantos termos há, quais são, e qual é a regra dos sinais?

25.3.2 Contagem dos Termos

Em uma matriz $n \times n$, escolher um termo significa selecionar **um elemento por linha**, sob a restrição de que **cada coluna seja usada exatamente uma vez**. Para a primeira linha, temos n escolhas; para a segunda, $n - 1$; e assim por diante. O total é:

$$n \cdot (n - 1) \cdots 2 \cdot 1 = n!.$$

n	$n!$ termos
2	2
3	6
4	24
5	120

$$\frac{\quad}{\quad} \frac{n}{n!} \text{ termos}$$

Cada termo corresponde a uma **permutação** $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ dos índices $\{1, 2, \dots, n\}$: o elemento escolhido na coluna j vem da linha σ_j . O termo é, portanto, $a_{\sigma_1,1} a_{\sigma_2,2} \cdots a_{\sigma_n,n}$.

25.3.3 A Regra dos Sinais: Inversões

Resta saber qual é o sinal de cada termo. A regra é a seguinte: contamos o **número de inversões** $N(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ da permutação — ou seja, o número de pares (i, j) com $i < j$ tais que $\sigma_i > \sigma_j$ (a ordem está “trocada”). O sinal do termo é $(-1)^{N(\sigma_1, \dots, \sigma_n)}$.

Permutações com **0 inversões** (ordem natural $1 < 2 < \dots < n$) entram com sinal +; permutações com 1 inversão entram com –; com 2 inversões, +; e assim por diante.

25.3.4 Definição Formal

Reunindo os três ingredientes, obtemos a definição geral:

$$|A| = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{N(\sigma_1, \dots, \sigma_n)} a_{\sigma_1,1} a_{\sigma_2,2} \cdots a_{\sigma_n,n}$$

onde a soma percorre as $n!$ permutações σ do conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$.

25.3.5 Caso $n = 3$: Enumerando as Permutações

Para $n = 3$ há $3! = 6$ permutações:

$\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$	$N(\sigma)$	Sinal	Termo
(1, 2, 3)	0	+	$a_{11} a_{22} a_{33}$
(1, 3, 2)	1	–	$a_{11} a_{32} a_{23}$
(2, 1, 3)	1	–	$a_{21} a_{12} a_{33}$
(2, 3, 1)	2	+	$a_{21} a_{32} a_{13}$
(3, 1, 2)	2	+	$a_{31} a_{12} a_{23}$
(3, 2, 1)	3	–	$a_{31} a_{22} a_{13}$

Somando os seis termos com seus sinais:

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

25.3.6 Regra de Sarrus ($n = 3$)

A fórmula acima admite uma mnemônica gráfica conhecida como **regra de Sarrus**: repetimos as duas primeiras colunas à direita da matriz e somamos os produtos das três “diagonais descendentes” (sinal +) subtraindo os produtos das três “diagonais ascendentes” (sinal -):

$$\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

$$|A| = \underbrace{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}}_{\text{diagonais descendentes}} - \underbrace{a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}}_{\text{diagonais ascendentes}}.$$

Atenção: Sarrus funciona **apenas para** $n = 3$ (e, com adaptações, para $n = 2$). Para $n \geq 4$ é necessário usar a definição geral por permutações ou — mais usualmente — a expansão de Laplace por cofatores (que veremos adiante).

25.3.7 Exemplo Numérico

Calculemos o determinante de

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

por Sarrus:

$$\begin{aligned} |A| &= 2 \cdot 4 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) \cdot 5 + 3 \cdot 0 \cdot 2 - 3 \cdot 4 \cdot 5 - 2 \cdot (-1) \cdot 2 - 1 \cdot 0 \cdot 1 \\ &= 8 - 5 + 0 - 60 + 4 - 0 \\ &= -53. \end{aligned}$$

Confirmando computacionalmente em R:

```
[1] -53
```

E em Python (`numpy.linalg.det`):

```
np.float64(-52.999999999999986)
```

Observação numérica. `np.linalg.det` retorna $-53.0000\dots$ com pequena imprecisão de ponto flutuante (típica em fatorações LU). Para verificar igualdade exata, use `round(...)` ou compare com tolerância (`np.isclose`).

25.3.8 Propriedades

Listamos as propriedades fundamentais do determinante. Todas seguem diretamente da definição via permutações; as demonstrações estão em Shilov (Cap. 1).

25.3.8.1 P1. Determinante da Transposta

$$\boxed{|A^T| = |A|}.$$

Consequência: toda propriedade enunciada em termos de **linhas** vale também para **colunas**, e vice-versa. Não há assimetria entre linhas e colunas no determinante.

Esboço da ideia: a transposição troca os papéis de linha e coluna em cada termo da soma; pode-se mostrar que o número de inversões da permutação correspondente é o mesmo, preservando todos os sinais.

25.3.8.2 P2. Troca de Duas Linhas (ou Colunas) Inverte o Sinal

Se \tilde{A} resulta de A pela troca de duas linhas (ou duas colunas) — adjacentes ou não —, então:

$$\boxed{|\tilde{A}| = -|A|}.$$

Por quê: trocar duas linhas equivale a aplicar uma transposição na permutação que indexa cada termo. Uma transposição (mesmo entre posições não-adjacentes) altera a paridade do número de inversões — pode-se decompor qualquer transposição como um número ímpar de transposições adjacentes —, portanto inverte o sinal de cada termo da soma, invertendo o sinal do determinante.

25.3.8.3 P3. Linhas (ou Colunas) Iguais Anulam o Determinante

Se A tem duas linhas iguais (ou duas colunas iguais), então:

$$\boxed{|A| = 0}.$$

Por quê: trocando as duas linhas iguais, a matriz não se altera, mas pela P2 o determinante muda de sinal. Logo $|A| = -|A|$, de onde $|A| = 0$.

Generalização (visto adiante): a propriedade vale, mais geralmente, para linhas (ou colunas) **linearmente dependentes** — daí a equivalência entre $|A| = 0$ e a singularidade de A .

25.3.8.4 P4. Multilinearidade

O determinante é **linear em cada linha (ou coluna) separadamente**, mantendo as demais fixas. Em particular, se uma das colunas é uma combinação linear $\lambda b + \mu c$ — onde b e c são vetores-coluna —, então:

$$|A| = \lambda |A_1| + \mu |A_2|,$$

em que A_1 e A_2 são as matrizes obtidas substituindo a coluna em questão por b e c , respectivamente, mantendo as demais colunas inalteradas.

Em forma matricial, suponha que a j -ésima coluna de A é $\lambda b + \mu c$ e as demais colunas são $a_1, \dots, a_{j-1}, a_{j+1}, \dots, a_n$. Então:

$$|a_1, \dots, \lambda b + \mu c, \dots, a_n| = \lambda |a_1, \dots, b, \dots, a_n| + \mu |a_1, \dots, c, \dots, a_n|.$$

25.3.8.5 P5. Multiplicação de Toda a Matriz por um Escalar

Multiplicar **todos** os elementos de A por λ equivale a multiplicar **cada uma das n linhas** por λ . Como o determinante é linear em cada linha (P4), saem n fatores λ :

$$|\lambda A| = \lambda^n |A|,$$

onde n é a ordem da matriz.

Cuidado. Diferentemente do caso escalar, $|\lambda A| \neq \lambda |A|$. O fator λ^n é uma armadilha frequente.

25.3.8.6 Corolário. Linha (ou Coluna) de Zeros

Se alguma linha (ou coluna) de A é identicamente nula, então

$$|A| = 0.$$

Por quê: tomando $\lambda = 0$ em P4, fatoramos o 0 para fora dessa linha (ou coluna), restando $0 \cdot |A'| = 0$. Equivalentemente, todo termo da definição via permutações contém exatamente um fator de cada linha — incluindo a linha nula —, e portanto é zero.

25.3.8.7 P6. Adicionar a uma Linha (ou Coluna) um Múltiplo de Outra Não Altera o Determinante

Se \tilde{A} resulta de A ao somar a uma linha (ou coluna) um múltiplo escalar de outra linha (ou coluna) **distinta**, então:

$$|\tilde{A}| = |A|.$$

Por quê: pela multilinearidade (P4), o determinante de \tilde{A} se decompõe em $|A| + \lambda|A_1|$, onde A_1 tem duas linhas (ou colunas) iguais. Por P3, $|A_1| = 0$, e portanto $|\tilde{A}| = |A|$.

Importância prática: esta é a propriedade que justifica o **escalonamento** (eliminação de Gauss) como método para calcular determinantes — fazemos operações de linha que não alteram $|A|$ até obter uma matriz triangular, cujo determinante é o produto dos elementos da diagonal.

25.3.9 Síntese das Propriedades

Operação na matriz	Efeito no determinante
Transpor	$ A^T = A $
Trocar duas linhas/colunas	Sinal trocado: $- A $
Duas linhas/colunas iguais	$ A = 0$
Linha/coluna de zeros	$ A = 0$
Multiplicar uma linha/coluna por λ	$\lambda A $
Multiplicar toda a matriz por λ	$\lambda^n A $
Somar a uma linha/coluna um múltiplo de outra	$ A $ inalterado

25.3.10 Aplicação: Cálculo Eficiente via Escalonamento

Para matrizes de ordem maior, a definição via permutações é inviável ($n!$ cresce muito rápido). A combinação P2 + P6 sugere o método prático:

1. Use operações elementares (P6) para zerar elementos abaixo da diagonal — sem alterar o determinante;
2. A cada troca de linhas (P2), troque o sinal acumulado;
3. Ao chegar em uma matriz **triangular**, $|A|$ é simplesmente o produto dos elementos da diagonal (todas as permutações exceto a identidade têm pelo menos um fator nulo).

Implementado em qualquer biblioteca numérica (`det()` em R, `numpy.linalg.det` em Python), este algoritmo tem custo $O(n^3)$ — substancialmente melhor que o $O(n!)$ da definição direta.

Tabela 1: Custo do cálculo do determinante: definição vs. escalonamento

	n	$n!$ (definição)	n^3 (escalonamento)
1	3	6.000000e+00	27
2	5	1.200000e+02	125
3	10	3.628800e+06	1000
4	20	2.432902e+18	8000

25.3.11 Expansão de Laplace por Cofatores

A definição via permutações e a regra de Sarrus calculam o determinante para qualquer matriz quadrada, mas têm limitações: Sarrus só serve para $n = 3$, e enumerar $n!$ permutações é inviável para $n \geq 4$. A **expansão de Laplace** é uma fórmula recursiva que reduz o cálculo de um determinante de ordem n a n determinantes de ordem $n - 1$ — útil tanto computacionalmente quanto como ferramenta teórica para derivar a regra de Cramer e a fórmula da inversa.

25.3.11.1 Menor e Cofator

Dada uma matriz A de ordem n , o **menor** M_{ij} é o determinante da matriz $(n - 1) \times (n - 1)$ obtida ao **excluir a linha i e a coluna j** de A :

$$M_{ij} = \det(\text{submatriz de } A \text{ removendo linha } i \text{ e coluna } j).$$

O **cofator** A_{ij} é o menor com sinal:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

O sinal $(-1)^{i+j}$ alterna conforme um padrão de tabuleiro de xadrez:

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ + & - & + & - & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Note que A_{ij} é um **número** (o cofator), não uma submatriz.

25.3.11.2 Fórmula da Expansão

O determinante pode ser expandido **ao longo de qualquer linha i fixa**:

$$|A| = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij}, \quad i \in \{1, \dots, n\}.$$

Equivalentemente, **ao longo de qualquer coluna j fixa**:

$$|A| = \sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ij}, \quad j \in \{1, \dots, n\}.$$

Pela P1 ($|A^\top| = |A|$), as duas expansões coincidem.

25.3.11.3 Caso $n = 2$: Recuperando a Fórmula Conhecida

Expandindo pela primeira linha:

$$|A| = a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} = a_{11} M_{11} - a_{12} M_{12} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}.$$

Aqui $M_{11} = a_{22}$ e $M_{12} = a_{21}$ — determinantes de matrizes 1×1 , que são apenas seus únicos elementos.

25.3.11.4 Caso $n = 3$: Expansão pela Primeira Coluna

$$|A| = a_{11} A_{11} + a_{21} A_{21} + a_{31} A_{31},$$

onde:

$$A_{11} = + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22} a_{33} - a_{32} a_{23},$$

$$A_{21} = - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -(a_{12} a_{33} - a_{32} a_{13}),$$

$$A_{31} = + \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = a_{12} a_{23} - a_{22} a_{13}.$$

Substituindo e expandindo, recupera-se a mesma fórmula obtida via permutações.

25.3.11.5 Estratégia: Linha ou Coluna com Mais Zeros

Cada zero na linha (ou coluna) escolhida **anula** o termo correspondente na expansão. Na prática, escolha sempre a linha ou coluna com o **maior número de zeros** — o cálculo cai linearmente com o número de zeros.

25.3.11.6 Exemplo: Mesmo Determinante, Por Laplace

Calculemos novamente $|A|$ para

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

expandindo pela **primeira coluna** (que tem um zero):

$$|A| = 2 \cdot A_{11} + 0 \cdot A_{21} + 5 \cdot A_{31},$$

onde:

$$A_{11} = + \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 \cdot 1 - 2 \cdot (-1) = 6,$$

$$A_{31} = + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) - 4 \cdot 3 = -13.$$

(O cofator A_{21} aparece multiplicado por 0, então não precisa ser calculado.)

$$|A| = 2 \cdot 6 + 5 \cdot (-13) = 12 - 65 = -53.$$

Bate com o resultado obtido por Sarrus.

25.3.11.7 Determinante de Matriz Triangular

Uma matriz é **triangular superior** se $a_{ij} = 0$ para $i > j$ (zeros abaixo da diagonal); analogamente para triangular inferior. Para qualquer matriz triangular,

$$|A| = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn},$$

ou seja, o determinante é o **produto dos elementos da diagonal principal**.

Demonstração por indução via Laplace. Considere A triangular superior de ordem n . Expandindo pela primeira coluna, todos os elementos abaixo de a_{11} são nulos, restando

$$|A| = a_{11} \cdot M_{11},$$

onde M_{11} é o determinante da submatriz $(n-1) \times (n-1)$ obtida ao remover a primeira linha e a primeira coluna — que continua triangular superior. Aplicando a mesma redução recursivamente,

$$|A| = a_{11} a_{22} M_{11}^{(2)} = a_{11} a_{22} a_{33} M_{11}^{(3)} = \cdots = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}.$$

O caso triangular inferior segue por P1 (transposta).

Por que isso importa. Esta é a justificativa rigorosa do método de escalonamento descrito na seção anterior: as operações P6 transformam A em triangular sem alterar $|A|$, eventuais trocas de linhas (P2) apenas invertem o sinal acumulado, e a fórmula acima fecha o cálculo em $O(n^3)$.

25.3.11.8 Determinante de Vandermonde

Dados n números x_1, x_2, \dots, x_n , a **matriz de Vandermonde** é

$$V(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Seu determinante admite a fórmula fechada

$$|V(x_1, \dots, x_n)| = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

Esboço da demonstração (argumento polinomial). Encare $|V|$ como polinômio nas variáveis x_1, \dots, x_n . Se $x_i = x_j$ para algum par $i \neq j$, então duas linhas de V são iguais e $|V| = 0$ por P3. Logo, $(x_j - x_i)$ divide o polinômio $|V|$ para cada par $i < j$. O produto $\prod_{i < j} (x_j - x_i)$ tem grau total $\binom{n}{2}$ — exatamente o grau total de $|V|$ visto como polinômio nas n variáveis — e o mesmo coeficiente líder (verificado pela permutação identidade na definição). Portanto, os dois polinômios coincidem.

Corolário (não-singularidade). $|V| \neq 0$ se, e somente se, os pontos x_1, \dots, x_n são **dois a dois distintos**.

Aplicação: interpolação polinomial. Encontrar um polinômio $p(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_{n-1}x^{n-1}$ que passe por n pontos $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ equivale a resolver o sistema linear $Vc = y$. O corolário acima garante que, com abscissas distintas, esse sistema tem **solução única** — existe um único polinômio de grau $\leq n - 1$ interpolando os dados. É a base teórica de quadraturas, splines e do encaixe de séries históricas em modelos econométricos paramétricos.

25.3.11.9 Relação de Ortogonalidade

Há uma identidade adicional, fundamental para a regra de Cramer e para a fórmula da matriz inversa: se substituirmos os elementos da linha i pelos cofatores de uma linha **diferente** $k \neq i$, a soma é zero:

$$\sum_{j=1}^n a_{kj} A_{ij} = 0 \quad \text{para } k \neq i.$$

A intuição é direta: essa soma é o determinante de uma matriz em que a linha i foi **substituída** pela linha k — uma matriz com duas linhas iguais, que tem determinante nulo (P3).

Combinando com a expansão de Laplace, podemos resumir as duas identidades em uma só:

$$\sum_{j=1}^n a_{kj} A_{ij} = |A| \delta_{ki}, \quad \text{onde } \delta_{ki} = \begin{cases} 1, & k = i, \\ 0, & k \neq i. \end{cases}$$

Esta é a chave da derivação da **regra de Cramer**, na próxima seção.

25.3.12 Interpretação Geométrica (Adiantamento)

Embora o determinante seja definido algebricamente, ele tem um significado geométrico claro que reaparecerá adiante: $|A|$ é o **fator pelo qual a transformação linear** $x \mapsto Ax$ **multiplica volumes** em \mathbb{R}^n , com sinal indicando se a orientação é preservada (+) ou invertida (-). Em particular:

- $|A| = 0$ a imagem de A é um subespaço de dimensão estritamente menor que n — A é **singular** (não-invertível);
- $|A| \neq 0$ — A é **invertível** — o sistema $Ax = b$ tem solução única para todo b .

Esta caracterização é o elo entre determinantes e sistemas lineares, que tratamos a seguir.

25.4 Sistemas Lineares e Regra de Cramer

25.4.1 Motivação

Modelos econômicos frequentemente formulam-se como **sistemas de equações simultâneas**: a determinação de equilíbrio em n mercados, a alocação setorial num modelo de Leontief, a estática comparativa em torno de um equilíbrio diferenciável. Quando essas equações são lineares (ou linearizadas), obtemos um **sistema linear**:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases}$$

ou, compactamente:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

25.4.2 Forma Matricial

Definindo

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

o sistema reescreve-se como uma única equação matricial:

$$\boxed{Ax = b.}$$

A matriz A é a **matriz dos coeficientes**, x é o vetor de incógnitas e b é o vetor dos termos independentes.

25.4.3 Classificação

A relação entre $|A|$ e a estrutura da solução permite classificar todo sistema linear $n \times n$ em três categorias:

Caso	Determinante	Solução
Possível Determinado (PD)	$ A \neq 0$	Solução única
Possível Indeterminado (PI)	$ A = 0$ e sistema compatível	Infinitas soluções
Impossível	$ A = 0$ e sistema incompatível	Sem solução

25.4.3.1 Possível Determinado

$$\begin{cases} x + y = 10, \\ 2y = 6. \end{cases}$$

A matriz dos coeficientes é

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad |A| = 2 \neq 0.$$

A segunda equação dá $y = 3$, e a primeira dá $x = 7$ — solução única em $(x, y) = (7, 3)$. Geometricamente, duas retas que se cruzam num único ponto.

25.4.3.2 Possível Indeterminado

$$\begin{cases} x - y = 0, \\ 2x - 2y = 0. \end{cases}$$

A segunda equação é o dobro da primeira: ambas equivalem a $x = y$. A matriz dos coeficientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad |A| = -2 + 2 = 0.$$

Toda combinação (t, t) , $t \in \mathbb{R}$, é solução — uma reta inteira de soluções (as duas equações descrevem a **mesma reta**).

25.4.3.3 Impossível

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ x + y = 2. \end{cases}$$

A mesma combinação $x + y$ não pode valer 1 e 2 simultaneamente. Geometricamente, são **retas paralelas** que nunca se cruzam. A matriz A tem $|A| = 0$, mas o sistema é inconsistente — não há solução.

25.4.4 Sistema Homogêneo

Um sistema $Ax = b$ é **homogêneo** quando $b = 0$:

$$Ax = 0.$$

Sistemas homogêneos sempre admitem a **solução trivial** $x = 0$. A questão é se admitem outras:

- $|A| \neq 0$: apenas a solução trivial $x = 0$;
- $|A| = 0$: além da trivial, **infinitas soluções não-triviais**.

A interpretação geométrica é direta: $|A| = 0$ significa que as colunas de A são linearmente dependentes, e portanto há combinações lineares não-triviais delas que dão zero — exatamente as soluções não-triviais de $Ax = 0$.

Importância em Economia. Soluções não-triviais de sistemas homogêneos aparecem na busca por **autovetores** de uma matriz, $Av = \lambda v \Leftrightarrow (A - \lambda I)v = 0$, e no estudo de **espaços de soluções** de modelos com restrições redundantes.

25.4.5 Regra de Cramer

Quando $|A| \neq 0$, há uma fórmula explícita para cada componente da solução:

$$x_k = \frac{|A_k|}{|A|}, \quad k = 1, \dots, n,$$

onde A_k é a matriz obtida **substituindo a k -ésima coluna de A pelo vetor b** , mantendo as demais colunas inalteradas.

25.4.5.1 Derivação

Multiplique a i -ésima equação por A_{ik} (cofator do elemento a_{ij}) e some sobre i :

$$\sum_{i=1}^n A_{ik} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = \sum_{i=1}^n A_{ik} b_i.$$

Trocando a ordem das somas do lado esquerdo:

$$\sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ik} \right) x_j = \sum_{i=1}^n A_{ik} b_i.$$

A relação de ortogonalidade dos cofatores diz que $\sum_i a_{ij} A_{ik} = |A|$ se $j = k$ e 0 caso contrário. Assim, do lado esquerdo só sobrevive o termo $j = k$:

$$|A| x_k = \sum_{i=1}^n A_{ik} b_i.$$

A soma à direita é precisamente a expansão de Laplace de $|A_k|$ pela k -ésima coluna (que agora é b). Portanto:

$$x_k = \frac{|A_k|}{|A|}.$$

25.4.6 Exemplo Numérico

Resolvamos o sistema

$$\begin{cases} x + 2y + z = 8, \\ 2x - y + z = 3, \\ 3x + y - z = 2. \end{cases}$$

Em forma matricial:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Pela regra de Sarrus:

$$|A| = (1)(-1)(-1) + (2)(1)(3) + (1)(2)(1) - (1)(-1)(3) - (1)(1)(1) - (2)(2)(-1) = 1 + 6 + 2 + 3 - 1 + 4 = 15.$$

Construímos A_1, A_2, A_3 substituindo as colunas 1, 2 e 3 por b , respectivamente:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calculando os determinantes:

$$|A_1| = 15, \quad |A_2| = 30, \quad |A_3| = 45.$$

Portanto:

$$x = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{15}{15} = 1, \quad y = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{30}{15} = 2, \quad z = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{45}{15} = 3.$$

Verificação:

$$1 + 2(2) + 3 = 8 \quad \checkmark$$

$$2(1) - 2 + 3 = 3 \quad \checkmark$$

$$3(1) + 2 - 3 = 2 \quad \checkmark$$

Computacionalmente, em R:

```
[1] 1 2 3
```

E em Python:

```
array([1., 2., 3.])
```

Tanto `solve()` quanto `np.linalg.solve` resolvem o sistema diretamente via fatoração LU — bem mais eficiente que aplicar a regra de Cramer manualmente. Cramer fica reservado para análise teórica (sinais em estática comparativa) e para sistemas pequenos a mão.

25.4.7 Quando Usar Cramer?

A regra de Cramer é teoricamente elegante e indispensável para análise de sinais em estática comparativa (onde tipicamente queremos saber o **sinal** das variações sem necessariamente computá-las). Computacionalmente, porém, ela tem custo $O(n!)$ ou $O(n \cdot n^3) = O(n^4)$ pela expansão de Laplace, ambos piores que o $O(n^3)$ da eliminação de Gauss. Para n grande, prefira `solve()` no R ou `numpy.linalg.solve` no Python — ambos usam fatoração LU sob o capô.

25.4.8 Aplicação Econômica: Modelo de Insumo-Produto de Leontief

O **modelo de Leontief** descreve uma economia em que cada setor consome insumos dos demais para produzir. Considere uma economia simplificada com 3 setores — **agricultura** (A), **indústria** (I) e **serviços** (S) — e seja t_{ij} a quantidade do produto do setor i necessária para produzir uma unidade monetária do setor j . A **matriz de coeficientes técnicos** é:

$$T = \begin{pmatrix} 0,10 & 0,20 & 0,10 \\ 0,30 & 0,20 & 0,20 \\ 0,10 & 0,30 & 0,20 \end{pmatrix}.$$

Lendo a coluna 2: para produzir R\$ 1{,}00 de **indústria**, são necessários R\$ 0{,}20 de agricultura, R\$ 0{,}20 de indústria (insumos intermediários do próprio setor) e R\$ 0{,}30 de serviços.

Dado um vetor de **demanda final** $d = (d_A, d_I, d_S)^\top$ (consumo das famílias, governo, exportações líquidas), a produção total $x = (x_A, x_I, x_S)^\top$ deve atender simultaneamente à demanda final e aos requisitos de insumos intermediários Tx :

$$x = Tx + d \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{(I - T)x = d.}$$

A matriz $I - T$ é a **matriz de Leontief**. Para que o sistema tenha solução única e econômica ($x \geq 0$ para todo $d \geq 0$), exige-se $|I - T| \neq 0$ (condição de Hawkins-Simon, em geral satisfeita em economias bem comportadas).

Suponha demanda final $d = (100, 80, 90)^\top$ (em milhões de reais). Calculemos a produção total em R:

[1] 0.453

	A	I	S
	185.4305	224.5033	219.8675

E em Python:

```
det(L) = 0.453
```

```
x = [185.43 224.5 219.87]
```

A produção total **excede** a demanda final em cada setor — o excesso é o que circula como insumos intermediários entre os setores. A matriz $(I - T)^{-1}$, conhecida como **matriz inversa de Leontief**, fornece os **multiplicadores setoriais**: a entrada (i, j) indica a produção total de i requerida para entregar uma unidade adicional de demanda final em j (efeitos diretos + indiretos via insumos intermediários).

	A	I	S
A	1.2803532	0.4194260	0.2649007
I	0.5739514	1.5673289	0.4635762
S	0.3752759	0.6401766	1.4569536

25.4.9 Aplicação Econômica: Equilíbrio IS-LM e Estática Comparativa

Considere o modelo IS-LM em forma reduzida, com produto Y e taxa de juros r como endógenos. As equações de equilíbrio são:

$$\begin{cases} \text{(IS)} & (1 - c_1)Y + br = A_0, \\ \text{(LM)} & -m_1Y + m_2r = -\frac{M^*}{P}, \end{cases}$$

onde c_1 é a propensão marginal a consumir, $b > 0$ a sensibilidade do investimento à taxa de juros, $m_1, m_2 > 0$ a sensibilidade da demanda por moeda à renda e à taxa de juros, $A_0 = c_0 - c_1T_0 + I_0 + G$ o gasto autônomo, M^* a oferta nominal de moeda e P o nível de preços.

Em forma matricial:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 - c_1 & b \\ -m_1 & m_2 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} Y \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_0 \\ -M^*/P \end{pmatrix}.$$

O determinante é

$$|A| = (1 - c_1)m_2 + bm_1 > 0,$$

estritamente positivo sob hipóteses econômicas usuais — portanto o equilíbrio é **único**. Pela regra de Cramer:

$$Y^* = \frac{m_2 A_0 + b(M^*/P)}{|A|}, \quad r^* = \frac{m_1 A_0 - (1 - c_1)(M^*/P)}{|A|}.$$

25.4.9.1 Multiplicadores: o Poder da Estática Comparativa

A grande vantagem de Cramer aqui é que **diferenciar parcialmente em relação aos parâmetros** dá os multiplicadores macroeconômicos diretamente:

Multiplicador	Expressão	Sinal
Fiscal: $\partial Y^*/\partial G$	$m_2/ A $	> 0
Monetário: $\partial Y^*/\partial(M^*/P)$	$b/ A $	> 0
Crowding-out: $\partial r^*/\partial G$	$m_1/ A $	> 0
Juros via moeda: $\partial r^*/\partial(M^*/P)$	$-(1 - c_1)/ A $	< 0

Os sinais reproduzem exatamente os resultados qualitativos do livro-texto: expansão fiscal eleva Y e r (com crowding-out parcial); expansão monetária eleva Y e reduz r . O ponto importante é que esses sinais **não exigem valores numéricos** — saem diretamente da álgebra dos sinais dos cofatores.

25.4.9.2 Calibração e Equilíbrio Numérico

Calibrando com valores típicos de livro-texto ($c_1 = 0,6$, $b = 200$, $m_1 = 0,25$, $m_2 = 100$, $A_0 = 1\,200$, $M^*/P = 600$):

```

      Y*           r*
2666.6666667    0.6666667

```

```

      Y/ G      Y/ (M/P)      r/ G      r/ (M/P)
1.111111111    2.222222222    0.002777778  -0.004444444

```

E em Python:

```
Y* = 2666.67, r* = 0.6667
```

```
|A| = 90.00
```

```
Multiplicador fiscal:   Y/ G      = 1.1111
```

```
Multiplicador monetário: Y/ (M/P) = 2.2222
```

```
Crowding-out:          r/ G      = 0.0028
```

```
Juros via moeda:       r/ (M/P)  = -0.0044
```

Esta é a essência da **estática comparativa** em macroeconomia: a regra de Cramer fornece tanto os sinais qualitativos (válidos sob hipóteses gerais) quanto as magnitudes numéricas (uma vez calibrados os parâmetros).

25.5 Operações com Matrizes

Antes de avançar para inversão e autovalores, é útil consolidar as operações fundamentais sobre matrizes — soma, produto e transposta — e algumas de suas propriedades algébricas.

25.5.1 Tipos de Matriz

Antes de operar com matrizes, vale catalogar as principais classes que aparecem na prática. Uma matriz $A_{m \times n}$ é caracterizada pela relação entre suas dimensões e pelo padrão de seus elementos:

Nome	Definição	Exemplo
Vetor coluna	$A_{m \times 1}$ — uma única coluna	$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$
Vetor linha	$A_{1 \times n}$ — uma única linha	$(a_1 \ \cdots \ a_n)$
Quadrada	$m = n$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$
Diagonal	quadrada com $a_{ij} = 0$ se $i \neq j$	$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$
Triangular superior	quadrada com $a_{ij} = 0$ se $i > j$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$
Simétrica	quadrada com $a_{ij} = a_{ji}$, isto é, $A^T = A$	$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 5 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 7 \end{pmatrix}$
Identidade I_n	diagonal com $a_{ii} = 1$	$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
Nula 0	todos os elementos iguais a zero	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

A **simetria**, em particular, é central em Economia: matrizes Hessianas de funções suaves são simétricas pelo teorema de Young, matrizes de variância-covariância são simétricas por construção, e a positividade-definição de matrizes simétricas governa as condições de segunda ordem em otimização. As matrizes **diagonais** comutam com qualquer outra matriz da mesma ordem e simplificam radicalmente o cálculo de potências, exponenciais e inversas — por isso, **diagonalizar** uma matriz (via autovalores) é uma das ferramentas mais poderosas da álgebra linear aplicada.

25.5.2 Soma e Multiplicação por Escalar

Para matrizes A, B de mesma ordem $m \times n$ e escalar $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$(A + B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad (\lambda A)_{ij} = \lambda a_{ij}.$$

A soma é comutativa e associativa; a multiplicação por escalar distribui sobre a soma. O conjunto das matrizes $m \times n$ com essas operações forma um **espaço vetorial** de dimensão mn .

25.5.3 Produto de Matrizes

Para $A_{m \times r}$ e $B_{r \times n}$ (compatíveis: o número de colunas de A deve igualar o de linhas de B), o produto $C = AB$ é uma matriz $m \times n$ com:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^r a_{ik} b_{kj}.$$

O elemento c_{ij} é o produto interno da i -ésima linha de A pela j -ésima coluna de B .

Atenção. O produto de matrizes **não é comutativo**: em geral $AB \neq BA$, e pode até ocorrer que AB exista mas BA não (se as dimensões forem incompatíveis).

25.5.3.1 Exemplo Numérico

Sejam

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}_{3 \times 2}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}_{2 \times 2}.$$

As dimensões são compatíveis (A tem 2 colunas, B tem 2 linhas), e o produto $C = AB$ é 3×2 . Calculando entrada a entrada,

$$\begin{aligned} c_{11} &= 2 \cdot 7 + 0 \cdot 8 = 14, & c_{12} &= 2 \cdot 5 + 0 \cdot 6 = 10, \\ c_{21} &= 1 \cdot 7 + 1 \cdot 8 = 15, & c_{22} &= 1 \cdot 5 + 1 \cdot 6 = 11, \\ c_{31} &= 3 \cdot 7 + 2 \cdot 8 = 37, & c_{32} &= 3 \cdot 5 + 2 \cdot 6 = 27. \end{aligned}$$

Logo,

$$AB = \begin{pmatrix} 14 & 10 \\ 15 & 11 \\ 37 & 27 \end{pmatrix}.$$

Note que BA **não existe** — B é 2×2 e A é 3×2 , e o número de colunas de B ($= 2$) coincide com o número de linhas de A ($= 3$) **só** se $2 = 3$, o que não é o caso. Este é um exemplo extremo da não-comutatividade: aqui a inversão sequer faz sentido dimensional.

25.5.4 Transposta

A **transposta** A^\top (ou A') troca linhas por colunas: se A é $m \times n$, então A^\top é $n \times m$ com $(A^\top)_{ij} = a_{ji}$.

Propriedades:

$(A^\top)^\top = A$	involução
$(A + B)^\top = A^\top + B^\top$	linearidade
$(\lambda A)^\top = \lambda A^\top$	linearidade
$(AB)^\top = B^\top A^\top$	inversão da ordem no produto

A última propriedade — **inversão da ordem no produto sob transposição** — é menos óbvia e merece demonstração.

25.5.4.1 Demonstração de $(AB)^\top = B^\top A^\top$

Sejam $A_{m \times r}$ e $B_{r \times n}$, $C = AB$. Por definição do produto:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^r a_{ik} b_{kj}.$$

Logo, o elemento (i, j) de C^\top é:

$$(C^\top)_{ij} = c_{ji} = \sum_{k=1}^r a_{jk} b_{ki}.$$

Por outro lado, seja $D = B^\top A^\top$, com B^\top de ordem $n \times r$ e A^\top de ordem $r \times m$. Pelo produto:

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^r (B^\top)_{ik} (A^\top)_{kj} = \sum_{k=1}^r b_{ki} a_{jk} = \sum_{k=1}^r a_{jk} b_{ki}.$$

Os dois resultados coincidem termo a termo, portanto $C^\top = D$, ou seja, $(AB)^\top = B^\top A^\top$. ■

25.5.5 Matriz Identidade

A **matriz identidade** I_n de ordem n é a matriz quadrada com 1 na diagonal principal e 0 nas demais posições:

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Para qualquer matriz $A_{m \times n}$: $I_m A = A I_n = A$. A identidade desempenha o papel de “1” no produto matricial.

25.5.6 Traço

Para uma matriz **quadrada** A de ordem n , o **traço** é a soma dos elementos da diagonal principal:

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}.$$

Propriedades. Para A, B quadradas de mesma ordem e $\lambda \in \mathbb{R}$:

$\text{tr}(A + B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$	linearidade
$\text{tr}(\lambda A) = \lambda \text{tr}(A)$	linearidade
$\text{tr}(A^\top) = \text{tr}(A)$	invariância sob transposição
$\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$	invariância cíclica (mesmo se $AB \neq BA$)

A última propriedade — **invariância cíclica** — é menos óbvia. Se A é $n \times m$ e B é $m \times n$, ambos os produtos AB e BA são quadrados (de ordens n e m respectivamente), e

$$\text{tr}(AB) = \sum_{i=1}^n (AB)_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m a_{ik} b_{ki} = \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^n b_{ki} a_{ik} = \sum_{k=1}^m (BA)_{kk} = \text{tr}(BA).$$

Conexão com autovalores. Adiantando o que se verá na seção de autovalores: o traço é a **soma dos autovalores** de A (contados com multiplicidade), assim como o determinante é o seu **produto**. Por isso traço e determinante aparecem juntos na análise de estabilidade de sistemas dinâmicos lineares — eles são as duas “estatísticas” que resumem o espectro de A no caso 2×2 .

25.6 A Matriz Inversa

25.6.1 Definição

Uma matriz quadrada A de ordem n é **invertível** (ou **não-singular**) quando existe uma matriz A^{-1} de mesma ordem tal que:

$$A^{-1} A = A A^{-1} = I_n.$$

A matriz A^{-1} , quando existe, é única e chama-se **inversa** de A .

25.6.2 Critério de Existência

A condição **necessária e suficiente** para que A seja invertível é:

$$|A| \neq 0.$$

Equivalentemente: A é invertível se as colunas (ou linhas) de A são linearmente independentes e o sistema $Ax = b$ tem solução única para todo b .

25.6.3 Fórmula via Matriz Adjunta

Quando $|A| \neq 0$, a inversa é dada explicitamente pela fórmula:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj}(A),$$

onde a **matriz adjunta** $\text{adj}(A)$ é a transposta da matriz dos cofatores:

$$\text{adj}(A) = [\text{cof}(A)]^T, \quad [\text{cof}(A)]_{ij} = A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Em outras palavras, se a matriz dos cofatores é $(A_{ij})_{n \times n}$, então:

$$\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

(Note a transposição: cofator A_{ij} aparece na linha j , coluna i da adjunta.)

25.6.4 Demonstração da Fórmula

Mostremos que $\frac{1}{|A|} \text{adj}(A) \cdot A = I_n$. O elemento (i, k) do produto $\text{adj}(A) \cdot A$ é:

$$[\text{adj}(A) \cdot A]_{ik} = \sum_{j=1}^n A_{ji} a_{jk}.$$

Pela relação de ortogonalidade dos cofatores (vista anteriormente):

$$\sum_{j=1}^n A_{ji} a_{jk} = |A| \delta_{ik},$$

onde $\delta_{ik} = 1$ se $i = k$ e 0 caso contrário. Multiplicando por $1/|A|$, recuperamos a identidade I_n . ■

A demonstração de $A \cdot \text{adj}(A)/|A| = I_n$ é análoga, usando a expansão de Laplace pela coluna.

25.6.5 Exemplo Numérico

Calculemos a inversa da matriz de Vandermonde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}.$$

Determinante (expansão pela 1ª linha):

$$|A| = 1 \cdot (2 \cdot 9 - 4 \cdot 3) - 1 \cdot (1 \cdot 9 - 1 \cdot 3) + 1 \cdot (1 \cdot 4 - 1 \cdot 2) = 6 - 6 + 2 = 2.$$

Cofatores:

$$A_{11} = +(18 - 12) = 6, \quad A_{12} = -(9 - 3) = -6, \quad A_{13} = +(4 - 2) = 2,$$

$$A_{21} = -(9 - 4) = -5, \quad A_{22} = +(9 - 1) = 8, \quad A_{23} = -(4 - 1) = -3,$$

$$A_{31} = +(3 - 2) = 1, \quad A_{32} = -(3 - 1) = -2, \quad A_{33} = +(2 - 1) = 1.$$

Adjunta (transposta da matriz dos cofatores):

$$\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} 6 & -5 & 1 \\ -6 & 8 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Inversa:

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 6 & -5 & 1 \\ -6 & 8 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2,5 & 0,5 \\ -3 & 4 & -1 \\ 1 & -1,5 & 0,5 \end{pmatrix}.$$

Verificando computacionalmente, em R:

```
      [,1] [,2] [,3]
[1,]    3 -2.5  0.5
[2,]   -3  4.0 -1.0
[3,]    1 -1.5  0.5
```

```
      [,1]      [,2]      [,3]
[1,] 1.000000e+00 0.000000e+00 0.000000e+00
[2,] -4.440892e-16 1.000000e+00 -1.110223e-16
[3,]  4.440892e-16 -4.440892e-16  1.000000e+00
```

E em Python:

$A^{-1} =$

```
[[ 3.  -2.5  0.5]
 [-3.   4.  -1. ]
 [ 1.  -1.5  0.5]]
```

$A \cdot A^{-1} =$

```
[[ 1.  0.  0.]
 [ 0.  1. -0.]
 [ 0.  0.  1.]]
```

25.6.6 Propriedades da Inversa

Quando A e B são invertíveis (de mesma ordem), a inversa interage de forma previsível com as demais operações matriciais. As identidades a seguir são usadas o tempo todo em manipulações algébricas — por exemplo, na derivação dos estimadores de mínimos quadrados em econometria, ou ao isolar uma variável endógena em forma reduzida.

$(A^{-1})^{-1} = A$	involução
$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$	inversão da ordem no produto
$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$	comuta com a transposição
$(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$	comuta com potências inteiras
$(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}, \lambda \neq 0$	inverso do escalar
$ AB = A B $	determinante do produto
$ A^{-1} = \frac{1}{ A }$	corolário do anterior

25.6.6.1 Demonstração de $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$

Por definição, $(AB)^{-1}$ é a única matriz X tal que $(AB)X = I$. Verifica-se diretamente que $X = B^{-1}A^{-1}$ satisfaz a identidade:

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I,$$

usando associatividade do produto. Pela unicidade da inversa, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. ■

A inversão da ordem é análoga ao que ocorre com a transposta: ambas são operações que “invertem o sentido” do produto. A intuição operacional: se AB representa “primeiro B , depois A ”, então **desfazer** essa composição exige primeiro desfazer A (aplicar A^{-1}) e depois desfazer B (aplicar B^{-1}).

25.6.6.2 Demonstração de $(A^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top$

Tomando a transposta da identidade $AA^{-1} = I$ e usando $(XY)^\top = Y^\top X^\top$:

$$(AA^{-1})^\top = (A^{-1})^\top A^\top = I^\top = I.$$

Portanto, $(A^{-1})^\top$ é a inversa de A^\top , isto é, $(A^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top$. ■

25.6.6.3 Determinante do Produto e Sua Consequência

A propriedade $|AB| = |A| |B|$ — que aceitamos aqui sem demonstração formal (resulta da multilinearidade e das propriedades dos determinantes vistas anteriormente) — tem um corolário imediato. De $AA^{-1} = I$ segue

$$|A| |A^{-1}| = |I| = 1 \quad \implies \quad |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}.$$

Em particular, A é invertível se, e somente se, $|A| \neq 0$ — confirmando o critério visto anteriormente. E o determinante da inversa é o **inverso multiplicativo** do determinante de A : pequena coerência algébrica que aparece em muitos cálculos de estática comparativa.

25.6.7 Aplicação: Solução de Sistemas via Inversa

Se $|A| \neq 0$, o sistema $Ax = b$ pode ser resolvido multiplicando ambos os lados por A^{-1} :

$$A^{-1}Ax = A^{-1}b \quad \implies \quad \boxed{x = A^{-1}b.}$$

Esta é a **solução fechada** do sistema. Embora teoricamente elegante, na prática é mais eficiente usar `solve(A, b)` (R) ou `np.linalg.solve(A, b)` (Python) — ambos resolvem o sistema diretamente via fatoração LU, sem calcular A^{-1} explicitamente. Calcular A^{-1} e depois multiplicar por b envolve mais operações e mais erro numérico.

25.6.8 Aplicação Econômica: Inversa de Leontief Revisitada

A matriz $(I - T)^{-1}$ do modelo de Leontief, vista anteriormente, agora ganha interpretação algébrica completa: cada entrada $[(I - T)^{-1}]_{ij}$ pode ser computada via cofatores e adjunta, e mede o **multiplicador setorial total** — quanto da produção do setor i é necessária para entregar uma unidade adicional de demanda final do setor j , contabilizando todos os efeitos diretos e indiretos via insumos intermediários.

Em modelos com muitos setores (n grande), o cálculo via adjunta é inviável (complexidade $O(n^4)$ ou pior); usa-se algoritmos numéricos (`solve(I - T)` em R), porém a **interpretação econômica** dos elementos como cofatores normalizados permanece válida e é o que dá significado aos números.

25.7 Formas Lineares e Quadráticas

Boa parte da Economia trata de funções escalares de vetores: utilidades, lucros, custos, log-verossimilhanças. Quando a função é **polinomial de grau baixo** em $x \in \mathbb{R}^n$, ela admite uma representação matricial compacta — e suas derivadas se escrevem em forma fechada em termos da álgebra matricial. Esta seção fixa essa correspondência para os dois casos centrais: grau 1 (forma linear) e grau 2 (forma quadrática).

25.7.1 Forma Linear

Dado um vetor coluna $a \in \mathbb{R}^n$, a **forma linear** associada é a função $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$L(x) = a^\top x = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n.$$

É o produto interno entre a e x — o caso vetorial mais simples, linear em cada coordenada.

Gradiente. Como $\partial L / \partial x_i = a_i$, o gradiente é simplesmente

$$\nabla L(x) = \frac{\partial L}{\partial x} = a.$$

O gradiente da forma linear é **constante** (não depende de x) e igual ao próprio vetor de coeficientes. É o análogo multivariado de $(ax)' = a$.

25.7.2 Forma Quadrática

Dada uma matriz quadrada A de ordem n , a **forma quadrática** associada é

$$Q(x) = x^\top A x = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j.$$

No caso $n = 2$, expandindo:

$$Q(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = a_{11} x_1^2 + (a_{12} + a_{21}) x_1 x_2 + a_{22} x_2^2.$$

Observação importante. O termo cruzado depende apenas da soma $a_{12} + a_{21}$, não de cada elemento separadamente. Isso significa que **toda forma quadrática pode ser representada por uma matriz simétrica**: dada qualquer A , a forma $Q(x) = x^\top A x$ é idêntica à forma $Q(x) = x^\top \tilde{A} x$ com $\tilde{A} = \frac{1}{2}(A + A^\top)$ — esta sim simétrica. Por convenção, sempre tomamos A **simétrica** ao representar uma forma quadrática.

25.7.3 Gradiente da Forma Quadrática

Calculemos $\partial Q/\partial x_k$. Diferenciando $Q(x) = \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j$ em relação a x_k ,

$$\frac{\partial Q}{\partial x_k} = \sum_{j=1}^n a_{kj} x_j + \sum_{i=1}^n a_{ik} x_i = \sum_{j=1}^n (a_{kj} + a_{jk}) x_j.$$

(O primeiro somatório vem dos termos em que $i = k$; o segundo, dos termos em que $j = k$.) Em forma matricial,

$$\nabla Q(x) = \frac{\partial Q}{\partial x} = (A + A^\top) x.$$

Caso simétrico. Quando $A = A^\top$ (situação padrão), $A + A^\top = 2A$ e o gradiente simplifica para

$$\nabla Q(x) = 2Ax.$$

É o análogo multivariado de $(ax^2)' = 2ax$. Esta fórmula reaparecerá, por exemplo: (i) na **CPO da regressão linear** ($\partial/\partial\beta [(y - X\beta)^\top (y - X\beta)] = -2X^\top (y - X\beta) = 0 \Rightarrow \beta = (X^\top X)^{-1} X^\top y$); (ii) na **expansão de Taylor de 2ª ordem** $f(x^* + \Delta x) \approx f(x^*) + \nabla f^\top \Delta x + \frac{1}{2} \Delta x^\top H \Delta x$, onde a matriz Hessiana H é simétrica pelo teorema de Young.

25.7.4 Sinal da Forma Quadrática

Quando A é simétrica, a função $Q(x) = x^\top Ax$ tem um **sinal característico**, classificado conforme se comporta para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$:

Forma quadrática	Definição	Tipo de A
$x^\top Ax > 0$ para todo $x \neq 0$	definida positiva	$A \succ 0$
$x^\top Ax < 0$ para todo $x \neq 0$	definida negativa	$A \prec 0$
$x^\top Ax \geq 0$ para todo x	semidefinida positiva	$A \succeq 0$
$x^\top Ax \leq 0$ para todo x	semidefinida negativa	$A \preceq 0$
Assume valores positivos e negativos	indefinida	—

CrITÉRIOS prÁTICOS. Há dois testes equivalentes para classificar A simétrica:

- Via menores principais líderes** $D_k = \det(A_{1:k,1:k})$ — os determinantes das submatrizes superiores esquerdas:
 - $A \succ 0$ $D_1, D_2, \dots, D_n > 0$ (todos positivos);
 - $A \prec 0$ $D_1 < 0, D_2 > 0, D_3 < 0, \dots$ (sinais alternados começando em negativo).
- Via autovalores** de A (todos reais por simetria):
 - $A \succ 0$ todos os autovalores > 0 ;

- $A \succ 0$ todos os autovalores > 0 ;
- A indefinida existem autovalores de sinais opostos.

Onde isso aparece. A classificação do sinal de $x^\top Ax$ é a ferramenta central das **condições de segunda ordem** em otimização: um ponto crítico x^* de f é mínimo local se $H_f(x^*) \succ 0$, máximo local se $H_f(x^*) \prec 0$, e ponto de sela se $H_f(x^*)$ for indefinida. O capítulo de otimização (sem e com restrição) retoma essa classificação sistematicamente.

25.8 Autovalores e Autovetores

25.8.1 Motivação

Já vimos que os autovalores de uma matriz A governam a estabilidade de sistemas dinâmicos lineares: o sistema $\dot{z} = Az$ é assintoticamente estável quando todos os autovalores de A têm parte real negativa. Mas autovalores aparecem em muitos outros contextos econômicos:

- **Matrizes de covariância:** em finanças, decompor Σ via autovalores produz os fatores principais de risco (PCA);
- **Cadeias de Markov:** o autovalor $\lambda = 1$ de uma matriz estocástica corresponde à distribuição estacionária;
- **Modelos VAR:** as raízes do polinômio característico (autovalores da matriz de coeficientes) determinam a persistência e estabilidade do processo;
- **Forma quadrática e Hessiana:** o sinal dos autovalores da Hessiana caracteriza máximos, mínimos e selas em otimização — tópico do próximo capítulo.

25.8.2 Definição

Dada uma matriz quadrada A de ordem n , um número $\lambda \in \mathbb{R}$ (ou \mathbb{C}) é **autovalor** de A se existe um vetor não-nulo $x \in \mathbb{R}^n$ tal que:

$$Ax = \lambda x.$$

O vetor $x \neq 0$ é o **autovetor** associado a λ . Geometricamente, A atua sobre x apenas **escalando-o** pelo fator λ , sem mudar sua direção.

25.8.3 Equação Característica

Reescrevendo $Ax = \lambda x$ como $(A - \lambda I)x = 0$, vemos que λ é autovalor se e só se o sistema homogêneo $(A - \lambda I)x = 0$ admite **solução não-trivial**, o que requer:

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Esta é a **equação característica** de A . O determinante $\det(A - \lambda I) = p_A(\lambda)$ é um polinômio de grau n em λ , chamado **polinômio característico** de A . Pelo teorema fundamental da álgebra, p_A tem exatamente n raízes (contando multiplicidades) — possivelmente complexas conjugadas.

25.8.4 Caso 2×2

Para $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$:

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{pmatrix},$$

$$\det(A - \lambda I) = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12} a_{21} = \lambda^2 - \operatorname{tr}(A) \lambda + |A|.$$

Os autovalores satisfazem (relações de Vieta):

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \operatorname{tr}(A), \quad \lambda_1 \cdot \lambda_2 = |A|.$$

25.8.4.1 Discriminante: Tipos de Raízes

Resolvendo $\lambda^2 - \operatorname{tr}(A) \lambda + |A| = 0$ pela fórmula de Bhaskara,

$$\lambda_{1,2} = \frac{\operatorname{tr}(A) \pm \sqrt{\Delta}}{2}, \quad \Delta = \operatorname{tr}(A)^2 - 4|A|.$$

O sinal do discriminante Δ separa três regimes qualitativamente distintos.

1. $\Delta > 0$ — duas raízes reais distintas.

$$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2.$$

A matriz é diagonalizável sobre \mathbb{R} , e os autovetores associados formam uma base de \mathbb{R}^2 . Em sistemas dinâmicos lineares no plano, esse caso dá origem a **nós** (estável se ambos $\lambda_i < 0$, instável se ambos > 0) ou a **pontos de sela** (sinais opostos).

2. $\Delta = 0$ — raiz real repetida.

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{\operatorname{tr}(A)}{2}.$$

Há um único autovalor com multiplicidade algébrica 2; pode haver um ou dois autovetores linearmente independentes (multiplicidade geométrica 1 ou 2, conforme a estrutura de A). Em sistemas dinâmicos, configura um **nó degenerado** — caso de fronteira entre nó e foco.

3. $\Delta < 0$ — par complexo conjugado.

$$\lambda_{1,2} = \frac{\operatorname{tr}(A) \pm i \sqrt{|\Delta|}}{2} = \alpha \pm i \beta,$$

com parte real $\alpha = \operatorname{tr}(A)/2$ e parte imaginária $\beta = \sqrt{|\Delta|}/2$. Em sistemas dinâmicos, esse caso produz **focos** (estável se $\alpha < 0$, instável se $\alpha > 0$) ou **centros** (se $\alpha = 0$, isto é, $\operatorname{tr}(A) = 0$). As trajetórias são **espirais** ou **órbitas fechadas**, sempre com componente oscilatória de frequência angular β .

Síntese.

Sinal de Δ	Raízes	Tipo no plano de fases
$\Delta > 0$	duas reais distintas	nó (próprio) ou sela
$\Delta = 0$	uma real repetida	nó degenerado
$\Delta < 0$	par complexo conjugado	foco (espiral) ou centro

Essa tricotomia complementa a classificação por traço e determinante: enquanto $\operatorname{tr}(A)$ e $|A|$ determinam a **estabilidade** (convergência ou divergência), o sinal de Δ determina o **caráter** (monotônico ou oscilatório) da aproximação ao equilíbrio. Ambos serão revisitados na seção sobre sistemas de EDO.

25.8.5 Exemplo Resolvido

Calculemos os autovalores e autovetores de

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}.$$

Polinômio característico:

$$p_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 3 - \lambda & 0 \\ 8 & -1 - \lambda \end{pmatrix} = (3 - \lambda)(-1 - \lambda) - 0 = 0.$$

Autovalores:

$$(3 - \lambda)(-1 - \lambda) = 0 \implies \lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = -1.$$

(Confere com $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$, $\Delta = 4 + 12 = 16$, $\lambda = (2 \pm 4)/2$.)

Autovetor para $\lambda_1 = 3$: resolvemos $(A - 3I)x = 0$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 8 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies 8x_1 - 4x_2 = 0 \implies x_2 = 2x_1.$$

Tomando $x_1 = 1$: o autovetor é $\boxed{v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}$ (a menos de escalar).

Autovetor para $\lambda_2 = -1$: resolvemos $(A + I)x = 0$:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 8 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies 4x_1 = 0 \implies x_1 = 0, x_2 \text{ livre.}$$

Tomando $x_2 = 1$: o autovetor é $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Verificando computacionalmente em R:

```
[1] 3 -1

      [,1] [,2]
[1,] 0.4472136 0
[2,] 0.8944272 1
```

E em Python:

```
Autovalores: [-1.  3.]
```

```
Autovetores (colunas):
```

```
[[0. 0.4472136 ]
 [1. 0.89442719]]
```

Nota. As funções `eigen()` e `np.linalg.eig` retornam autovetores **normalizados** (com norma 1), enquanto na demonstração a mão tomamos $v_1 = (1, 2)^\top$ e $v_2 = (0, 1)^\top$. As direções coincidem: por exemplo, `eigen()` retorna $v_1 \propto (0,447, 0,894)^\top$ e $0,447 \cdot \sqrt{5} \approx 1$, $0,894 \cdot \sqrt{5} \approx 2$.

25.8.6 Aplicação Econômica: Estabilidade da EDO de 2ª Ordem

A matriz companheira da EDO $\ddot{x} + a\dot{x} + bx = 0$, vista anteriormente, é

$$A = \begin{pmatrix} -a & -b \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

com polinômio característico

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b = 0.$$

Esta é **exatamente** a equação característica da EDO escalar — confirmando que **autovalores da matriz companheira = raízes da equação característica da EDO**. O critério $\text{tr}(A) < 0$ e $|A| > 0$ usado anteriormente é, em essência, o teste de Routh-Hurwitz para garantir parte real negativa em ambos os autovalores.

25.9 Aplicação: Sistemas de EDO Lineares e Estabilidade

25.9.1 Motivação

Modelos macroeconômicos dinâmicos com mais de uma variável de estado dão origem a **sistemas de equações diferenciais**: o IS-LM em forma dinâmica acopla produto e taxa de juros; o crescimento de Solow-Swan com capital humano envolve duas variáveis dinâmicas; o overshooting cambial (Dornbusch) acopla preços e taxa de câmbio. Em todos esses casos, a estabilidade do equilíbrio depende de propriedades algébricas — **traço** e **determinante** — da matriz que descreve a dinâmica.

25.9.2 Sistema Linear de EDO de 1ª Ordem com Duas Variáveis

Considere o sistema

$$\begin{cases} \dot{y} = a_{11}y + a_{12}x + c_1, \\ \dot{x} = a_{21}y + a_{22}x + c_2, \end{cases}$$

onde $\dot{x} = dx/dt$ e $\dot{y} = dy/dt$. Em forma matricial:

$$\begin{pmatrix} \dot{y} \\ \dot{x} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Toda a análise de estabilidade — como veremos — gira em torno de duas quantidades associadas a A :

$$\text{tr}(A) = a_{11} + a_{22}, \quad |A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

25.9.3 Da EDO de 2ª Ordem ao Sistema de 1ª Ordem

Toda EDO escalar de 2ª ordem com coeficientes constantes pode ser reescrita como um sistema de duas EDOs de 1ª ordem. Considere:

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = c.$$

Defina $y = \dot{x}$. Então $\dot{y} = \ddot{x}$, e a equação acima reescreve-se como:

$$\dot{y} + ay + bx = c \iff \dot{y} = -ay - bx + c.$$

A definição $\dot{x} = y$ completa o sistema:

$$\begin{cases} \dot{y} = -ay - bx + c, \\ \dot{x} = y. \end{cases}$$

A matriz dos coeficientes é a **matriz companheira**:

$$A = \begin{pmatrix} -a & -b \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad |A| = b, \quad \text{tr}(A) = -a.$$

Os coeficientes da EDO original aparecem diretamente como traço e determinante do sistema — o que motiva a próxima seção.

25.9.4 Estabilidade via Determinante e Traço

Para a EDO escalar $\ddot{x} + a\dot{x} + bx = c$, a seção sobre EDO de 2ª ordem mostra que o equilíbrio é assintoticamente estável quando as raízes da equação característica

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0, \quad \lambda_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2},$$

têm ambas parte real negativa — condição que se verifica para $a > 0$ e $b > 0$.

Para o sistema correspondente $\dot{z} = Az + c$, a equação característica de A é

$$\lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + |A| = 0,$$

e suas raízes (autovalores de A) satisfazem as relações de Vieta:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \text{tr}(A), \quad \lambda_1 \cdot \lambda_2 = |A|.$$

Substituindo $\text{tr}(A) = -a$ e $|A| = b$, obtemos $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ — exatamente a equação característica da EDO escalar. **A análise via traço e determinante é, portanto, idêntica.**

A condição de estabilidade torna-se:

$$\boxed{\text{tr}(A) < 0 \quad \text{e} \quad |A| > 0.}$$

25.9.4.1 Tipologia dos Equilíbrios

Caso	Tipo de Equilíbrio	Comportamento
$\text{tr}(A) < 0$ e $ A > 0$	Estável (nó ou foco)	Trajetoórias convergem
$\text{tr}(A) > 0$ e $ A > 0$	Instável (nó ou foco)	Trajetoórias divergem
$ A < 0$	Ponto de sela	Variedade estável + variedade instável
$ A = 0$	Degenerado	Equilíbrio não isolado

Pontos de sela são especialmente importantes em macroeconomia: modelos de expectativas racionais (Dornbusch, Cagan, modelos de bolhas) tipicamente têm equilíbrios do tipo sela, e a unicidade da solução exige que a economia se localize sobre a **variedade estável** (saddle path).

25.9.5 Diagrama de Fase

Para um sistema 2×2 , a análise gráfica no plano (x, y) — chamado **plano de fases** — fornece intuição imediata sobre a dinâmica.

25.9.5.1 Construção das Isóclinas

As **isóclinas** são as curvas onde uma das derivadas é nula:

- Isóclina $\dot{y} = 0$: $a_{11}y + a_{12}x + c_1 = 0$, ou seja:

$$y = -\frac{a_{12}}{a_{11}}x - \frac{c_1}{a_{11}}.$$

- Isóclina $\dot{x} = 0$: $a_{21}y + a_{22}x + c_2 = 0$, ou seja:

$$y = -\frac{a_{22}}{a_{21}}x - \frac{c_2}{a_{21}}.$$

O **equilíbrio** (\bar{x}, \bar{y}) é a interseção das duas isóclinas — onde $\dot{x} = \dot{y} = 0$ simultaneamente.

25.9.5.2 Direção das Trajetórias

A direção do movimento em cada região é determinada pelo sinal de \dot{x} e \dot{y} . Para entender essa direção, considere o efeito de um deslocamento Δx a partir do equilíbrio (\bar{x}, \bar{y}) :

$$\dot{y} = a_{11}\bar{y} + a_{12}(\bar{x} + \Delta x) + c_1 = a_{12}\Delta x,$$

(os outros termos somam zero pelo equilíbrio). Logo, o sinal de \dot{y} depende do sinal de $a_{12} \cdot \Delta x$. Analogamente para \dot{x} em relação a Δy :

$$\dot{x} = a_{21}\Delta y.$$

25.9.5.3 Estabilidade

Quando $\text{tr}(A) < 0$ e $|A| > 0$, as setas em todas as quatro regiões delimitadas pelas isóclinas apontam para o equilíbrio — toda trajetória converge a (\bar{x}, \bar{y}) . Quando $|A| < 0$ (ponto de sela), há duas regiões com setas que afastam do equilíbrio.

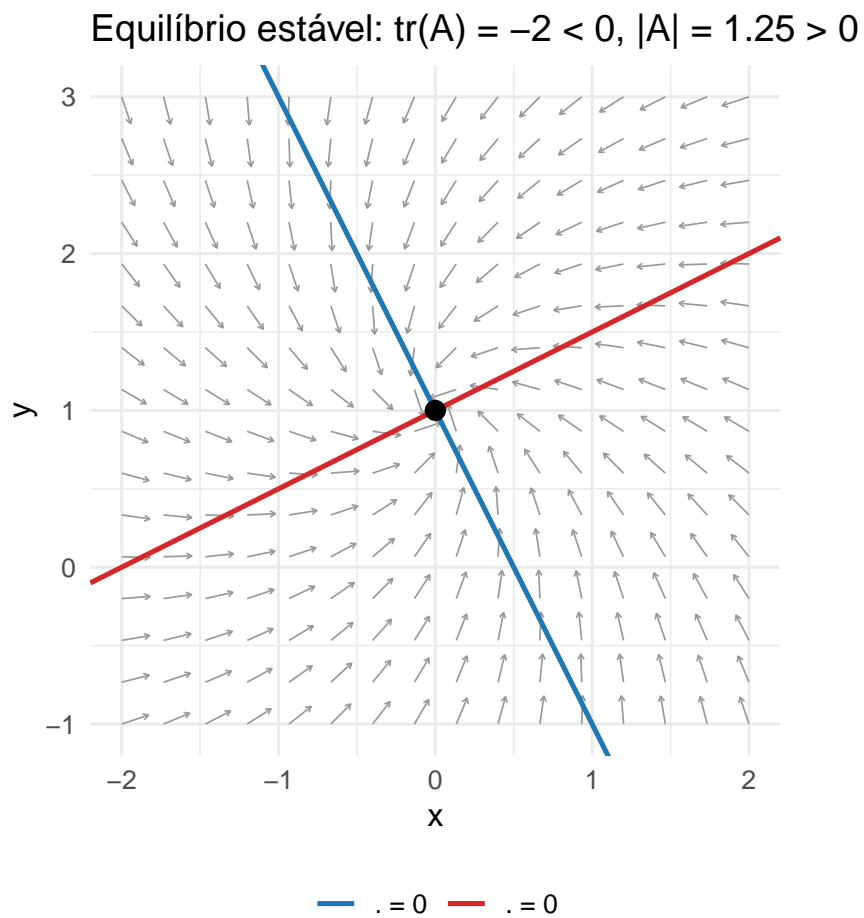


Figura 61: Diagrama de fase de um sistema linear estável: $\dot{y} = -y + 0.5x + 1$, $\dot{x} = -0.5y - x + 0.5$. Isóclinas em vermelho/azul, equilíbrio em $(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 1)$ marcado em preto, trajetórias em cinza.

25.9.5.4 Ilustração: Diagrama de Fase de um Equilíbrio Estável

Para o sistema do exemplo, $A = \begin{pmatrix} -1 & 0.5 \\ -0.5 & -1 \end{pmatrix}$, com $\text{tr}(A) = -2$ e $|A| = 1 + 0.25 = 1.25$. Ambas as condições de estabilidade são satisfeitas — e o diagrama mostra todas as trajetórias convergindo ao equilíbrio.

A versão Python do mesmo diagrama, usando `matplotlib.streamplot` (que integra automaticamente o campo vetorial e desenha as trajetórias):

```
<matplotlib.streamplot.StreamplotSet object at 0x13fdc2270>
```

```
(-2.0, 2.0)
```

```
(-1.0, 3.0)
```

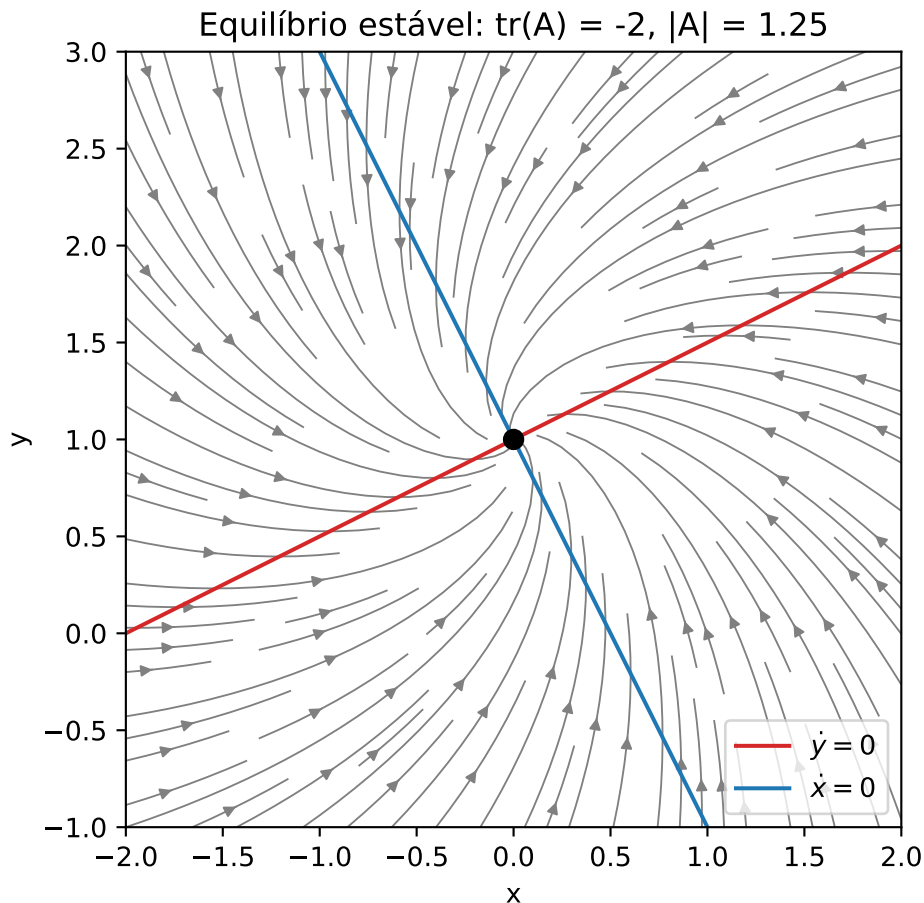


Figura 62: Mesmo diagrama de fase em Python — `matplotlib.streamplot` traça trajetórias suaves do campo (\dot{x}, \dot{y}) .

25.9.6 Aplicação Econômica: Versão Dinâmica do IS-LM

A versão estática do IS-LM, vista anteriormente, fornece o **equilíbrio momentâneo** de (Y, r) . Em horizontes curtos, contudo, o produto e a taxa de juros não se ajustam instantaneamente — há defasagem. Modelos dinâmicos capturam essa transição supondo que cada variável se ajusta proporcionalmente ao seu desequilíbrio:

$$\begin{cases} \dot{Y} = \alpha[(c_0 - c_1 T_0 + I_0 + G) - (1 - c_1)Y - br], \\ \dot{r} = \beta[m_1 Y - m_2 r - M^*/P], \end{cases}$$

onde $\alpha, \beta > 0$ são velocidades de ajuste. Em forma matricial:

$$\begin{pmatrix} \dot{Y} \\ \dot{r} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -\alpha(1 - c_1) & -\alpha b \\ \beta m_1 & -\beta m_2 \end{pmatrix}}_{A_{\text{din}}} \begin{pmatrix} Y \\ r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha A_0 \\ -\beta M^*/P \end{pmatrix}.$$

Pelas regras de estabilidade ($\text{tr}(A_{\text{din}}) < 0$ e $|A_{\text{din}}| > 0$):

- **Traço:** $\text{tr}(A_{\text{din}}) = -\alpha(1 - c_1) - \beta m_2 < 0$ — sempre negativo (ambos os termos têm sinal correto);
- **Determinante:** $|A_{\text{din}}| = \alpha\beta[(1 - c_1)m_2 + b m_1] > 0$ — sempre positivo, por ser o produto de $\alpha\beta > 0$ pelo determinante da matriz IS-LM estática.

Conclusão: **o equilíbrio IS-LM é dinamicamente estável** sob qualquer combinação de velocidades de ajuste $\alpha, \beta > 0$. Após um choque (fiscal ou monetário), a economia converge ao novo equilíbrio sem ciclos explosivos.

Este resultado — estabilidade incondicional do IS-LM — é elementar porém poderoso: ele justifica analiticamente o uso da estática comparativa como aproximação válida do longo prazo, sem necessidade de modelar explicitamente a transição.

26 Otimização sem Restrição

26.1 Motivação Econômica

Otimização é o motor analítico da Economia. Praticamente todo modelo econômico repousa sobre **algum agente otimizando algo**, sujeito ou não a restrições:

- **Firma competitiva:** maximiza lucro $\pi(q) = p q - C(q)$ escolhendo a quantidade ótima q^* ;
- **Monopolista:** maximiza $\pi(q) = p(q) q - C(q)$ levando em conta que sua escolha afeta o preço de mercado;
- **Consumidor:** maximiza utilidade $U(x_1, \dots, x_n)$ — neste capítulo sem restrição orçamentária; com restrições virá em capítulo seguinte;
- **Banco central:** minimiza $L(\pi, y) = (\pi - \pi^*)^2 + \lambda (y - y^*)^2$ — função-perda quadrática em torno de metas de inflação e produto;
- **Investidor:** seleciona carteira que maximiza retorno esperado dado um nível de risco — problema de média-variância de Markowitz.

Em todos esses casos, a teoria precisa de:

1. **Condições necessárias** que todo ótimo deve satisfazer (úteis para **encontrar** candidatos a ótimo);
2. **Condições suficientes** que garantem que um candidato é, de fato, máximo ou mínimo;
3. **Crterios de classificação** quando há múltiplos pontos críticos (máximos locais, mínimos locais, pontos de sela).

Este capítulo desenvolve essas ferramentas a partir de três teoremas-base do cálculo (Rolle, Valor Médio e Taylor) e culmina nas condições de primeira e segunda ordem para funções de uma e várias variáveis.

26.2 Otimização de Funções de Uma Variável

26.2.1 Teorema de Rolle

Enunciado. Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua em $[a, b]$, derivável em (a, b) , e tal que $f(a) = f(b)$. Então existe $c \in (a, b)$ com:

$$f'(c) = 0.$$

Intuição geométrica. Se uma função sai de um ponto e volta à mesma altura, em algum momento intermediário sua derivada (inclinação da tangente) precisa ser zero — caso contrário a função estaria sempre subindo ou sempre descendo, e não retornaria ao valor inicial.

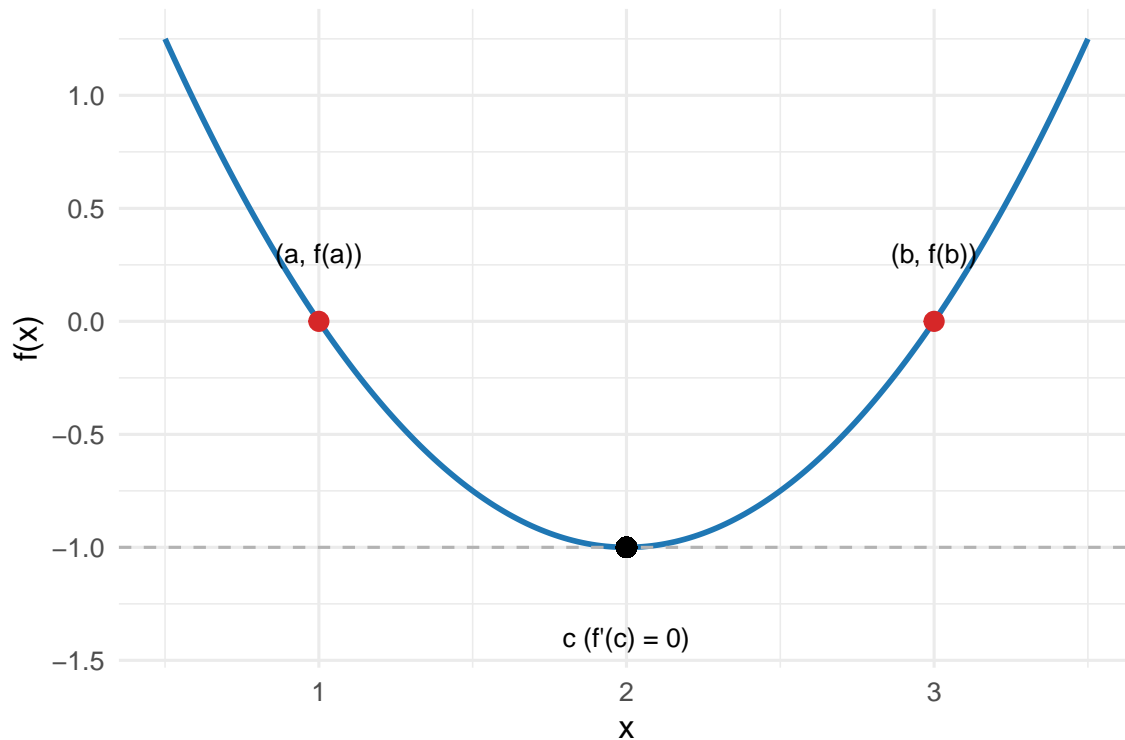


Figura 63: Teorema de Rolle: $f(x) = (x - 1)(x - 3)$, $f(1) = f(3) = 0$. Existe $c = 2$ com $f'(c) = 0$ — o vértice da parábola, onde a tangente é horizontal.

26.2.2 Teorema do Valor Médio (TVM)

Enunciado. Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b) . Então existe $c \in (a, b)$ tal que:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

ou, equivalentemente, $f(b) = f(a) + f'(c)(b - a)$.

Interpretação geométrica. A inclinação média do gráfico entre a e b — ou seja, a inclinação da reta que une $(a, f(a))$ a $(b, f(b))$ — é atingida pela tangente em algum ponto interior c .

26.2.2.1 Demonstração (via Rolle)

Considere a função auxiliar:

$$g(x) = f(b) - f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - x).$$

Calculando os extremos:

$$g(a) = f(b) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (b - a) = f(b) - f(a) - [f(b) - f(a)] = 0,$$

$$g(b) = f(b) - f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (b - b) = 0.$$

Como $g(a) = g(b) = 0$ e g é contínua e derivável (porque f é), por Rolle existe $c \in (a, b)$ com $g'(c) = 0$.

Calculando g' :

$$g'(x) = -f'(x) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Logo:

$$g'(c) = 0 \iff f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \quad \blacksquare$$

26.2.2.2 Forma para Aproximação Local

Tomando $a = x^*$ e $b = x^* + \Delta x$, o TVM diz que existe $\theta \in (0, 1)$ tal que:

$$\boxed{f(x^* + \Delta x) = f(x^*) + f'(x^* + \theta \Delta x) \Delta x.}$$

Esta é a forma mais útil para argumentos de otimização: **a variação de f é exatamente $f'(\xi) \Delta x$** para algum ξ entre x^* e $x^* + \Delta x$. Usaremos essa forma logo abaixo.

26.2.3 Expansão de Taylor

A expansão de Taylor de **segunda ordem** em torno de x^* refina a aproximação linear vista anteriormente, adicionando o termo de curvatura:

$$f(x^* + \Delta x) = f(x^*) + f'(x^*) \Delta x + \frac{f''(x^* + \theta \Delta x)}{2} (\Delta x)^2,$$

para algum $\theta \in (0, 1)$. Aproximando $f''(x^* + \theta \Delta x) \approx f''(x^*)$ (válido para Δx pequeno):

$$\boxed{f(x^* + \Delta x) \approx f(x^*) + f'(x^*) \Delta x + \frac{f''(x^*)}{2} (\Delta x)^2.}$$

O termo $f'(x^*) \Delta x$ é o efeito linear; o termo $\frac{1}{2} f''(x^*) (\Delta x)^2$ é o efeito de segunda ordem (curvatura).

26.2.3.1 Demonstração via Função Auxiliar

A demonstração segue o mesmo princípio usado no TVM: constrói-se uma função auxiliar que se anula em a e b , aplica-se Rolle e identifica-se a constante.

Considere

$$\varphi(x) = f(b) - [f(x) + f'(x)(b-x) + K(b-x)^2],$$

com K a determinar. Por construção,

$$\varphi(b) = f(b) - [f(b) + 0 + 0] = 0.$$

Escolhemos K de modo que também $\varphi(a) = 0$:

$$\varphi(a) = f(b) - [f(a) + f'(a)(b-a) + K(b-a)^2] = 0,$$

donde

$$K = \frac{f(b) - [f(a) + f'(a)(b-a)]}{(b-a)^2}. \quad (\text{I})$$

Como $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ e φ é derivável em (a, b) , pelo teorema de Rolle existe $c \in (a, b)$ com $\varphi'(c) = 0$. Calculando φ' — ao derivar $f'(x)(b-x)$ obtemos $f''(x)(b-x) - f'(x)$ pela regra do produto:

$$\varphi'(x) = -[f'(x) + f''(x)(b-x) - f'(x) - 2K(b-x)] = (b-x)[2K - f''(x)].$$

Em $x = c$, com $b - c \neq 0$:

$$\varphi'(c) = 0 \iff K = \frac{f''(c)}{2}. \quad (\text{II})$$

Combinando (I) e (II):

$$\frac{f''(c)}{2} = \frac{f(b) - [f(a) + f'(a)(b-a)]}{(b-a)^2},$$

ou seja,

$$\boxed{f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(c)}{2}(b-a)^2, \quad c \in (a, b).} \quad \blacksquare$$

Tomando $a = x^*$ e $b = x^* + \Delta x$, recupera-se a forma utilizada acima com $c = x^* + \theta \Delta x$ para algum $\theta \in (0, 1)$.

26.2.4 Condições Necessárias

Definição. x^* é **máximo local** de f se $f(x^*) \geq f(x^* + \Delta x)$ para todo Δx pequeno; é **mínimo local** se $f(x^*) \leq f(x^* + \Delta x)$.

Teorema (CN). Se x^* é extremo local de f (no interior do domínio) e f é duas vezes diferenciável em x^* , então:

Tipo	Condição de 1ª ordem	Condição de 2ª ordem
Máximo	$f'(x^*) = 0$	$f''(x^*) \leq 0$
Mínimo	$f'(x^*) = 0$	$f''(x^*) \geq 0$

26.2.4.1 Por que $f'(x^*) = 0$ é necessária

Pela expansão de Taylor:

$$f(x^* + \Delta x) - f(x^*) = f'(x^*) \Delta x + O(\Delta x^2).$$

Para x^* máximo, $f(x^* + \Delta x) - f(x^*) \leq 0$ tanto para $\Delta x > 0$ quanto $\Delta x < 0$. Se $f'(x^*) > 0$, basta tomar $\Delta x > 0$ pequeno para violar a desigualdade. Analogamente para $f'(x^*) < 0$ com $\Delta x < 0$. Logo $f'(x^*) = 0$.

26.2.4.2 Por que $f''(x^*) \leq 0$ é necessária para máximo

Com $f'(x^*) = 0$, a expansão fica:

$$f(x^* + \Delta x) - f(x^*) = \frac{1}{2} f''(x^*) (\Delta x)^2 + o(\Delta x^2).$$

Como $(\Delta x)^2 > 0$, para que $f(x^* + \Delta x) - f(x^*) \leq 0$ vale para Δx pequeno, precisamos de $f''(x^*) \leq 0$.

26.2.5 Condições Suficientes

Teorema (CS). Se $f'(x^*) = 0$ e:

- $f''(x^*) < 0$: x^* é **máximo local estrito**;
- $f''(x^*) > 0$: x^* é **mínimo local estrito**.

26.2.5.1 Demonstração via TVM

Suponha $f'(x^*) = 0$ e $f''(x^*) < 0$. Por continuidade, f'' é negativa em uma vizinhança de x^* . Pelo TVM aplicado a f' no intervalo entre x^* e $x^* + \Delta x$:

$$f'(x^* + \Delta x) - f'(x^*) = f''(x^* + \theta \Delta x) \Delta x.$$

Como $f'(x^*) = 0$ e $f''(x^* + \theta \Delta x) < 0$:

- Se $\Delta x > 0$: $f'(x^* + \Delta x) < 0$ (a derivada virou negativa);
- Se $\Delta x < 0$: $f'(x^* + \Delta x) > 0$ (a derivada virou positiva).

Em ambos os casos, $f'(x^* + \theta \Delta x) \Delta x < 0$. Aplicando o TVM agora a f no mesmo intervalo:

$$f(x^* + \Delta x) - f(x^*) = f'(x^* + \theta' \Delta x) \Delta x < 0,$$

para todo $\Delta x \neq 0$ pequeno. Logo x^* é máximo local estrito. ■

A demonstração para mínimo é simétrica.

26.2.5.2 Quando $f''(x^*) = 0$

O teste de segunda ordem é **inconclusivo** quando $f''(x^*) = 0$. Casos possíveis:

- $f(x) = x^4$ em $x^* = 0$: $f''(0) = 0$, mas $x^* = 0$ é mínimo (precisa olhar derivadas de ordem superior);
- $f(x) = x^3$ em $x^* = 0$: $f'(0) = 0 = f''(0)$, mas $x^* = 0$ é **ponto de inflexão**, não extremo.

Quando $f''(x^*) = 0$, recorre-se às derivadas de ordem superior ou a inspeção direta.

26.2.6 Exemplo Computacional

Considere $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$. Pontos críticos:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3) = 3(x - 3)(x + 1) = 0 \Rightarrow x = 3, x = -1.$$

Segunda derivada: $f''(x) = 6x - 6$.

- $f''(-1) = -12 < 0 \Rightarrow x = -1$ é **máximo local**.
- $f''(3) = 12 > 0 \Rightarrow x = 3$ é **mínimo local**.

Em R:

Máximo em $x = -1.0000$, $f = 10.0000$

Mínimo em $x = 3.0000$, $f = -22.0000$

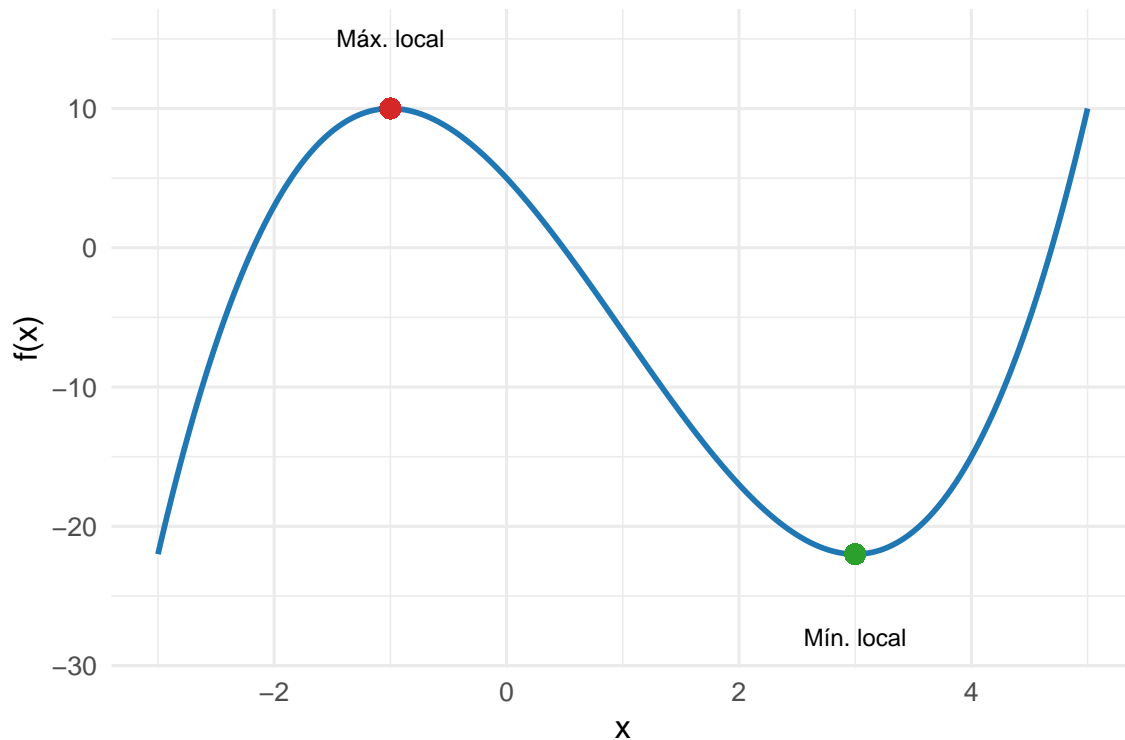


Figura 64: $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ tem máximo local em $x = -1$ e mínimo local em $x = 3$.

Em Python:

Máximo em $x = -1.0000$, $f = 10.0000$

Mínimo em $x = 3.0000$, $f = -22.0000$

26.3 Otimização de Funções de Várias Variáveis

A generalização das condições nec/suf para $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ requer uma versão multivariada da expansão de Taylor de 2ª ordem, e leva à **Hessiana** como o objeto que substitui f'' no caso univariado.

26.3.1 Parametrização Direcional

Para reduzir o problema multivariado a um univariado, parametrizamos uma direção. Dado $x^* \in \mathbb{R}^n$ e um deslocamento $\Delta x = (\Delta x_1, \dots, \Delta x_n) \in \mathbb{R}^n$, considere $h \in \mathbb{R}$ pequeno e a função auxiliar:

$$F(h) = f(x_1^* + h \Delta x_1, \dots, x_n^* + h \Delta x_n).$$

Quando $h = 0$, $F(0) = f(x^*)$. Quando $h = 1$, $F(1) = f(x^* + \Delta x)$. Tudo o que precisamos é estudar $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — uma função univariada — e aplicar Taylor:

$$F(h) = F(0) + F'(0)h + \frac{1}{2}F''(\theta h)h^2.$$

26.3.2 Cálculo de $F'(0)$

Pela regra da cadeia:

$$F'(h) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^* + h \Delta x) \Delta x_i.$$

Em $h = 0$:

$$F'(0) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^*) \Delta x_i = \nabla f(x^*) \cdot \Delta x.$$

O resultado é o produto interno do **gradiente** $\nabla f(x^*) = (\partial f/\partial x_1, \dots, \partial f/\partial x_n)$ com o vetor de direção Δx .

26.3.3 Cálculo de $F''(0)$

Diferenciando $F'(h) = \sum_i (\partial f/\partial x_i)(\cdot) \Delta x_i$ novamente em h :

$$F''(h) = \sum_{i=1}^n \left[\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x^* + h \Delta x) \Delta x_j \right] \Delta x_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f_{ij}(\cdot) \Delta x_i \Delta x_j.$$

Em $h = 0$:

$$F''(0) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f_{ij}(x^*) \Delta x_i \Delta x_j = \Delta x^\top H_f(x^*) \Delta x,$$

onde $H_f(x^*) = (f_{ij}(x^*))$ é a **matriz Hessiana** de f em x^* — a mesma matriz já encontrada no capítulo de derivadas parciais. A expressão $\Delta x^\top H \Delta x$ é uma **forma quadrática**.

26.3.4 Expansão de Taylor Multivariada

Combinando $F(0)$, $F'(0)$ e $F''(0)$:

$$f(x^* + \Delta x) \approx f(x^*) + \nabla f(x^*) \cdot \Delta x + \frac{1}{2} \Delta x^\top H_f(x^*) \Delta x.$$

Esta é a **expansão de Taylor de 2ª ordem em várias variáveis**. O termo linear é o produto interno gradiente · deslocamento; o termo quadrático envolve a Hessiana e captura a curvatura local de f em todas as direções simultaneamente.

26.3.5 Condições de Primeira Ordem

Teorema (CN, 1ª ordem). Se x^* é extremo local de f no interior do domínio, então:

$$\nabla f(x^*) = 0 \iff \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^*) = 0 \text{ para todo } i.$$

Pontos onde $\nabla f = 0$ são chamados **pontos críticos** (ou estacionários) de f .

Por quê: se $\nabla f(x^*) \neq 0$, escolhendo Δx na direção do gradiente (ou contra ela) o termo linear $\nabla f \cdot \Delta x$ pode ser tornado positivo ou negativo, contradizendo a definição de extremo.

26.3.6 Condições de Segunda Ordem

Em um ponto crítico ($\nabla f(x^*) = 0$), Taylor reduz-se a:

$$f(x^* + \Delta x) - f(x^*) \approx \frac{1}{2} \Delta x^\top H_f(x^*) \Delta x.$$

O sinal dessa **forma quadrática** determina o tipo do ponto crítico:

Forma quadrática $\Delta x^\top H \Delta x$	H é...	x^* é...
> 0 para todo $\Delta x \neq 0$	definida positiva	mínimo local estrito
< 0 para todo $\Delta x \neq 0$	definida negativa	máximo local estrito
Assume sinais + e -	indefinida	ponto de sela
≥ 0 (com igualdade em algum Δx)	semidefinida positiva	candidato a mín. (inconclusivo)
≤ 0 (com igualdade em algum Δx)	semidefinida negativa	candidato a máx. (inconclusivo)

26.3.6.1 Critério Prático (Caso $n = 2$)

Para $H_f = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix}$, o sinal da forma quadrática lê-se diretamente de:

$$|H_f| = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2, \quad f_{xx}.$$

Caso	$ H_f $	f_{xx}	Tipo
Definida positiva	> 0	> 0	Mínimo local
Definida negativa	> 0	< 0	Máximo local
Indefinida	< 0	qualquer	Ponto de sela
Inconclusivo	$= 0$	qualquer	Verificar diretamente

26.3.6.2 Derivação: Completar o Quadrado

Por que esses são exatamente os sinais corretos? Expandindo a forma quadrática (com a notação $F_{ij} = \partial^2 F / \partial x_i \partial x_j$ e $F_{12} = F_{21}$ por Young):

$$\Delta x^\top H_F \Delta x = F_{11} \Delta x_1^2 + 2 F_{12} \Delta x_1 \Delta x_2 + F_{22} \Delta x_2^2.$$

Supondo $F_{11} \neq 0$, fatoramos F_{11} e completamos o quadrado:

$$\Delta x^\top H_F \Delta x = F_{11} \left[\Delta x_1^2 + 2 \frac{F_{12}}{F_{11}} \Delta x_1 \Delta x_2 + \left(\frac{F_{12}}{F_{11}} \Delta x_2 \right)^2 \right] - \frac{F_{12}^2}{F_{11}} \Delta x_2^2 + F_{22} \Delta x_2^2.$$

Reagrupando:

$$\Delta x^\top H_F \Delta x = F_{11} \left[\Delta x_1 + \frac{F_{12}}{F_{11}} \Delta x_2 \right]^2 + \frac{\Delta x_2^2}{F_{11}} [F_{11} F_{22} - F_{12}^2].$$

O segundo colchete é exatamente o determinante $|H_F|$:

$$\Delta x^\top H_F \Delta x = F_{11} T^2 + \frac{\Delta x_2^2}{F_{11}} |H_F|, \quad T = \Delta x_1 + \frac{F_{12}}{F_{11}} \Delta x_2.$$

Leitura dos sinais. A forma quadrática é uma soma de dois termos. O primeiro tem o sinal de F_{11} (já que $T^2 \geq 0$); o segundo tem o sinal de $|H_F|/F_{11}$ (já que $\Delta x_2^2 \geq 0$).

- **Definida negativa** (máximo): exigimos a soma < 0 para todo $(\Delta x_1, \Delta x_2) \neq 0$. O primeiro termo é ≤ 0 se $F_{11} < 0$. Para que o segundo seja também ≤ 0 com $F_{11} < 0$ no denominador, precisamos $|H_F| > 0$. Assim, $F_{11} < 0$ e $|H_F| > 0$.
- **Definida positiva** (mínimo): simétrico. Ambos os termos ≥ 0 exigem $F_{11} > 0$ e $|H_F| > 0$.
- **Indefinida** (sela): se $|H_F| < 0$, os dois termos têm sinais opostos e a forma assume valores positivos e negativos.

Esta derivação **demonstra** as entradas da tabela acima e mostra por que o sinal de F_{11} (não de F_{22}) aparece — é apenas a escolha de qual variável fatoramos primeiro; por simetria, F_{22} funcionaria igualmente.

26.3.6.3 Caso Geral: Critério de Sylvester

Em n geral, o critério das condições de segunda ordem usa os **menores principais líderes** D_k de H_F — os determinantes das submatrizes superiores esquerdas $k \times k$:

$$D_1 = F_{11}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{vmatrix}, \quad \dots, \quad D_n = |H_F|.$$

Tipo de extremo	Condição sobre os D_k
Mínimo local (H_F definida positiva)	$D_1 > 0, D_2 > 0, D_3 > 0, \dots, D_n > 0$ — todos positivos
Máximo local (H_F definida negativa)	$D_1 < 0, D_2 > 0, D_3 < 0, \dots$ — alternam, começando negativo
Ponto de sela	qualquer outro padrão de sinais com $D_n \neq 0$
Inconclusivo	algum $D_k = 0$

A condição de máximo é equivalente a dizer que $-H_F$ é definida positiva — daí a alternância: $D_k(-H) = (-1)^k D_k(H)$.

Equivalentemente, via **autovalores** (todos reais por simetria de H_F):

- Todos os autovalores > 0 : definida positiva (mínimo);
- Todos os autovalores < 0 : definida negativa (máximo);
- Autovalores de sinais opostos: indefinida (sela).

26.3.7 Exemplos: Formas Quadráticas Puras

Antes de aplicar o critério a uma função mais elaborada, vale fixá-lo em três formas quadráticas com Hessiana constante. Em todas, a CPO dá $(x_1^*, x_2^*) = (0, 0)$ — basta classificar.

(a) $F(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$. As parciais $\partial F/\partial x_1 = 2x_1$ e $\partial F/\partial x_2 = 2x_2$ zeram em $(0, 0)$. A Hessiana é

$$H_F = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad |H_F| = 4 > 0, \quad F_{11} = 2 > 0,$$

logo **mínimo local** (de fato, global).

(b) $F(x_1, x_2) = -x_1^2 - x_2^2$. Mesmo ponto crítico, e

$$H_F = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad |H_F| = 4 > 0, \quad F_{11} = -2 < 0,$$

→ **máximo local** (global).

(c) $F(x_1, x_2) = -x_1^2 + x_2^2$. Mesmo ponto crítico, mas

$$H_F = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad |H_F| = -4 < 0,$$

→ **ponto de sela**: a função é côncava na direção de x_1 e convexa na direção de x_2 , então $(0, 0)$ não é nem máximo nem mínimo.

26.3.8 Exemplo: Classificando Pontos Críticos

Considere $f(x, y) = x^3 - 3x + y^2 - 4y$. Calculemos os pontos críticos e classifiquemos:

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 3x^2 - 3 \\ 2y - 4 \end{pmatrix} = 0 \quad \implies \quad x^2 = 1, \quad y = 2.$$

Logo há dois pontos críticos: $(1, 2)$ e $(-1, 2)$.

A Hessiana é:

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

- Em $(1, 2)$: $H_f = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $|H| = 12 > 0$, $f_{xx} = 6 > 0$ → **mínimo local**.
- Em $(-1, 2)$: $H_f = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $|H| = -12 < 0$ → **ponto de sela**.

Em R:

Em Python:

Ponto $(1, 2)$: $|H| = 12$, autovalores = $[6. \ 2.]$, tipo = mínimo local

Ponto $(-1, 2)$: $|H| = -12$, autovalores = $[-6. \ 2.]$, tipo = ponto de sela

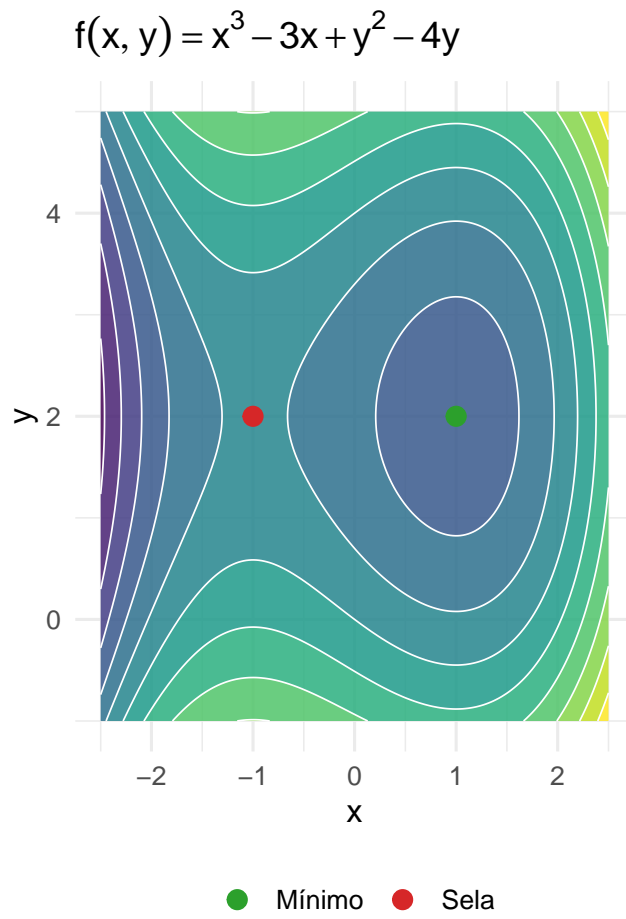


Figura 65: Curvas de nível de $f(x, y) = x^3 - 3x + y^2 - 4y$. Mínimo local em $(1, 2)$ (verde) e ponto de sela em $(-1, 2)$ (vermelho).

27 Otimização com Restrição de Igualdade

27.1 Motivação Econômica

Quase todo problema de decisão econômica envolve uma escolha **restrita**: um consumidor escolhe quanto consumir de cada bem, mas sua renda é fixa; uma firma escolhe quanto contratar de cada insumo para atingir uma dada meta de produção, com preços de fatores dados; um produtor minimiza despesa para entregar uma quantidade contratada. Em todos esses casos, há uma função-objetivo (utilidade, lucro, custo) e uma equação que **não pode ser violada** (restrição orçamentária, isoquanta, meta de produção).

Formalmente, queremos resolver

$$\max_{x_1, x_2} F(x_1, x_2) \quad \text{sujeito a} \quad g(x_1, x_2) = b,$$

onde F é a função-objetivo e $g(x_1, x_2) = b$ é a **restrição de igualdade**. As ferramentas desenvolvidas até aqui — CPO $\nabla F = 0$ e CSO via Hessiana — resolvem o caso **irrestrito**. Quando há restrição, o ponto que zera o gradiente da função pode simplesmente não satisfazer a restrição, e o ótimo restrito tipicamente está em outro lugar.

Este capítulo desenvolve o **método dos multiplicadores de Lagrange**, que resolve o problema restrito convertendo-o numa otimização (essencialmente irrestrita) sobre uma função auxiliar — a Lagrangeana — em três variáveis: x_1 , x_2 e o multiplicador λ .

27.2 Intuição via Substituição (TFI)

Antes de apresentar o Lagrangeano, vale ver como a restrição “encaixa” no problema irrestrito que já sabemos resolver. Suponha que, perto do ótimo, a equação $g(x_1, x_2) = b$ define implicitamente x_2 como função de x_1 — isto é, pelo Teorema da Função Implícita, existe h tal que

$$x_2 = h(x_1), \quad h'(x_1) = -\frac{\partial g / \partial x_1}{\partial g / \partial x_2},$$

desde que $\partial g / \partial x_2 \neq 0$ no ponto. Substituindo na função-objetivo, o problema **vira irrestrito**:

$$\max_{x_1} H(x_1) := F(x_1, h(x_1)).$$

A CPO da função composta dá, pela regra da cadeia,

$$H'(x_1) = \frac{\partial F}{\partial x_1} + \frac{\partial F}{\partial x_2} h'(x_1) = 0.$$

Substituindo $h'(x_1)$ pela expressão da TFI:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} - \frac{\partial F}{\partial x_2} \frac{\partial g/\partial x_1}{\partial g/\partial x_2} = 0 \iff \boxed{\frac{\partial F/\partial x_1}{\partial F/\partial x_2} = \frac{\partial g/\partial x_1}{\partial g/\partial x_2}}$$

Esta é a **condição de tangência**: no ótimo, a curva de nível de F e a curva $g(x_1, x_2) = b$ têm a **mesma inclinação**. De fato, usando diferenciação implícita em cada uma:

- ao longo de $F(x_1, x_2) = C$: $\left. \frac{dx_2}{dx_1} \right|_{\bar{C}} = -\frac{\partial F/\partial x_1}{\partial F/\partial x_2}$;
- ao longo de $g(x_1, x_2) = b$: $\left. \frac{dx_2}{dx_1} \right|_{\bar{b}} = -\frac{\partial g/\partial x_1}{\partial g/\partial x_2}$.

Igualando as duas inclinações chega-se exatamente à equação acima. Geometricamente, no ótimo restrito a curva de nível mais alta da função-objetivo que ainda intercepta $g = b$ **toca** a restrição — não a corta. Se cortasse, haveria pontos da restrição em curvas de nível ainda mais altas, contradizendo a otimalidade.

27.3 A Função Lagrangeana

Reescreva a condição de tangência introduzindo um número λ definido por

$$\lambda := \frac{\partial F/\partial x_2}{\partial g/\partial x_2}.$$

Substituindo de volta na CPO da substituição:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x_2} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x_2} = 0.$$

Junto com a restrição original $g(x_1, x_2) = b$, temos um sistema de **três equações em três incógnitas** (x_1, x_2, λ) . O número λ — que apareceu apenas como atalho algébrico — é o **multiplicador de Lagrange**, uma nova variável endógena do problema.

A descoberta-chave é que essas três equações são exatamente as CPOs (irrestritas) de uma única função auxiliar, a **Lagrangeana**:

$$\boxed{\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda) = F(x_1, x_2) + \lambda [b - g(x_1, x_2)]}.$$

De fato:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = \frac{\partial F}{\partial x_1} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = \frac{\partial F}{\partial x_2} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = b - g(x_1, x_2),$$

e zerar essas três derivadas reproduz tanto a tangência quanto a restrição. Em outras palavras: **o problema restrito de duas variáveis se converte num problema irrestrito de três variáveis**, em que o multiplicador λ entra como variável endógena adicional.

A leitura do termo $\lambda [b - g(x_1, x_2)]$ é direta: a Lagrangeana adiciona à função-objetivo uma “penalidade” proporcional ao quanto a restrição é violada, com λ sendo o “preço-sombra” da restrição. Quando $g = b$, a penalidade é zero e a Lagrangeana coincide com F ; fora disso, λ é justamente o ganho marginal de relaxar a restrição (veremos isto formalmente no problema do consumidor).

27.4 Exemplo: Restrição Linear sobre Forma Quadrática

Considere

$$\max_{x_1, x_2} F(x_1, x_2) = -x_1^2 - x_2^2 \quad \text{sujeito a} \quad x_1 + x_2 = 2.$$

O ótimo **irrestrito** está em $(0, 0)$ — basta zerar o gradiente. Mas $(0, 0)$ não satisfaz $x_1 + x_2 = 2$. Usando a Lagrangeana:

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda) = -x_1^2 - x_2^2 + \lambda(2 - x_1 - x_2).$$

CPO:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = -2x_1 - \lambda = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = -2x_2 - \lambda = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 2 - x_1 - x_2 = 0.$$

Das duas primeiras, $-2x_1 = -2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$. Substituindo na restrição: $2x_1 = 2 \Rightarrow x_1 = x_2 = 1$, e $\lambda = -2$.

27.4.0.1 Visualização: 3D e Curvas de Nível

Dois vistas complementam a intuição. A **3D** mostra a função-objetivo como superfície (paraboloide invertido) e a restrição como curva traçada sobre ela: o ótimo restrito é o **ponto mais alto** dessa curva. A vista por **curvas de nível** projeta o mesmo cenário no plano (x_1, x_2) : o ótimo é onde a maior curva de nível ainda tangencia a reta $x_1 + x_2 = 2$.

Em Python:

```
x1* = 1.0000, x2* = 1.0000, F* = -2.0000
```

27.5 Condições de Segunda Ordem: o Hessiano Orlado

A CPO do Lagrangeano é necessária mas não suficiente. Precisamos garantir que o ponto crítico é um máximo (e não um mínimo ou ponto de sela), e a condição de 2ª ordem precisa ser **adaptada** porque os deslocamentos $(\Delta x_1, \Delta x_2)$ admissíveis estão **restritos** à curva $g(x_1, x_2) = b$.

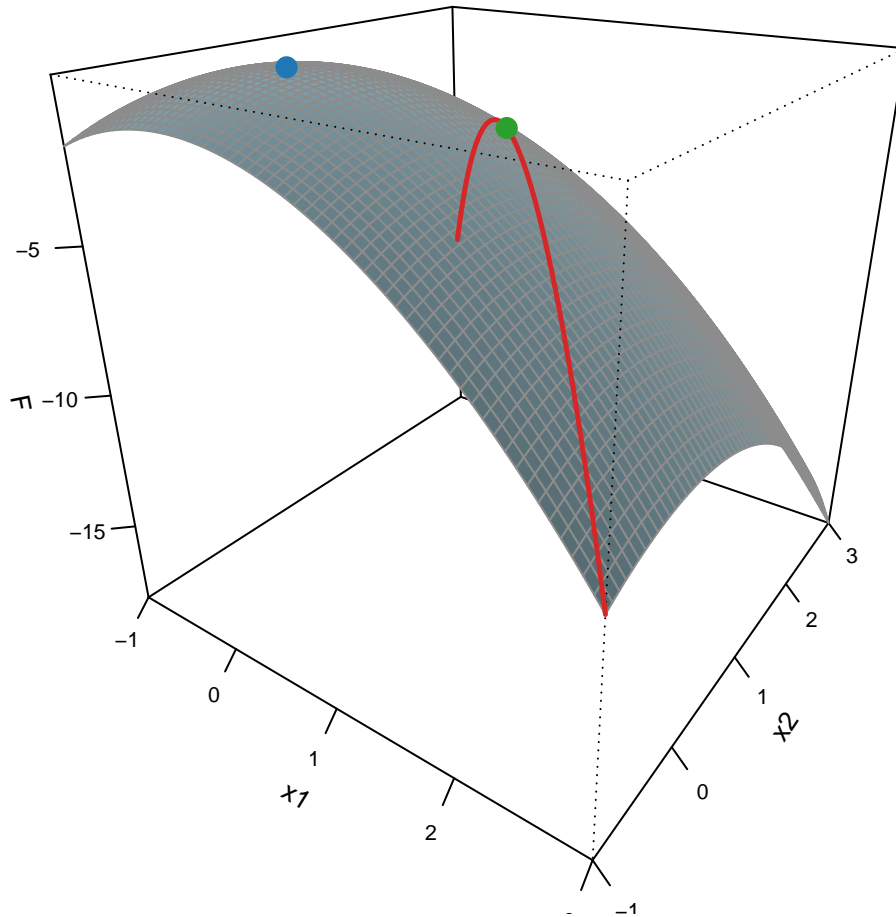


Figura 66: Vista 3D: superfície $F(x_1, x_2) = -x_1^2 - x_2^2$ (paraboloide invertido), restrição $x_1 + x_2 = 2$ traçada sobre a superfície (curva vermelha), ótimo irrestrito $(0, 0, 0)$ em azul e ótimo restrito $(1, 1, -2)$ em verde — ponto mais alto da curva vermelha.

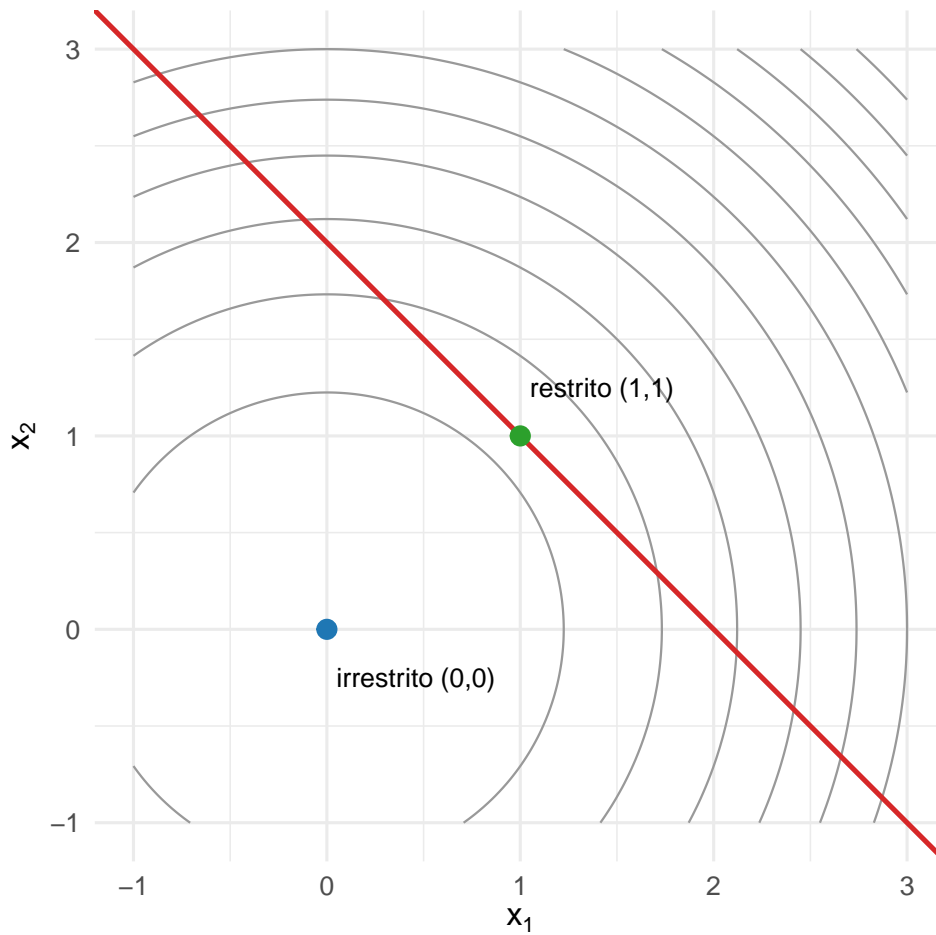


Figura 67: Vista 2D (curvas de nível) de $F = -x_1^2 - x_2^2$ (círculos concêntricos centrados em $(0,0)$, ótimo irrestrito) e a restrição $x_1 + x_2 = 2$. O ótimo restrito $(1,1)$ é o ponto onde a curva de nível mais alta toca a reta — tangência.

27.5.1 Forma Quadrática Restrita

A expansão de Taylor de 2ª ordem da Lagrangeana, no ponto crítico, dá a forma quadrática usual:

$$\mathcal{L}_{11} \Delta x_1^2 + 2 \mathcal{L}_{12} \Delta x_1 \Delta x_2 + \mathcal{L}_{22} \Delta x_2^2,$$

onde $\mathcal{L}_{ij} = \partial^2 \mathcal{L} / \partial x_i \partial x_j$ avaliada no ponto crítico (note que, como $\mathcal{L} = F - \lambda(g - b)$, tem-se $\mathcal{L}_{ij} = F_{ij} - \lambda g_{ij}$). Para que o ponto seja um **máximo restrito**, exigimos que essa forma quadrática seja **negativa** para todos os deslocamentos $(\Delta x_1, \Delta x_2)$ **admissíveis**, isto é, que satisfaçam (em primeira ordem) a restrição:

$$g_1 \Delta x_1 + g_2 \Delta x_2 = 0 \iff \Delta x_2 = -\Delta x_1 \frac{g_1}{g_2},$$

com $g_i := \partial g / \partial x_i$. Substituindo Δx_2 na forma quadrática:

$$\mathcal{L}_{11} \Delta x_1^2 - 2 \mathcal{L}_{12} \frac{g_1}{g_2} \Delta x_1^2 + \mathcal{L}_{22} \frac{g_1^2}{g_2^2} \Delta x_1^2 < 0,$$

ou, reagrupando e multiplicando por $g_2^2 > 0$,

$$\mathcal{L}_{11} g_2^2 - 2 \mathcal{L}_{12} g_1 g_2 + \mathcal{L}_{22} g_1^2 < 0.$$

27.5.2 O Determinante do Hessiano Orlado

O lado esquerdo dessa desigualdade é, com sinal trocado, exatamente o determinante da seguinte matriz 3×3 , chamada **Hessiano orlado**:

$$\bar{H} = \begin{pmatrix} \mathcal{L}_{11} & \mathcal{L}_{12} & g_1 \\ \mathcal{L}_{21} & \mathcal{L}_{22} & g_2 \\ g_1 & g_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Expandindo $|\bar{H}|$ pela última linha (cofatores):

$$|\bar{H}| = g_1 (\mathcal{L}_{12} g_2 - \mathcal{L}_{22} g_1) - g_2 (\mathcal{L}_{11} g_2 - \mathcal{L}_{12} g_1) = -(\mathcal{L}_{11} g_2^2 - 2 \mathcal{L}_{12} g_1 g_2 + \mathcal{L}_{22} g_1^2).$$

Logo:

Caso (n = 2, r = 1)	Forma quadrática restrita	$ \bar{H} $
Máximo restrito	< 0	> 0
Mínimo restrito	> 0	< 0

27.5.3 Caso Geral

Para n variáveis e r restrições, monta-se o Hessiano orlado completo (com r linhas/colunas extras correspondentes às restrições), e analisa-se o **sinal** dos determinantes dos menores principais líderes orlados a partir de uma certa ordem:

- **Máximo restrito:** os $n - r$ últimos menores orlados **alternam de sinal**, com $|\bar{H}_n|$ tendo o sinal de $(-1)^n$.
- **Mínimo restrito:** os $n - r$ últimos menores orlados têm **todos o mesmo sinal**, especificamente $(-1)^r$.

No caso $n = 2$, $r = 1$, tem-se $(-1)^n = +1$ (máximo) e $(-1)^r = -1$ (mínimo), recuperando a tabela acima.

27.6 Teorema do Envelope

A maquinaria Lagrangeana + CPO + CSO entrega o ponto ótimo $x^*(a)$ e o multiplicador $\lambda^*(a)$ como funções dos parâmetros $a = (a_1, \dots, a_k)$ do problema. Resta uma pergunta natural: como a **função-valor** $V(a) = f(x^*(a); a)$ varia quando os parâmetros mudam? A resposta é o **teorema do envelope**, que reduz $\partial V / \partial a_j$ a uma derivada parcial direta da Lagrangeana avaliada no ponto crítico.

27.6.1 Enunciado

Considere o problema parametrizado

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x; a) \quad \text{s.a.} \quad g^i(x; a) = 0, \quad i = 1, \dots, r,$$

com Lagrangeana $\mathcal{L}(x, \lambda; a) = f(x; a) + \sum_i \lambda_i g^i(x; a)$, e suponha que $x^*(a)$ e $\lambda^*(a)$ satisfaçam CPO e CSO em torno de a . Defina a função-valor $V(a) = f(x^*(a); a)$. Então:

$$\boxed{\frac{\partial V}{\partial a_j} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_j} \Big|_{x=x^*(a), \lambda=\lambda^*(a)}}.$$

O mesmo vale, mutatis mutandis, para problemas de máximo.

27.6.2 Intuição: Por que os Efeitos Indiretos Cancelam

Variar a_j tem dois efeitos sobre V :

- **Efeito direto:** a_j aparece explicitamente em f e em g^i — e portanto em \mathcal{L} .
- **Efeito indireto:** mudar a_j desloca o ótimo $x^*(a)$ (e o multiplicador), o que por sua vez altera f .

O teorema afirma que **o efeito indireto cancela**. A razão é simples: no ponto ótimo, $\partial\mathcal{L}/\partial x_i = 0$ para todo i , de modo que pequenas perturbações em x^* não mexem em \mathcal{L} a primeira ordem. O multiplicador λ^* entra apenas multiplicando $g^i(x^*; a) = 0$, então perturbações em λ^* também não importam para V no ponto factível.

Geometricamente: $V(a)$ é o **envelope** da família de funções $\mathcal{L}(x_0, \lambda_0; \cdot)$ indexada por (x_0, λ_0) — cada membro da família tangencia V no parâmetro a_0 onde $(x_0, \lambda_0) = (x^*(a_0), \lambda^*(a_0))$. Daí o nome.

27.6.3 Prova

Diferenciando $V(a) = f(x^*(a); a)$ em a_j pela regra da cadeia:

$$\frac{\partial V}{\partial a_j} = \left. \frac{\partial f}{\partial a_j} \right|_* + \sum_{i=1}^n \left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_* \frac{\partial x_i^*}{\partial a_j}.$$

Pelas CPOs, $\left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_* = -\sum_k \lambda_k^* \left. \frac{\partial g^k}{\partial x_i} \right|_*$. Substituindo:

$$\frac{\partial V}{\partial a_j} = \left. \frac{\partial f}{\partial a_j} \right|_* - \sum_k \lambda_k^* \sum_i \left. \frac{\partial g^k}{\partial x_i} \right|_* \frac{\partial x_i^*}{\partial a_j}.$$

Por outro lado, as restrições $g^k(x^*(a); a) = 0$ valem identicamente em a ; diferenciando em a_j :

$$\sum_i \left. \frac{\partial g^k}{\partial x_i} \right|_* \frac{\partial x_i^*}{\partial a_j} = -\left. \frac{\partial g^k}{\partial a_j} \right|_*.$$

Substituindo de volta:

$$\frac{\partial V}{\partial a_j} = \left. \frac{\partial f}{\partial a_j} \right|_* + \sum_k \lambda_k^* \left. \frac{\partial g^k}{\partial a_j} \right|_* = \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_j} \right|_*. \quad \blacksquare$$

27.6.4 Interpretação do Multiplicador como Preço-Sombra

Um caso especial: se o parâmetro a_j entra apenas como **deslocamento** da i -ésima restrição — i.e., $g^i(x; a) = h^i(x) - c_i$ com $a_j = c_i$ — então $\partial\mathcal{L}/\partial c_i = -\lambda_i$ (para Lagrangeana na forma $\mathcal{L} = f + \lambda[c - h]$, comum em economia) e

$$\frac{\partial V}{\partial c_i} = \lambda_i^*.$$

Esta é a **interpretação do multiplicador como preço-sombra**: λ_i^* mede quanto o valor ótimo V aumenta por unidade marginal de relaxamento da i -ésima restrição. O λ que aparecia abstrato na Lagrangeana ganha conteúdo econômico explícito.

27.6.5 Aplicações Canônicas

O teorema do envelope é uma das ferramentas mais reutilizadas em microeconomia. Trabalhamos abaixo os quatro casos clássicos da teoria do produtor e do consumidor, em ordem: minimização de custo, maximização de lucro, maximização de utilidade e minimização de despesa. Em cada caso, o procedimento é o mesmo: monta-se o problema, escreve-se a Lagrangeana, deriva-se diretamente nos parâmetros, e a identidade resultante carrega nome próprio na literatura.

27.6.5.1 Lema de Shephard (Função Custo)

Problema. A firma com tecnologia $f(k, l)$ minimiza o custo dos insumos para atingir um nível de produção \bar{Q} , a preços de fator (r, w) :

$$\min_{k, l \geq 0} rk + wl \quad \text{s.a.} \quad f(k, l) = \bar{Q}.$$

Lagrangeana. $\mathcal{L}(k, l, \lambda; r, w, \bar{Q}) = rk + wl + \lambda[\bar{Q} - f(k, l)]$. Parâmetros: $a = (r, w, \bar{Q})$. Função-valor: $C^*(r, w, \bar{Q}) = rk^*(\cdot) + wl^*(\cdot)$.

Derivadas pelo envelope. Avaliando $\partial\mathcal{L}/\partial a_j$ no ponto crítico:

$$\frac{\partial C^*}{\partial r} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} \Big|_* = k^*, \quad \frac{\partial C^*}{\partial w} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w} \Big|_* = l^*, \quad \frac{\partial C^*}{\partial \bar{Q}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{Q}} \Big|_* = \lambda^*.$$

Resultado. As duas primeiras identidades são o **lema de Shephard**: derivar a função custo no preço de um fator recupera a demanda condicional por aquele fator. A terceira identifica λ^* como **custo marginal** $\partial C^*/\partial \bar{Q}$.

Comentário. A utilidade prática é dupla. Primeiro, a função custo encapsula toda a estrutura de demanda condicional por fatores — basta diferenciá-la nos preços, sem precisar passar por estática comparativa do sistema de CPOs. Segundo, o multiplicador λ , que aparecia como artefato matemático na Lagrangeana, ganha aqui conteúdo econômico explícito: é o preço-sombra da restrição de produção, ou seja, quanto custaria à firma produzir uma unidade adicional de \bar{Q} .

Exemplo: Cobb-Douglas $f(k, l) = k^\alpha l^{1-\alpha}$. A condição de tangência $f_k/f_l = r/w$ se escreve $\alpha l/[(1-\alpha)k] = r/w$, dando $l = [(1-\alpha)r/(\alpha w)]k$. Substituindo na restrição $k^\alpha l^{1-\alpha} = \bar{Q}$,

$$k^\alpha \left[\frac{(1-\alpha)r}{\alpha w} \right]^{1-\alpha} k^{1-\alpha} = \bar{Q} \iff k \left[\frac{(1-\alpha)r}{\alpha w} \right]^{1-\alpha} = \bar{Q},$$

de modo que

$$k^* = \bar{Q} \left[\frac{\alpha}{1-\alpha} \cdot \frac{w}{r} \right]^{1-\alpha}, \quad l^* = \bar{Q} \left[\frac{1-\alpha}{\alpha} \cdot \frac{r}{w} \right]^\alpha.$$

Substituindo em $C = rk + wl$ e somando ao denominador comum $\alpha^\alpha(1-\alpha)^{1-\alpha}$, a função custo fica:

$$C^*(r, w, \bar{Q}) = \bar{Q} \frac{r^\alpha w^{1-\alpha}}{\alpha^\alpha (1-\alpha)^{1-\alpha}}.$$

Derivando em r e reagrupando potências:

$$\frac{\partial C^*}{\partial r} = \alpha \bar{Q} \frac{r^{\alpha-1} w^{1-\alpha}}{\alpha^\alpha (1-\alpha)^{1-\alpha}} = \bar{Q} \left[\frac{\alpha}{1-\alpha} \cdot \frac{w}{r} \right]^{1-\alpha} = k^*. \checkmark$$

Derivando em \bar{Q} :

$$\frac{\partial C^*}{\partial \bar{Q}} = \frac{r^\alpha w^{1-\alpha}}{\alpha^\alpha (1-\alpha)^{1-\alpha}} = \frac{C^*}{\bar{Q}} = \lambda^*.$$

(Tratamento numérico desse caso — incluindo verificação por diferenças finitas — no capítulo de aplicações econômicas.)

27.6.5.2 Lema de Hotelling (Função Lucro)

Problema. A firma competitiva escolhe insumos (k, l) para maximizar o lucro a preços de produto e fatores (p, r, w) :

$$\max_{k, l \geq 0} \pi(k, l; p, r, w) = p f(k, l) - r k - w l.$$

Este é um problema **sem restrição** — caso especial do envelope com $r = 0$ restrições, em que a Lagrangeana se reduz à própria função-objetivo. As CPOs são $p f_k = r$ e $p f_l = w$.

Função-valor. $\pi^*(p, r, w) = p f(k^*, l^*) - r k^* - w l^*$.

Derivadas pelo envelope. Como $\mathcal{L} = \pi$, derivadas parciais diretas avaliadas no ótimo:

$$\frac{\partial \pi^*}{\partial p} = \frac{\partial \pi}{\partial p} \Big|_* = f(k^*, l^*) = Q^*, \quad \frac{\partial \pi^*}{\partial r} = -k^*, \quad \frac{\partial \pi^*}{\partial w} = -l^*.$$

Resultado. As três identidades são o **lema de Hotelling**: derivar a função lucro no preço do produto recupera a oferta ótima Q^* ; derivar nos preços dos fatores recupera as demandas (incondicionais) com sinal trocado.

Comentário. A simetria com Shephard é instrutiva. Em ambos os casos, a função-valor codifica toda a estrutura de oferta/demanda da firma, recuperada por diferenciação direta. As diferenças são duas. (i) Aqui as demandas são **incondicionais** — o nível de produção Q é endógeno, ajustado pela firma —, enquanto em Shephard são **condicionais** a \bar{Q} fixo. (ii) O sinal das derivadas em fatores é negativo porque r, w entram com sinal negativo no lucro; em Shephard era positivo porque entravam positivamente no custo. Combinados, Shephard e Hotelling permitem reconstruir toda a teoria do produtor partindo apenas de funções-valor.

Exemplo: Cobb-Douglas $f(k, l) = k^{1/4}l^{1/4}$. Retornos decrescentes à escala ($\alpha + \beta = 1/2 < 1$) garantem que o problema de máximo irrestrito tem solução finita. As CPOs $p f_k = r$ e $p f_l = w$ se escrevem

$$\frac{p}{4} k^{-3/4} l^{1/4} = r, \quad \frac{p}{4} k^{1/4} l^{-3/4} = w.$$

Dividindo membro a membro, $l/k = r/w$, ou seja, $l = (r/w)k$. Substituindo na primeira CPO:

$$\frac{p}{4} k^{-3/4} \left(\frac{r}{w}\right)^{1/4} k^{1/4} = r \iff k^{-1/2} = \frac{4r^{3/4}w^{1/4}}{p} \implies k^* = \frac{p^2}{16r^{3/2}w^{1/2}}.$$

Por simetria, $l^* = p^2/(16r^{1/2}w^{3/2})$. Produção e lucro ótimos:

$$Q^* = (k^* l^*)^{1/4} = \frac{p}{4(rw)^{1/2}}, \quad \pi^* = pQ^* - rk^* - wl^* = \frac{p^2}{4(rw)^{1/2}} - 2 \cdot \frac{p^2}{16(rw)^{1/2}} = \frac{p^2}{8(rw)^{1/2}}.$$

(Note: $rk^* = p^2/(16(rw)^{1/2})$ e idem para wl^* — as duas parcelas de custo são iguais por simetria $\alpha = \beta$.)

Verificando Hotelling:

$$\frac{\partial \pi^*}{\partial p} = \frac{2p}{8(rw)^{1/2}} = \frac{p}{4(rw)^{1/2}} = Q^*. \checkmark$$

$$\frac{\partial \pi^*}{\partial r} = \frac{p^2}{8} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) (rw)^{-3/2} w = -\frac{p^2 w}{16(rw)^{3/2}} = -\frac{p^2}{16r^{3/2}w^{1/2}} = -k^*. \checkmark$$

Análogo para w : $\partial \pi^*/\partial w = -l^*$.

27.6.5.3 Identidade de Roy (Função Utilidade Indireta)

Problema. O consumidor escolhe quantidades (x_1, x_2) para maximizar a utilidade U sujeito à restrição orçamentária:

$$\max_{x_1, x_2 \geq 0} U(x_1, x_2) \quad \text{s.a.} \quad p_1 x_1 + p_2 x_2 = R.$$

Lagrangiana. $\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda; p_1, p_2, R) = U(x_1, x_2) + \lambda [R - p_1 x_1 - p_2 x_2]$. Parâmetros: $a = (p_1, p_2, R)$. Função-valor: $V^*(p_1, p_2, R) = U(x_1^*, x_2^*)$, chamada **utilidade indireta**.

Derivadas pelo envelope. Avaliando $\partial \mathcal{L}/\partial a_j$ no ponto crítico:

$$\frac{\partial V^*}{\partial p_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_i} \Big|_* = -\lambda^* x_i^*, \quad \frac{\partial V^*}{\partial R} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial R} \Big|_* = \lambda^*.$$

Resultado. Dividindo as duas identidades, λ^* cancela e obtemos a **identidade de Roy**:

$$x_i^*(p_1, p_2, R) = - \frac{\partial V^*/\partial p_i}{\partial V^*/\partial R}.$$

A demanda Marshalliana ótima por um bem é obtida diferenciando a utilidade indireta no preço próprio e dividindo pela derivada na renda, com sinal trocado.

Comentário. O multiplicador λ^* tem aqui interpretação natural como **utilidade marginal da renda**: quanto a utilidade ótima sobe por unidade adicional de orçamento. Repare como ele cancela quando tomamos a razão na identidade — só sobra uma relação observável entre derivadas de V^* e a demanda. Isso resolve um problema empírico real: estimar funções de demanda diretamente é difícil (são funções vetoriais com restrições de simetria de Slutsky), mas estimar V^* e derivá-la é, em muitos casos, mais tratável. A função utilidade indireta também serve para análise de bem-estar — comparar V^* antes e depois de um choque de preços ou renda mede ganho/perda de utilidade do consumidor.

Exemplo: Cobb-Douglas $U(x_1, x_2) = x_1^\alpha x_2^{1-\alpha}$. As demandas Marshallianas, já obtidas na maximização de utilidade do consumidor, são

$$x_1^*(p_1, p_2, R) = \frac{\alpha R}{p_1}, \quad x_2^*(p_1, p_2, R) = \frac{(1-\alpha) R}{p_2}.$$

Substituindo em U obtemos a **utilidade indireta**:

$$\begin{aligned} V^*(p_1, p_2, R) &= \left(\frac{\alpha R}{p_1}\right)^\alpha \left(\frac{(1-\alpha) R}{p_2}\right)^{1-\alpha} \\ &= \alpha^\alpha (1-\alpha)^{1-\alpha} \frac{R^{\alpha+(1-\alpha)}}{p_1^\alpha p_2^{1-\alpha}} = \alpha^\alpha (1-\alpha)^{1-\alpha} \frac{R}{p_1^\alpha p_2^{1-\alpha}}. \end{aligned}$$

Derivadas:

$$\frac{\partial V^*}{\partial p_1} = \alpha^\alpha (1-\alpha)^{1-\alpha} R \cdot (-\alpha) p_1^{-\alpha-1} p_2^{-(1-\alpha)} = -\frac{\alpha}{p_1} V^*,$$

$$\frac{\partial V^*}{\partial R} = \frac{\alpha^\alpha (1-\alpha)^{1-\alpha}}{p_1^\alpha p_2^{1-\alpha}} = \frac{V^*}{R}.$$

Aplicando a identidade de Roy:

$$-\frac{\partial V^*/\partial p_1}{\partial V^*/\partial R} = -\frac{-\alpha V^*/p_1}{V^*/R} = \frac{\alpha R}{p_1} = x_1^*. \checkmark$$

Caso simétrico $\alpha = 1/2$ (feito no quadro): $V^*(p_1, p_2, R) = R/[2(p_1 p_2)^{1/2}]$, com $\partial V^*/\partial p_1 = -R p_2/[4(p_1 p_2)^{3/2}]$ e $\partial V^*/\partial R = 1/[2(p_1 p_2)^{1/2}]$. A razão Roy retorna $R/(2p_1) = x_1^*$.

27.6.5.4 Demandas Hicksianas (Função Despesa)

Problema. O consumidor minimiza o gasto necessário para atingir um nível de utilidade \bar{U} a preços (p_1, p_2) :

$$\min_{x_1, x_2 \geq 0} p_1 x_1 + p_2 x_2 \quad \text{s.a.} \quad U(x_1, x_2) = \bar{U}.$$

Lagrangiana. $\mathcal{L}(x_1, x_2, \mu; p_1, p_2, \bar{U}) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \mu [\bar{U} - U(x_1, x_2)]$. Parâmetros: $a = (p_1, p_2, \bar{U})$. Função-valor: $E^*(p_1, p_2, \bar{U}) = p_1 h_1^* + p_2 h_2^*$, chamada **função despesa**, onde h_i^* é a **demanda hicksiana** (ou compensada) pelo bem i .

Derivadas pelo envelope. Avaliando $\partial \mathcal{L} / \partial a_j$ no ponto crítico:

$$\frac{\partial E^*}{\partial p_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_i} \Big|_* = h_i^*, \quad \frac{\partial E^*}{\partial \bar{U}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{U}} \Big|_* = \mu^*.$$

Resultado. A primeira identidade é o **análogo de Shephard para o consumidor**: derivar a função despesa no preço de um bem recupera a demanda hicksiana por aquele bem. A segunda identifica μ^* como o **custo marginal de utilidade** — quanto gasto adicional é necessário para atingir uma unidade a mais de \bar{U} .

Comentário. O problema de despesa é **dual ao de maximização de utilidade**: ambos descrevem o mesmo conjunto de escolhas ótimas, trocando os papéis de objetivo e restrição. A diferença prática é que as demandas hicksianas $h_i^*(p, \bar{U})$ mantêm **utilidade** fixa, enquanto as Marshallianas $x_i^*(p, R)$ mantêm **renda** fixa. Isso é central na análise de bem-estar: a variação compensatória de um choque de preços usa E^* (gasto necessário para manter \bar{U}) em vez de x_i^* (que mistura efeito substituição e efeito renda). A equação de Slutsky formaliza essa decomposição. Note também a simetria matemática: Shephard na firma (custo) e este resultado no consumidor (despesa) têm exatamente a mesma estrutura — não é coincidência, é a dualidade neoclássica entre produtor e consumidor.

Exemplo: Cobb-Douglas $U(x_1, x_2) = x_1^\alpha x_2^{1-\alpha}$. A condição de tangência $U_1/U_2 = p_1/p_2$ dá $\alpha x_2 / [(1-\alpha) x_1] = p_1/p_2$, ou seja, $x_2 = [(1-\alpha) p_1 / (\alpha p_2)] x_1$. Substituindo em $U(x_1, x_2) = \bar{U}$:

$$x_1^\alpha \left[\frac{(1-\alpha) p_1}{\alpha p_2} \right]^{1-\alpha} x_1^{1-\alpha} = \bar{U} \iff x_1 \left[\frac{(1-\alpha) p_1}{\alpha p_2} \right]^{1-\alpha} = \bar{U}.$$

Logo as demandas hicksianas:

$$h_1^*(p_1, p_2, \bar{U}) = \bar{U} \left[\frac{\alpha p_2}{(1-\alpha) p_1} \right]^{1-\alpha}, \quad h_2^*(p_1, p_2, \bar{U}) = \bar{U} \left[\frac{(1-\alpha) p_1}{\alpha p_2} \right]^\alpha.$$

Função despesa (mesma simplificação do caso Shephard):

$$E^*(p_1, p_2, \bar{U}) = p_1 h_1^* + p_2 h_2^* = \bar{U} \frac{p_1^\alpha p_2^{1-\alpha}}{\alpha^\alpha (1-\alpha)^{1-\alpha}}.$$

Verificação do análogo de Shephard:

$$\frac{\partial E^*}{\partial p_1} = \alpha \bar{U} \frac{p_1^{\alpha-1} p_2^{1-\alpha}}{\alpha^\alpha (1-\alpha)^{1-\alpha}} = \bar{U} \left[\frac{\alpha p_2}{(1-\alpha) p_1} \right]^{1-\alpha} = h_1^*. \checkmark$$

Custo marginal de utilidade:

$$\frac{\partial E^*}{\partial \bar{U}} = \frac{p_1^\alpha p_2^{1-\alpha}}{\alpha^\alpha (1-\alpha)^{1-\alpha}} = \frac{E^*}{\bar{U}} = \mu^*.$$

A dualidade com Shephard é perfeita: $E^*(p_1, p_2, \bar{U})$ e $C^*(r, w, \bar{Q})$ têm exatamente a mesma forma funcional, com (\bar{U}, p_1, p_2) no consumidor desempenhando o papel de (\bar{Q}, r, w) na firma.

Em todos os quatro casos, **uma derivada parcial direta substitui um cálculo de derivada total via estática comparativa** — daí o poder prático do resultado.

28 Aplicações Econômicas

28.1 Motivação

Os dois capítulos anteriores desenvolveram o ferramental matemático da otimização: condições de primeira e segunda ordem para o caso **sem restrição** (Hessiana, formas quadráticas, critério de Sylvester) e para o caso **com restrição de igualdade** (Lagrangeana, Hessiano orlado). Este capítulo coleta as **aplicações econômicas** clássicas que dão sentido a esse ferramental: maximização de lucro de firmas competitivas e monopolistas, escolha de insumos no produtor neoclássico, e maximização de utilidade do consumidor sob restrição orçamentária.

A organização segue as duas seções de teoria: primeiro problemas **sem restrição** (firma escolhe quantidade ou insumos para maximizar lucro), depois problemas **com restrição** (consumidor maximiza utilidade sujeito à renda). Cada bloco vai do caso concreto — com forma funcional explícita e cálculo numérico — para a generalização abstrata, encerrando com estática comparativa.

28.2 Parte I — Aplicações Sem Restrição

28.2.1 Firma Competitiva: Caso Univariado

Uma firma toma o preço p como dado e escolhe a quantidade q que maximiza o lucro:

$$\pi(q) = pq - C(q),$$

onde $C(q) = c_0 + c_1q + \frac{1}{2}c_2q^2$ é uma função custo quadrática (custo marginal crescente, $c_2 > 0$).

28.2.1.1 Resolução Analítica

CPO:

$$\pi'(q) = p - C'(q) = p - c_1 - c_2q = 0 \quad \implies \quad q^* = \frac{p - c_1}{c_2}.$$

Interpretação econômica: $p = C'(q^*)$ — preço igual ao custo marginal. Esta é a condição de primeira ordem clássica da firma competitiva.

CSO:

$$\pi''(q) = -C''(q) = -c_2 < 0,$$

confirmando q^* como **máximo**. Custo marginal crescente garante a concavidade do lucro.

28.2.1.2 Verificação Numérica

$$q^* = 22.50, \quad (q^*) = 496.25, \quad ''(q^*) = -2.00$$

Verificação numérica: $q^* = 22.5000$

$$q^* \text{ (analítico)} = 22.50$$

$$q^* \text{ (numérico)} = 22.5000$$

28.2.2 O Monopolista

Um monopolista enfrenta a curva de demanda inversa $p(q) = A - Bq$ (com $A, B > 0$) e o mesmo custo $C(q) = c_0 + c_1q + \frac{1}{2}c_2q^2$. Seu lucro é:

$$\pi_M(q) = p(q)q - C(q) = (A - Bq)q - c_0 - c_1q - \frac{1}{2}c_2q^2.$$

CPO:

$$\pi'_M(q) = A - 2Bq - c_1 - c_2q = 0 \quad \Rightarrow \quad q_M = \frac{A - c_1}{2B + c_2}.$$

A condição equivalente é **receita marginal = custo marginal** (RMg = CMg): a derivada da receita $R(q) = (A - Bq)q$ é $R'(q) = A - 2Bq$, e a derivada do custo é $C'(q) = c_1 + c_2q$.

CSO:

$$\pi''_M(q) = -2B - c_2 < 0,$$

confirmando máximo (curva de demanda decrescente combina com custo marginal crescente para garantir concavidade).

Comparação com o competitivo: o competitivo trataria p como dado e produziria $q^* = (p - c_1)/c_2$; o monopolista internaliza o efeito de seu output sobre o preço, produzindo **menos**, $q_M < q^*$ (para parâmetros equivalentes). Esta é a **distorção monopolística** clássica.

$$\text{Monopolista: } q_M = 23.75, \quad p_M = 76.25, \quad = 1118.12$$

$$\text{Competitivo (a } p = p_M): \quad q_C = 35.62$$

$$\text{Distorção monopolística: } q_C - q_M = 11.88$$

$$\text{Monopolista: } q_M = 23.75, \quad p_M = 76.25, \quad = 1118.12$$

$$\text{Competitivo (a } p = p_M): \quad q_C = 35.62$$

$$\text{Distorção monopolística: } q_C - q_M = 11.88$$

28.2.3 Monopolista com Discriminação de Preços

Considere agora um monopolista que vende em **dois mercados separados** (sem arbitragem entre eles), com demandas inversas distintas e custo conjunto. Por exemplo:

$$P_1 = 50 - 5Q_1, \quad P_2 = 100 - 10Q_2, \quad C(Q_1 + Q_2) = 90 + 20(Q_1 + Q_2).$$

Como o monopolista escolhe quanto produzir para cada mercado, o problema é de duas variáveis:

$$\max_{Q_1, Q_2} \pi(Q_1, Q_2) = P_1 Q_1 + P_2 Q_2 - C(Q_1 + Q_2).$$

Substituindo,

$$\pi(Q_1, Q_2) = 50Q_1 - 5Q_1^2 + 100Q_2 - 10Q_2^2 - 90 - 20(Q_1 + Q_2).$$

CPO:

$$\frac{\partial \pi}{\partial Q_1} = 50 - 10Q_1 - 20 = 0 \implies Q_1^* = 3,$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial Q_2} = 100 - 20Q_2 - 20 = 0 \implies Q_2^* = 4.$$

A regra geral atrás dessas equações é **receita marginal de cada mercado = custo marginal comum**: $RMg_i(Q_i) = C'(Q_1 + Q_2)$ para $i = 1, 2$.

CSO:

$$H_\pi = \begin{pmatrix} -10 & 0 \\ 0 & -20 \end{pmatrix}, \quad |H_\pi| = 200 > 0, \quad \pi_{Q_1 Q_1} = -10 < 0,$$

logo $(Q_1^*, Q_2^*) = (3, 4)$ é máximo. Os preços de equilíbrio são $P_1^* = 35$ e $P_2^* = 60$, e o lucro $\pi^* = 115$.

Interpretação econômica. O preço é maior no mercado **mais inelástico**: em $(Q_2^*, P_2^*) = (4, 60)$ a elasticidade-preço da demanda é $|\varepsilon_2| = \frac{1}{10} \cdot \frac{60}{4} = 1,5$, enquanto em $(Q_1^*, P_1^*) = (3, 35)$ tem-se $|\varepsilon_1| = \frac{1}{5} \cdot \frac{35}{3} \approx 2,33$. Esta é a **discriminação de preços de terceiro grau**: cobra-se mais de quem reage menos ao preço.

$$Q1^* = 3, \quad Q2^* = 4, \quad P1^* = 35, \quad P2^* = 60, \quad \pi^* = 115$$

$$| \varepsilon_1 | = 2.33, \quad | \varepsilon_2 | = 1.50 \text{ (mais inelástico tem preço maior)}$$

$$Q1^* = 3, \quad Q2^* = 4, \quad P1^* = 35, \quad P2^* = 60, \quad \pi^* = 115$$

$$| \varepsilon_1 | = 2.33, \quad | \varepsilon_2 | = 1.50 \text{ (mais inelástico tem preço maior)}$$

28.2.4 Maximização de Lucro com Dois Insumos

A firma combina capital K e trabalho L para produzir $Q = f(K, L)$, vendendo o produto ao preço p e pagando r pelo aluguel do capital e w pelo trabalho — todos exógenos. O lucro é

$$\pi(K, L) = p f(K, L) - r K - w L,$$

e a firma escolhe $(K, L) \geq 0$ que maximiza π . Vamos primeiro tratar o caso concreto (Cobb-Douglas) para fixar o cálculo da Hessiana, depois generalizar para f não-especificada com hipóteses sobre as derivadas, e fechar com estática comparativa.

28.2.4.1 Caso Cobb-Douglas

Tome $Q = f(K, L) = A K^\alpha L^\beta$ com $\alpha + \beta < 1$ (rendimentos decrescentes de escala — necessário para máximo interior). O lucro é

$$\pi(K, L) = p A K^\alpha L^\beta - r K - w L.$$

CPO ($\nabla\pi = 0$):

$$\frac{\partial\pi}{\partial K} = p A \alpha K^{\alpha-1} L^\beta - r = 0,$$

$$\frac{\partial\pi}{\partial L} = p A \beta K^\alpha L^{\beta-1} - w = 0.$$

Em palavras: **valor do produto marginal = preço do fator** para cada insumo.

Dividindo as duas equações:

$$\frac{\alpha L}{\beta K} = \frac{r}{w} \implies K = \frac{\alpha w}{\beta r} L,$$

uma relação fixa entre capital e trabalho ótimos, dada a razão de preços.

CSO (Hessiana):

$$H_\pi = \begin{pmatrix} \alpha(\alpha-1)pAK^{\alpha-2}L^\beta & \alpha\beta pAK^{\alpha-1}L^{\beta-1} \\ \alpha\beta pAK^{\alpha-1}L^{\beta-1} & \beta(\beta-1)pAK^\alpha L^{\beta-2} \end{pmatrix}.$$

Para $\alpha, \beta \in (0, 1)$ e $\alpha + \beta < 1$:

- $H_{\pi, KK} = \alpha(\alpha-1)(\cdot) < 0$;
- $|H_\pi| = (1-\alpha-\beta)\alpha\beta(pA)^2 K^{2\alpha-2} L^{2\beta-2} > 0$.

Logo a Hessiana é **definida negativa** e qualquer ponto crítico é máximo. A condição $\alpha + \beta < 1$ é essencial: com rendimentos constantes ou crescentes, o lucro não tem máximo interior (a firma quer produzir indefinidamente ou nada).

$$K^* = 455.111, L^* = 303.407, Q^* = 113.778, \pi^* = 227.556$$

$$|H| = 0.0000 \text{ (esperado } > 0), H_{KK} = -0.0013 \text{ (esperado } < 0)$$

$$K^* = 455.111, L^* = 303.407, Q^* = 113.778, \pi^* = 227.556$$

$$|H| = 0.0000 \text{ (esperado } > 0)$$

$$H_{KK} = -0.0013 \text{ (esperado } < 0)$$

28.2.4.2 Caso Geral

Generalizando para $f(K, L)$ **não-especificada**, mas sob **hipóteses padrão sobre as derivadas parciais** — a forma usada em toda a teoria neoclássica.

Hipóteses sobre f (produção neoclássica suave):

- $f_K, f_L > 0$ — produtos marginais positivos;
- $f_{KK}, f_{LL} < 0$ — produtos marginais decrescentes;
- $f_{KL} > 0$ — capital e trabalho complementam-se na produção;
- f estritamente côncava: $f_{KK} f_{LL} - f_{KL}^2 > 0$.

CPO. Mesma estrutura de qualquer maximização sem restrição:

$$\frac{\partial \pi}{\partial K} = p f_K - r = 0, \quad \frac{\partial \pi}{\partial L} = p f_L - w = 0,$$

ou, equivalentemente,

$$\boxed{f_K = \frac{r}{p}, \quad f_L = \frac{w}{p}.}$$

Interpretação: o **valor do produto marginal** de cada insumo (preço \times produto marginal) iguala o preço do insumo. É a condição clássica de eficiência produtiva.

CSO. A Hessiana do lucro é

$$H_\pi = p \begin{pmatrix} f_{KK} & f_{KL} \\ f_{LK} & f_{LL} \end{pmatrix}, \quad |H_\pi| = p^2 (f_{KK} f_{LL} - f_{KL}^2).$$

Pelas hipóteses, $\pi_{KK} = p f_{KK} < 0$ e $|H_\pi| > 0$. Logo H_π é **definida negativa** e o ponto crítico é máximo local — global, pela concavidade de π . O caso Cobb-Douglas acima é uma instância concreta dessas hipóteses.

Interpretação geométrica. No plano (L, K) , o ótimo é uma condição de **tangência** entre duas famílias de curvas:

1. **Isoquantas** $f(K, L) = \bar{Q}$ — combinações que produzem \bar{Q} . Pela TFI, sua inclinação (taxa marginal de substituição técnica, TMST) é

$$\left. \frac{dK}{dL} \right|_{f=\bar{Q}} = -\frac{f_L}{f_K}.$$

2. **Isocustos** $wL + rK = \bar{C}$ — combinações com mesmo custo total. Diferenciando,

$$\left. \frac{dK}{dL} \right|_{C=\bar{C}} = -\frac{w}{r}.$$

A condição de tangência é

$$\boxed{\frac{f_L}{f_K} = \frac{w}{r}}.$$

TMST iguala razão de preços. Reorganizando, recuperam-se $f_K = r/p$ e $f_L = w/p$, com p determinando o nível \bar{Q} ótimo.

28.2.4.3 Estática Comparativa

Como K^* e L^* respondem a mudanças nos preços? Diferenciando totalmente as CPOs do caso geral:

$$\begin{aligned} p f_{KK} dK + p f_{KL} dL &= dr - f_K dp, \\ p f_{LK} dK + p f_{LL} dL &= dw - f_L dp. \end{aligned}$$

Em forma matricial,

$$p \begin{pmatrix} f_{KK} & f_{KL} \\ f_{LK} & f_{LL} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dK \\ dL \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dr - f_K dp \\ dw - f_L dp \end{pmatrix}.$$

Como $|H_\pi| > 0$, aplica-se a regra de Cramer.

Multiplicador $\partial K/\partial r$ (com p, w fixos):

$$\frac{\partial K}{\partial r} = \frac{1}{|H_\pi|} \begin{vmatrix} 1 & p f_{KL} \\ 0 & p f_{LL} \end{vmatrix} = \frac{p f_{LL}}{p^2 (f_{KK} f_{LL} - f_{KL}^2)} = \frac{f_{LL}}{p (f_{KK} f_{LL} - f_{KL}^2)}.$$

Numerador $f_{LL} < 0$, denominador positivo $\Rightarrow \partial K/\partial r < 0$: encarecer o capital reduz a demanda por capital. Análogo $\partial L/\partial w < 0$.

Multiplicadores cruzados $\partial K/\partial w$ e $\partial L/\partial r$ têm sinal de $-f_{KL}$. Com $f_{KL} > 0$ (complementaridade), encarecer um insumo **reduz** a demanda pelo outro — capital e trabalho são “complementos brutos” no sentido de Hicks. Sob $f_{KL} < 0$ seriam substitutos brutos.

Os resultados qualitativos saem **diretamente das hipóteses de sinal**, sem qualquer especificação funcional — a álgebra dos cofatores é o que torna a análise robusta a especificações não-lineares.

28.3 Parte II — Aplicações Com Restrição

28.3.1 Maximização de Utilidade do Consumidor

O consumidor escolhe quantidades $x_1, x_2 \geq 0$ de dois bens para maximizar a utilidade $U(x_1, x_2)$ sujeito à **restrição orçamentária** $p_1x_1 + p_2x_2 = R$, onde $p_1, p_2 > 0$ são preços e $R > 0$ é a renda. A função utilidade é estritamente crescente nos dois argumentos ($U_1, U_2 > 0$) e **côncava** ou **quase-côncava** ($U_{11}, U_{22} < 0, U_{12} > 0$ — bens são complementares na utilidade).

A Lagrangeana é

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda) = U(x_1, x_2) + \lambda [R - p_1x_1 - p_2x_2].$$

CPO:

$$U_1(x_1, x_2) - \lambda p_1 = 0, \quad U_2(x_1, x_2) - \lambda p_2 = 0, \quad R - p_1x_1 - p_2x_2 = 0.$$

Dividindo as duas primeiras:

$$\boxed{\frac{U_1}{U_2} = \frac{p_1}{p_2}}.$$

A leitura econômica é a **igualdade entre a Taxa Marginal de Substituição (TMS) e a razão de preços**: na cesta ótima, o consumidor está disposto a abrir mão de bens 2 por bem 1 exatamente na proporção em que o mercado oferece essa troca. Geometricamente, é a tangência entre a curva de indiferença ($U = \bar{U}$) e a reta orçamentária — que tem inclinação $-p_1/p_2$.

O multiplicador λ tem interpretação direta: das CPOs, $\$ = U_1/p_1 = U_2/p_2 = \$$ utilidade marginal **por unidade monetária gasta** em qualquer bem. É a **utilidade marginal da renda**: quanto a utilidade ótima aumentaria se a renda subisse marginalmente.

28.3.1.1 Exemplo Numérico: $U = x_1 x_2$

Tome $U(x_1, x_2) = x_1 x_2$, com $p_1 = 1, p_2 = 4, R = 16$. A Lagrangeana:

$$\mathcal{L} = x_1 x_2 + \lambda (16 - x_1 - 4x_2).$$

CPO:

$$x_2 - \lambda = 0, \quad x_1 - 4\lambda = 0, \quad 16 - x_1 - 4x_2 = 0.$$

Das duas primeiras: $x_1 = 4\lambda$ e $x_2 = \lambda$, logo $x_1 = 4x_2$. Substituindo na restrição: $4x_2 + 4x_2 = 16 \Rightarrow x_2^* = 2, x_1^* = 8, \lambda^* = 2$.

CSO via Hessiano orlado. Como $\mathcal{L}_{11} = 0, \mathcal{L}_{22} = 0, \mathcal{L}_{12} = \mathcal{L}_{21} = 1, g_1 = p_1 = 1, g_2 = p_2 = 4$:

$$\bar{H} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad |\bar{H}| = 0 \cdot (0 - 16) - 1 \cdot (0 - 4) + 1 \cdot (4 - 0) = 4 + 4 = 8 > 0.$$

Como $|\bar{H}| > 0$, a CSO de **máximo** é satisfeita.

$$x1^* = 8.00, \quad x2^* = 2.00, \quad \text{lambda}^* = 2.00, \quad U^* = 16.00$$

$$|\text{H_bar}| = 8 \text{ (esperado } > 0 \text{ para máximo)}$$

$$x1^* = 8.00, \quad x2^* = 2.00, \quad * = 2.00, \quad U^* = 16.00$$

$$\text{Numérico: } x1 = 8.0000, \quad x2 = 2.0000$$

$$|\text{H_bar}| = 8 (> 0 \rightarrow \text{máximo})$$

28.3.1.2 Estática Comparativa do Consumidor

As três CPOs do problema do consumidor formam um **sistema de funções implícitas** com endógenas (x_1, x_2, λ) e exógenas (p_1, p_2, R) . Diferenciando totalmente e avaliando no ponto crítico, obtemos:

$$\begin{aligned} U_{11} dx_1 + U_{12} dx_2 - p_1 d\lambda - \lambda dp_1 &= 0, \\ U_{21} dx_1 + U_{22} dx_2 - p_2 d\lambda - \lambda dp_2 &= 0, \\ -p_1 dx_1 - p_2 dx_2 &= -dR + x_1 dp_1 + x_2 dp_2. \end{aligned}$$

Em forma matricial:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & -p_1 \\ U_{21} & U_{22} & -p_2 \\ -p_1 & -p_2 & 0 \end{pmatrix}}_{=\bar{H}} \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ d\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ x_1 \end{pmatrix} dp_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda \\ x_2 \end{pmatrix} dp_2 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} dR.$$

Note que a matriz dos coeficientes é exatamente o **Hessiano orlado** \bar{H} . Pela CSO de máximo, $|\bar{H}| > 0$, logo o sistema tem solução única para qualquer choque exógeno, e podemos usar **regra de Cramer** para isolar cada multiplicador.

Efeito de uma variação na renda ($dp_1 = dp_2 = 0, dR \neq 0$):

$$\frac{\partial x_1}{\partial R} = \frac{1}{|\bar{H}|} \det \begin{pmatrix} 0 & U_{12} & -p_1 \\ 0 & U_{22} & -p_2 \\ -1 & -p_2 & 0 \end{pmatrix} = \frac{U_{12} p_2 - U_{22} p_1}{|\bar{H}|}.$$

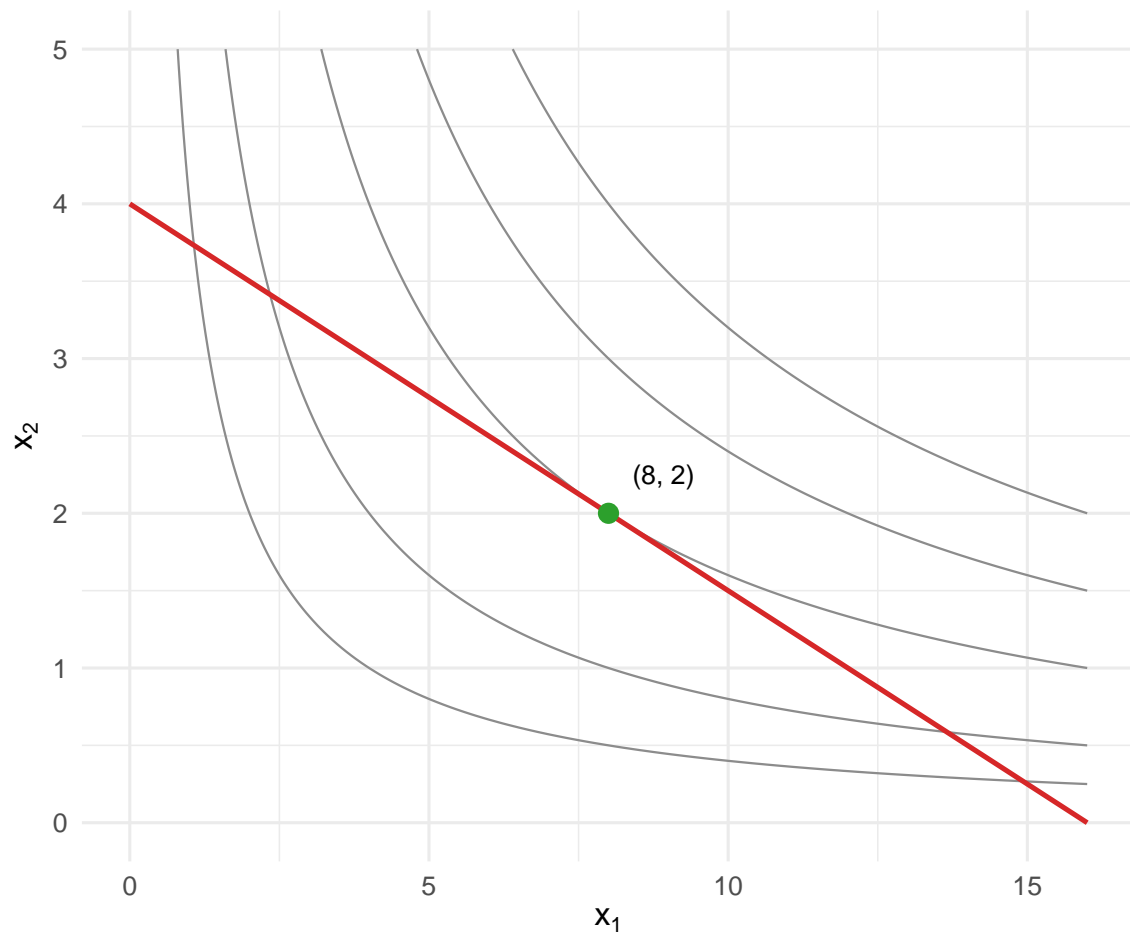


Figura 68: Problema do consumidor com $U = x_1x_2$, $p_1 = 1$, $p_2 = 4$, $R = 16$. Curvas de indiferença (cinza) e reta orçamentária (vermelha). A escolha ótima $(x_1^*, x_2^*) = (8, 2)$ (verde) é o ponto de tangência.

O numerador é **positivo** (porque $U_{12} > 0$ e $U_{22} < 0$); o denominador é positivo pela CSO. Logo $\partial x_1 / \partial R > 0$: aumento de renda eleva o consumo de x_1 (o bem é **normal**).

Efeito de uma variação no preço próprio ($dp_2 = dR = 0$, $dp_1 \neq 0$):

$$\frac{\partial x_1}{\partial p_1} = \frac{1}{|\bar{H}|} \det \begin{pmatrix} \lambda & U_{12} & -p_1 \\ 0 & U_{22} & -p_2 \\ x_1 & -p_2 & 0 \end{pmatrix} = \frac{-U_{12} p_2 x_1 + U_{22} p_1 x_1 - \lambda p_2^2}{|\bar{H}|}.$$

Os três termos do numerador são negativos (lembrando $U_{12} > 0$, $U_{22} < 0$ multiplica $p_1 x_1 > 0$, $\lambda > 0$), logo $\partial x_1 / \partial p_1 < 0$: a curva de demanda própria é **decrecente**, sem necessidade de hipóteses adicionais.

28.3.1.3 Demanda Cobb-Douglas

Para a utilidade Cobb-Douglas $U(x_1, x_2) = x_1^\alpha x_2^{1-\alpha}$ com $\alpha \in (0, 1)$, a condição de tangência $U_1 / U_2 = p_1 / p_2$ dá

$$\frac{\alpha x_1^{\alpha-1} x_2^{1-\alpha}}{(1-\alpha) x_1^\alpha x_2^{-\alpha}} = \frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{x_2}{x_1} = \frac{p_1}{p_2} \implies x_2 = \frac{(1-\alpha) p_1 x_1}{\alpha p_2}.$$

Substituindo na restrição orçamentária $p_1 x_1 + p_2 x_2 = R$:

$$p_1 x_1 + p_2 \cdot \frac{(1-\alpha) p_1 x_1}{\alpha p_2} = R \implies p_1 x_1 \left[1 + \frac{1-\alpha}{\alpha} \right] = R \implies \frac{p_1 x_1}{\alpha} = R.$$

Logo as **funções de demanda Cobb-Douglas** são

$$\boxed{x_1^*(p_1, p_2, R) = \frac{\alpha R}{p_1}, \quad x_2^*(p_1, p_2, R) = \frac{(1-\alpha) R}{p_2}.$$

A leitura econômica é elegante: o consumidor com utilidade Cobb-Douglas gasta uma **fração fixa** α da renda no bem 1 e $(1-\alpha)$ no bem 2 — independentemente dos preços. Esta é a razão pela qual Cobb-Douglas é tão usada em modelagem econômica: dá origem a frações de gasto constantes, propriedade rara em outras especificações.

$$x_1^* = 20.000 \quad (\text{gasto } p_1 \cdot x_1 = 40.00 = \alpha \cdot R = 40.00)$$

$$x_2^* = 12.000 \quad (\text{gasto } p_2 \cdot x_2 = 60.00 = (1-\alpha) \cdot R = 60.00)$$

$$\text{Soma de gastos} = 100.00 \quad (= R = 100)$$

$$x_1^* = 20.000 \quad (\text{gasto } p_1 \cdot x_1 = 40.00 = \alpha \cdot R = 40.00)$$

$$x_2^* = 12.000 \quad (\text{gasto } p_2 \cdot x_2 = 60.00 = (1-\alpha) \cdot R = 60.00)$$

A condição $|\bar{H}| > 0$ pode ser verificada diretamente para Cobb-Douglas no ponto ótimo, mas decorre alternativamente da quase-concavidade da utilidade — propriedade preservada pela transformação monotônica $\ln U = \alpha \ln x_1 + (1 - \alpha) \ln x_2$, que é estritamente côncava em $(\ln x_1, \ln x_2)$.

28.3.2 Minimização de Custo da Firma

A firma neoclássica resolve dois problemas duais: na Parte I, **maximizou lucro** escolhendo (K, L) a preços (p, r, w) dados; agora, dado um nível de produção \bar{Q} , **minimiza o custo total** dos insumos. É o problema dual da firma e o ponto de partida para construir a função de custo $C(\bar{Q}; r, w)$. Formalmente,

$$\min_{k, l \geq 0} rk + wl \quad \text{s.a.} \quad f(k, l) = \bar{Q},$$

onde f satisfaz as hipóteses neoclássicas usuais ($f_k, f_l > 0$; $f_{kk}, f_{ll} < 0$; $f_{kl} > 0$; f quase-côncava).

A Lagrangeana é

$$\mathcal{L}(k, l, \lambda) = rk + wl + \lambda [\bar{Q} - f(k, l)] = rk + wl + \lambda \bar{Q} - \lambda f(k, l).$$

CPO:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial k} = r - \lambda f_k = 0 &\implies r = \lambda f_k, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial l} = w - \lambda f_l = 0 &\implies w = \lambda f_l, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = \bar{Q} - f(k, l) = 0. & \end{aligned}$$

Dividindo as duas primeiras:

$$\boxed{\frac{f_k}{f_l} = \frac{r}{w}, \quad \text{equivalente a} \quad \frac{f_l}{f_k} = \frac{w}{r}.}$$

A leitura econômica é **dual à do consumidor**: a Taxa Marginal de Substituição Técnica (TMST) — quanto de k a firma pode dispensar mantendo \bar{Q} ao adicionar uma unidade de l — iguala a razão dos preços dos insumos. Geometricamente, é a **tangência** entre a isoquanta $f(k, l) = \bar{Q}$ e a reta de isocusto $rk + wl = \bar{C}$, com inclinação $-w/r$.

O multiplicador tem interpretação econômica explícita: das CPOs, $\lambda = r/f_k = w/f_l$, ou seja, λ é o **custo marginal** de produzir uma unidade adicional do produto — o preço-sombra da restrição $f(k, l) = \bar{Q}$.

28.3.2.1 Construção do Hessiano Orlado (de onde vêm os coeficientes)

A CSO usa o Hessiano orlado das segundas derivadas da Lagrangeana. Cada coeficiente é literalmente uma segunda derivada parcial de \mathcal{L} , e é instrutivo ver de onde vem cada uma. Partindo das primeiras derivadas $\mathcal{L}_k = r - \lambda f_k$, $\mathcal{L}_l = w - \lambda f_l$, $\mathcal{L}_\lambda = \bar{Q} - f(k, l)$:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{kk} &= \frac{\partial}{\partial k}(r - \lambda f_k) = -\lambda f_{kk}, & \mathcal{L}_{kl} &= \frac{\partial}{\partial l}(r - \lambda f_k) = -\lambda f_{kl}, \\ \mathcal{L}_{ll} &= \frac{\partial}{\partial l}(w - \lambda f_l) = -\lambda f_{ll}, & \mathcal{L}_{k\lambda} &= \frac{\partial}{\partial \lambda}(r - \lambda f_k) = -f_k, \\ \mathcal{L}_{\lambda\lambda} &= \frac{\partial}{\partial \lambda}(\bar{Q} - f) = 0, & \mathcal{L}_{l\lambda} &= \frac{\partial}{\partial \lambda}(w - \lambda f_l) = -f_l.\end{aligned}$$

Três observações tornam transparente a origem de cada termo:

1. **A função-objetivo** $rk + wl$ é linear em (k, l) , então suas segundas derivadas são zero. Toda a curvatura do bloco 2×2 superior vem do termo $-\lambda f(k, l)$ da Lagrangeana — daí o fator $-\lambda$ multiplicando f_{kk}, f_{kl}, f_{ll} .
2. **A borda** $-f_k, -f_l$ aparece quando derivamos \mathcal{L}_k ou \mathcal{L}_l em λ : a única parcela que depende de λ é $-\lambda f_k$ (resp. $-\lambda f_l$), cuja derivada em λ é $-f_k$ (resp. $-f_l$). Equivalentemente, são as derivadas da restrição $g(k, l) = \bar{Q} - f(k, l)$ em k e l , que entram com sinal negativo porque λ multiplica g na Lagrangeana.
3. **O canto** $\mathcal{L}_{\lambda\lambda} = 0$ vem do fato de a Lagrangeana ser linear em λ (o multiplicador só aparece multiplicando algo que não depende dele): derivar duas vezes em λ dá zero.

Montando a matriz simétrica 3×3 :

$$\bar{H} = \begin{pmatrix} \mathcal{L}_{kk} & \mathcal{L}_{kl} & \mathcal{L}_{k\lambda} \\ \mathcal{L}_{lk} & \mathcal{L}_{ll} & \mathcal{L}_{l\lambda} \\ \mathcal{L}_{\lambda k} & \mathcal{L}_{\lambda l} & \mathcal{L}_{\lambda\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda f_{kk} & -\lambda f_{kl} & -f_k \\ -\lambda f_{kl} & -\lambda f_{ll} & -f_l \\ -f_k & -f_l & 0 \end{pmatrix}.$$

O bloco 2×2 no canto superior é a Hessiana de \mathcal{L} em relação às **variáveis escolhidas** (k, l) — mede a curvatura da Lagrangeana ao longo do espaço onde se otimiza. A última linha/coluna é a **borda**: encaixam as derivadas parciais da restrição, registrando como cada variável afeta o cumprimento de $f(k, l) = \bar{Q}$.

CSO. Para $n = 2$ variáveis e $m = 1$ restrição, a regra de sinais do Hessiano orlado pede:

- **mínimo:** sinal $|\bar{H}| = (-1)^m = -1$, isto é, $|\bar{H}| < 0$;
- **máximo:** sinal $|\bar{H}| = (-1)^n = +1$, isto é, $|\bar{H}| > 0$ (o que aconteceu no problema do consumidor).

Sob as hipóteses neoclássicas e $\lambda > 0$, mostra-se que $|\bar{H}| < 0$ — o ponto crítico é de fato mínimo de custo.

28.3.2.2 Exemplo Numérico: Cobb-Douglas $f(k, l) = \sqrt{kl}$

Tomemos $f(k, l) = k^{1/2}l^{1/2}$, com $\bar{Q} = 4$, $r = 1$, $w = 1$. As derivadas parciais são $f_k = \frac{1}{2}\sqrt{l/k}$ e $f_l = \frac{1}{2}\sqrt{k/l}$, logo

$$\frac{f_k}{f_l} = \frac{l}{k} = \frac{r}{w} = 1 \implies k = l.$$

Substituindo na restrição: $\sqrt{l^2} = 4 \implies l^* = k^* = 4$. O custo mínimo é $C^* = 1 \cdot 4 + 1 \cdot 4 = 8$, e $\lambda^* = r/f_k = 1/(1/2) = 2$ — produzir uma unidade adicional custa marginalmente \$2.

Verificação da CSO. Calculando as segundas derivadas em $(k, l) = (4, 4)$:

- $f_{kk} = -\frac{1}{4}k^{-3/2}l^{1/2} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} \cdot 2 = -\frac{1}{16}$;
- $f_{ll} = -\frac{1}{4}k^{1/2}l^{-3/2} = -\frac{1}{16}$;
- $f_{kl} = \frac{1}{4}(kl)^{-1/2} = \frac{1}{16}$.

Aplicando $\lambda^* = 2$:

$$\bar{H} = \begin{pmatrix} -2 \cdot (-1/16) & -2 \cdot (1/16) & -1/2 \\ -2 \cdot (1/16) & -2 \cdot (-1/16) & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/8 & -1/8 & -1/2 \\ -1/8 & 1/8 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculando o determinante (expansão pela última linha):

$$|\bar{H}| = -\frac{1}{2} \cdot \underbrace{[(-1/8)(-1/2) - (-1/2)(1/8)]}_{=1/8} - (-1) \cdot \underbrace{[(1/8)(-1/2) - (-1/2)(-1/8)]}_{=-1/8} = -\frac{1}{16} - \frac{1}{16} = -\frac{1}{8} < 0.$$

Logo $(k^*, l^*) = (4, 4)$ é **mínimo de custo**.

$$k^* = 4.00, \quad l^* = 4.00, \quad C^* = 8.00, \quad \lambda^* = 2.00$$

$$|\bar{H}_{\text{bar}}| = -0.1250 \quad (\text{esperado } < 0 \text{ para mínimo})$$

$$k^* = 4.00, \quad l^* = 4.00, \quad C^* = 8.00, \quad \lambda^* = 2.00$$

$$\text{Numérico: } k = 4.0000, \quad l = 4.0000, \quad C = 8.0000$$

$$|\bar{H}_{\text{bar}}| = -0.1250 \quad (< 0 \rightarrow \text{mínimo})$$

28.3.2.3 Cobb-Douglas Geral: $f(k, l) = k^\alpha l^{1-\alpha}$

Estendendo o exemplo simétrico para a Cobb-Douglas com parâmetro $\alpha \in (0, 1)$, deduziremos formas fechadas para k^* , l^* e C^* em função de (r, w, \bar{Q}, α) . As derivadas parciais são $f_k = \alpha k^{\alpha-1} l^{1-\alpha}$ e $f_l = (1 - \alpha) k^\alpha l^{-\alpha}$, e a condição de tangência $f_k/f_l = r/w$ dá

$$\frac{\alpha}{1-\alpha} \cdot \frac{l}{k} = \frac{r}{w} \implies l = \frac{1-\alpha}{\alpha} \cdot \frac{r}{w} \cdot k.$$

Substituindo na restrição $k^\alpha l^{1-\alpha} = \bar{Q}$:

$$k^\alpha \left[\frac{1-\alpha}{\alpha} \cdot \frac{r}{w} \cdot k \right]^{1-\alpha} = \bar{Q} \iff k \left[\frac{1-\alpha}{\alpha} \cdot \frac{r}{w} \right]^{1-\alpha} = \bar{Q}.$$

Isolando k e procedendo análogo para l , obtemos as **demandas condicionais por fatores**:

$$\boxed{k^*(r, w, \bar{Q}; \alpha) = \bar{Q} \left[\frac{\alpha}{1-\alpha} \cdot \frac{w}{r} \right]^{1-\alpha}, \quad l^*(r, w, \bar{Q}; \alpha) = \bar{Q} \left[\frac{1-\alpha}{\alpha} \cdot \frac{r}{w} \right]^\alpha.}$$

Caso simétrico $\alpha = 1/2$ recupera $k^* = \bar{Q} \sqrt{w/r}$ e $l^* = \bar{Q} \sqrt{r/w}$, batendo com o exemplo anterior ($k^* = l^* = 4$ quando $r = w = 1$ e $\bar{Q} = 4$).

Função custo. Substituindo nas demandas e reorganizando:

$$\begin{aligned} C^*(r, w, \bar{Q}; \alpha) &= r k^* + w l^* \\ &= \bar{Q} r^\alpha w^{1-\alpha} \left[\frac{\alpha^{1-\alpha}}{(1-\alpha)^{1-\alpha}} + \frac{(1-\alpha)^\alpha}{\alpha^\alpha} \right] \\ &= \boxed{\bar{Q} \frac{r^\alpha w^{1-\alpha}}{\alpha^\alpha (1-\alpha)^{1-\alpha}}}. \end{aligned}$$

A simplificação do colchete usa que, ao reduzir ao denominador comum $\alpha^\alpha (1-\alpha)^{1-\alpha}$, os numeradores ficam α e $(1-\alpha)$, somando 1.

Três propriedades desta função custo são recorrentes na teoria do produtor:

1. **Homogeneidade de grau 1 em \bar{Q}** : o custo cresce linearmente com a produção — consequência de retornos constantes à escala de f ($\alpha + (1-\alpha) = 1$).
2. **Homogeneidade de grau 1 em (r, w)** : dobrar todos os preços de insumos dobra o custo, sem mudar as quantidades ótimas.
3. **Custo médio = custo marginal**, ambos constantes em \bar{Q} — propriedade exclusiva de retornos constantes; contrasta com tecnologias de retornos decrescentes (CMg crescente).

$$k^* = 10.4948, \quad l^* = 9.7951$$

$$C^* \text{ (forma fechada)} = 69.965348$$

$$C^* (= rk^* + wl^*) = 69.965348$$

$$f(k^*, l^*) = 10.0000 \text{ (esperado } \bar{Q} = 10)$$

$$k^* = 10.4948, l^* = 9.7951$$

$$C^* \text{ (forma fechada)} = 69.965348$$

$$C^* (= rk^* + wl^*) = 69.965348$$

$$f(k^*, l^*) = 10.0000 \text{ (esperado } \bar{Q} = 10)$$

28.3.2.4 Estática Comparativa

As três CPOs do problema de minimização de custo formam um **sistema de funções implícitas** com endógenas (k, l, λ) e exógenas (r, w, \bar{Q}) — exatamente o objeto da Seção 24.13, com Jacobiano $J = \bar{H}$ e condição $|J| \neq 0$ assegurada pela CSO. Diferenciando totalmente e avaliando no ponto crítico:

$$\begin{aligned} -\lambda f_{kk} dk - \lambda f_{kl} dl - f_k d\lambda &= -dr, \\ -\lambda f_{lk} dk - \lambda f_{ll} dl - f_l d\lambda &= -dw, \\ -f_k dk - f_l dl &= -d\bar{Q}. \end{aligned}$$

Em forma matricial:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -\lambda f_{kk} & -\lambda f_{kl} & -f_k \\ -\lambda f_{lk} & -\lambda f_{ll} & -f_l \\ -f_k & -f_l & 0 \end{pmatrix}}_{=\bar{H}} \begin{pmatrix} dk \\ dl \\ d\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} dr + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} dw + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} d\bar{Q}.$$

A matriz dos coeficientes é exatamente o **Hessiano orlado** \bar{H} construído na subseção anterior. Pela CSO de mínimo, $|\bar{H}| < 0$, logo o sistema tem solução única para qualquer choque exógeno, e aplicamos **regra de Cramer** para isolar cada multiplicador.

Efeito do preço próprio ($dw = d\bar{Q} = 0, dr \neq 0$):

$$\frac{\partial k}{\partial r} = \frac{1}{|\bar{H}|} \det \begin{pmatrix} -1 & -\lambda f_{kl} & -f_k \\ 0 & -\lambda f_{ll} & -f_l \\ 0 & -f_l & 0 \end{pmatrix} = \frac{f_l^2}{|\bar{H}|}.$$

Numerador $f_l^2 > 0$; denominador $|\bar{H}| < 0$ pela CSO. Logo $\partial k / \partial r < 0$: encarecer o capital reduz a demanda condicional por capital. Análogo, $\partial l / \partial w < 0$.

Efeito cruzado ($dr = d\bar{Q} = 0, dw \neq 0$):

$$\frac{\partial k}{\partial w} = \frac{1}{|\bar{H}|} \det \begin{pmatrix} 0 & -\lambda f_{kl} & -f_k \\ -1 & -\lambda f_{ll} & -f_l \\ 0 & -f_l & 0 \end{pmatrix} = \frac{-f_k f_l}{|\bar{H}|}.$$

Numerador $-f_k f_l < 0$; denominador $|\bar{H}| < 0$. Logo $\partial k / \partial w > 0$: encarecer o trabalho aumenta a demanda condicional por capital. Note que esse sinal **não depende** do sinal de f_{kl} — diferente do que ocorreu com as demandas não-condicionais da maximização de lucro na Parte I. Demandas **condicionais** sempre exibem substituição entre fatores, porque a firma precisa manter \bar{Q} fixo: encarecer um insumo força recomposição em direção ao outro.

Efeito do nível de produção ($dr = dw = 0, d\bar{Q} \neq 0$):

$$\frac{\partial k}{\partial \bar{Q}} = \frac{1}{|\bar{H}|} \det \begin{pmatrix} 0 & -\lambda f_{kl} & -f_k \\ 0 & -\lambda f_{ll} & -f_l \\ -1 & -f_l & 0 \end{pmatrix} = \frac{\lambda(f_k f_{ll} - f_{kl} f_l)}{|\bar{H}|}.$$

O numerador é negativo: $f_k f_{ll} < 0$ (porque $f_{ll} < 0$) e $-f_{kl} f_l < 0$ (porque $f_{kl}, f_l > 0$), somados e multiplicados por $\lambda > 0$. Denominador $|\bar{H}| < 0$. Logo $\partial k / \partial \bar{Q} > 0$: aumentar a meta de produção eleva a demanda condicional por capital, como esperado. Análogo, $\partial l / \partial \bar{Q} > 0$.

Como nos problemas anteriores, os resultados qualitativos saem **diretamente dos sinais das derivadas** de f e do sinal do Hessiano orlado, sem qualquer especificação funcional — é a álgebra dos cofatores que torna a análise robusta.

28.3.2.5 Aplicação do Envelope: Lema de Shephard e Custo Marginal

A função-valor $C^*(r, w, \bar{Q})$ — o custo mínimo como função das exógenas — é a **função custo** da firma. Aplicando o teorema do envelope (Seção 27.6) à Lagrangeana $\mathcal{L} = rk + wl + \lambda[\bar{Q} - f(k, l)]$, três derivadas saem por inspeção:

$$\frac{\partial C^*}{\partial r} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} \Big|_* = k^*, \quad \frac{\partial C^*}{\partial w} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w} \Big|_* = l^*, \quad \frac{\partial C^*}{\partial \bar{Q}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{Q}} \Big|_* = \lambda^*.$$

As duas primeiras são o **lema de Shephard**: as demandas condicionais por fatores são recuperadas diferenciando a função custo nos preços. A terceira identifica λ^* como o **custo marginal** — o preço-sombra da restrição de produção, exatamente o caso especial do enunciado geral em que o parâmetro \bar{Q} aparece como deslocamento da restrição.

Verificação na Cobb-Douglas geral. Usando $C^*(r, w, \bar{Q}) = \bar{Q} r^\alpha w^{1-\alpha} / [\alpha^\alpha (1-\alpha)^{1-\alpha}]$:

$$\frac{\partial C^*}{\partial r} = \alpha \bar{Q} r^{\alpha-1} w^{1-\alpha} \frac{1}{\alpha^\alpha (1-\alpha)^{1-\alpha}} = \bar{Q} \left[\frac{\alpha}{1-\alpha} \cdot \frac{w}{r} \right]^{1-\alpha} = k^*. \checkmark$$

$$\frac{\partial C^*}{\partial \bar{Q}} = \frac{r^\alpha w^{1-\alpha}}{\alpha^\alpha (1-\alpha)^{1-\alpha}} = \frac{C^*}{\bar{Q}}.$$

Custo marginal igual ao custo médio — manifestação numérica dos retornos constantes à escala. Comparando com a definição $\lambda^* = r/f_k$ no ponto ótimo, como $f_k = \alpha k^{\alpha-1}l^{1-\alpha} = \alpha \bar{Q}/k^*$ (usando $f(k^*, l^*) = \bar{Q}$), temos $\lambda^* = r k^*/(\alpha \bar{Q})$, que substituindo k^* recupera exatamente $r^\alpha w^{1-\alpha}/[\alpha^\alpha(1-\alpha)^{1-\alpha}]$. ✓

Shephard k: C/ r = 10.494802 k* = 10.494802

Shephard l: C/ w = 9.795149 l* = 9.795149

CMg: C/ Q = 6.996535 * = 6.996535

Shephard k: C/ r = 10.494802 k* = 10.494802

Shephard l: C/ w = 9.795149 l* = 9.795149

CMg: C/ Q = 6.996535 * = 6.996535

A maximização de utilidade s.a. restrição orçamentária e a minimização de custo da firma — junto com a maximização de lucro do produtor visto na Parte I — formam o núcleo da microeconomia neoclássica. Os mesmos passos (Lagrangeano, CPO, Hessiano orlado, estática comparativa) re- parecem em todos os problemas restritos: minimização de despesa do consumidor, problemas de portfolio em finanças, etc.

29 Testes Anteriores — Teste 4

29.1 Teste 4 (2026) — 16 de maio de 2026

29.1.1 Questão 1 — EDOs de 2ª Ordem com Coeficientes Constantes

Resolva as seguintes EDOs.

29.1.1.1 Item (i): $y'' + 2y' - 3y = 9$, $y(0) = -2$, $y'(0) = 9$

Equação homogênea associada. $y'' + 2y' - 3y = 0$. Equação característica:

$$r^2 + 2r - 3 = 0 \iff (r - 1)(r + 3) = 0 \implies r_1 = 1, r_2 = -3.$$

Raízes reais e distintas, logo $y_h(x) = C_1e^x + C_2e^{-3x}$.

Solução particular. Como o termo não-homogêneo é uma constante e $r = 0$ não é raiz característica, tentamos $y_p = A$ constante. Substituindo: $-3A = 9 \implies A = -3$.

Solução geral.

$$y(x) = C_1e^x + C_2e^{-3x} - 3.$$

Aplicando as condições iniciais.

$$y(0) = C_1 + C_2 - 3 = -2 \implies C_1 + C_2 = 1.$$

$$y'(x) = C_1e^x - 3C_2e^{-3x}, \quad y'(0) = C_1 - 3C_2 = 9.$$

Resolvendo o sistema $C_1 + C_2 = 1$, $C_1 - 3C_2 = 9$: subtraindo, $4C_2 = -8 \implies C_2 = -2$ e $C_1 = 3$.

$$\boxed{y(x) = 3e^x - 2e^{-3x} - 3.}$$

Verificação. $y(0) = 3 - 2 - 3 = -2$. $y'(x) = 3e^x + 6e^{-3x}$, $y'(0) = 3 + 6 = 9$.

29.1.1.2 Item (ii): $y'' - 8y' + 16y = 32$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 9$

Equação característica. $r^2 - 8r + 16 = (r - 4)^2 = 0 \Rightarrow r = 4$ (raiz dupla).

Logo $y_h(x) = (C_1 + C_2x)e^{4x}$.

Solução particular. Tentando $y_p = A$ constante: $16A = 32 \Rightarrow A = 2$.

Solução geral.

$$y(x) = (C_1 + C_2x)e^{4x} + 2.$$

Condições iniciais. $y(0) = C_1 + 2 = 2 \Rightarrow C_1 = 0$.

$$y'(x) = C_2e^{4x} + 4(C_1 + C_2x)e^{4x} = (C_2 + 4C_1 + 4C_2x)e^{4x}.$$

$$y'(0) = C_2 + 4C_1 = C_2 = 9.$$

$$y(x) = 9xe^{4x} + 2.$$

Verificação. $y(0) = 0 + 2 = 2$. $y'(x) = 9e^{4x} + 36xe^{4x}$, $y'(0) = 9$.

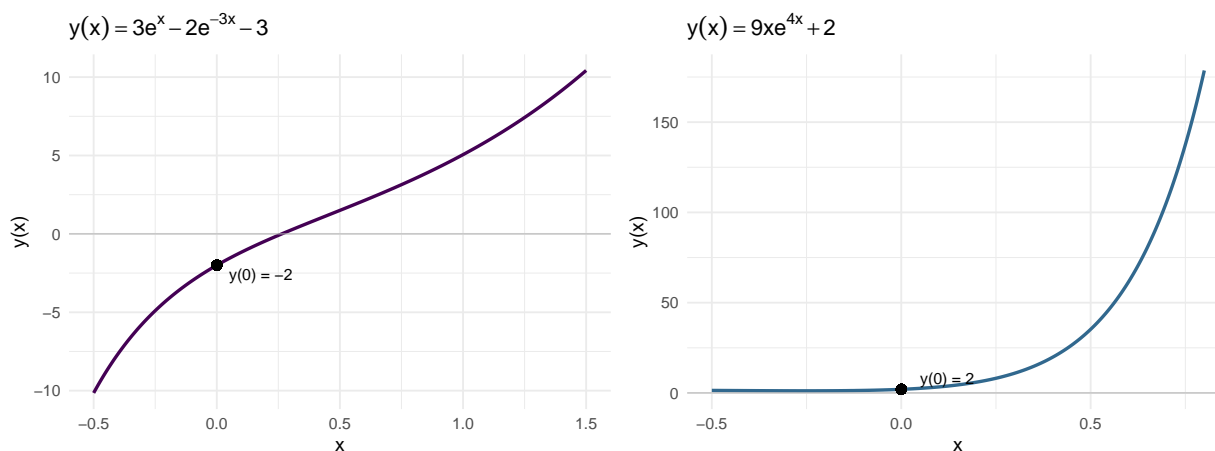


Figura 69: Soluções dos itens (i) e (ii) da Questão 1. Esquerda: $y(x) = 3e^x - 2e^{-3x} - 3$ — domina $3e^x$ para $x > 0$, oscilação inicial pequena pelo termo $-2e^{-3x}$ que decai rápido. Direita: $y(x) = 9xe^{4x} + 2$ — crescimento exponencial puxado pelo fator $9xe^{4x}$, com $y(0) = 2$.

29.1.2 Questão 2 — Derivadas Parciais até Segunda Ordem de $f(x, y) = y^{x^2}$

Domínio. Para y^{x^2} ser definida classicamente via $e^{x^2 \ln y}$, exigimos $y > 0$. Tomamos $\text{Dom}(f) = \{(x, y) : y > 0\}$.

Reescrita útil. $f(x, y) = e^{x^2 \ln y}$.

29.1.2.1 Derivadas de primeira ordem

$\partial f / \partial x$. O expoente é $x^2 \ln y$. Derivando em x : $\partial_x [x^2 \ln y] = 2x \ln y$. Pela regra da cadeia:

$$f_x = e^{x^2 \ln y} \cdot 2x \ln y = 2x \ln(y) y^{x^2}.$$

$\partial f / \partial y$. Derivando o expoente em y : $\partial_y [x^2 \ln y] = x^2 / y$. Então:

$$f_y = e^{x^2 \ln y} \cdot \frac{x^2}{y} = \frac{x^2}{y} y^{x^2} = x^2 y^{x^2-1}.$$

$$f_x = 2x \ln(y) y^{x^2}, \quad f_y = x^2 y^{x^2-1}.$$

29.1.2.2 Derivadas de segunda ordem

f_{xx} . Derivando $f_x = 2x \ln(y) y^{x^2}$ em x (com y fixo, $\ln y$ é constante). Pela regra do produto:

$$f_{xx} = 2 \ln(y) y^{x^2} + 2x \ln(y) \cdot \partial_x [y^{x^2}].$$

Como $\partial_x [y^{x^2}] = y^{x^2} \cdot \ln(y) \cdot 2x$:

$$f_{xx} = 2 \ln(y) y^{x^2} + 4x^2 \ln^2(y) y^{x^2} = 2 \ln(y) y^{x^2} [1 + 2x^2 \ln(y)].$$

$$f_{xx} = 2 \ln(y) y^{x^2} [1 + 2x^2 \ln(y)].$$

f_{yy} . Derivando $f_y = x^2 y^{x^2-1}$ em y (com x fixo, x^2 e $x^2 - 1$ são constantes):

$$f_{yy} = x^2 (x^2 - 1) y^{x^2-2}.$$

$$f_{yy} = x^2 (x^2 - 1) y^{x^2-2}.$$

f_{xy} (**derivar f_x em y**). $f_x = 2x \ln(y) y^{x^2}$, com x fixo. Pela regra do produto em y :

$$f_{xy} = 2x \left[\frac{1}{y} y^{x^2} + \ln(y) \cdot x^2 y^{x^2-1} \right] = 2x y^{x^2-1} [1 + x^2 \ln(y)].$$

f_{yx} (derivar f_y em x). $f_y = x^2 y^{x^2-1}$, com y fixo. Aqui $x^2 - 1$ é expoente que depende de x , então usamos $\partial_x [y^{x^2-1}] = y^{x^2-1} \cdot \ln(y) \cdot 2x$. Pela regra do produto:

$$f_{yx} = 2x y^{x^2-1} + x^2 \cdot y^{x^2-1} \cdot \ln(y) \cdot 2x = 2x y^{x^2-1} [1 + x^2 \ln(y)].$$

$$f_{xy} = f_{yx} = 2x y^{x^2-1} [1 + x^2 \ln(y)].$$

Igualdade das cruzadas. Confirmada por cálculo direto, como previsto pelo **Teorema de Schwarz** (as derivadas f_{xy} e f_{yx} existem e são contínuas no domínio $y > 0$).

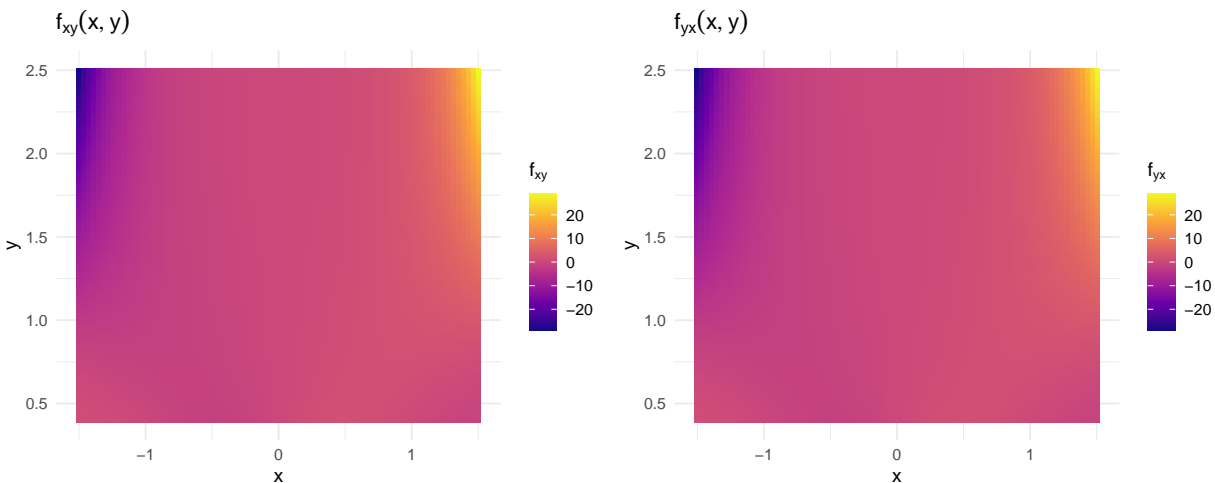


Figura 70: Verificação numérica das derivadas cruzadas de $f(x, y) = y^{x^2}$. Os dois painéis mostram f_{xy} e f_{yx} calculadas pela fórmula analítica $2x y^{x^2-1} [1 + x^2 \ln(y)]$ — visualmente idênticas, como exige Schwarz.

29.1.3 Questão 3 — Curvas de Nível de $f(x, y) = \frac{x^2 - 3x}{y}$

Domínio. $y \neq 0$. Logo $\text{Dom}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\}$.

Curvas de nível. Igualando $f(x, y) = c$:

$$\frac{x^2 - 3x}{y} = c \iff x^2 - 3x = cy.$$

Caso $c = 0$. A equação reduz-se a $x^2 - 3x = 0$, ou seja, $x(x - 3) = 0$. A curva de nível $c = 0$ é a união das **retas verticais** $x = 0$ e $x = 3$ (com $y \neq 0$, isto é, excluindo os pontos $(0, 0)$ e $(3, 0)$).

Caso $c \neq 0$. Isolando y :

$$y = \frac{x^2 - 3x}{c}.$$

É uma **parábola** em x com eixo de simetria $x = 3/2$ e que cruza o eixo x em $x = 0$ e $x = 3$ (esses pontos têm $y = 0$, então estão fora do domínio).

Vértice. No vértice $x = 3/2$, o numerador vale $(3/2)^2 - 3(3/2) = 9/4 - 9/2 = -9/4$. Logo o vértice é

$$\left(\frac{3}{2}, -\frac{9}{4c}\right).$$

Classificação por sinal de c .

- $c > 0$: a parábola tem **concavidade para cima** (mesmo sinal do numerador $x^2 - 3x$); o vértice em $y = -9/(4c) < 0$ fica abaixo do eixo x . Para $0 < x < 3$ a curva está no semiplano $y < 0$; para $x < 0$ ou $x > 3$, no semiplano $y > 0$.
- $c < 0$: a parábola é **invertida** (sinal oposto ao numerador); vértice em $y = -9/(4c) > 0$. Para $0 < x < 3$ está em $y > 0$; para $x < 0$ ou $x > 3$, em $y < 0$.

Aspectos qualitativos.

- Todas as curvas de nível $c \neq 0$ “tocam” os pontos $(0, 0)$ e $(3, 0)$ — no sentido de que se aproximam deles —, mas esses pontos são excluídos do domínio.
- Quanto **maior** $|c|$, mais “achatada” a parábola (vértice mais próximo do eixo x); quanto **menor** $|c|$, mais “alongada”.
- A função é **ímpar** em y : $f(x, -y) = -f(x, y)$. Logo a curva de nível c no semiplano $y > 0$ é a reflexão da curva de nível $-c$ no semiplano $y < 0$.

29.2 Teste 4 (2025) — 28 de abril de 2025

29.2.1 Questão 1 — Derivadas Parciais até Segunda Ordem

Calcule todas as derivadas parciais até segunda ordem de $f(x, y) = x^{\ln(y)}$ e mostre que as derivadas cruzadas são iguais.

Domínio. A potência $x^{\ln y}$ exige $x > 0$ (para a definição clássica via $e^{\ln y \cdot \ln x}$); $\ln y$ exige $y > 0$. Tomamos $\text{Dom}(f) = \{(x, y) : x > 0, y > 0\}$.

Reescrita. Usando $a^b = e^{b \ln a}$:

$$f(x, y) = e^{\ln(y) \ln(x)}.$$

Esta forma será útil em todas as derivações.

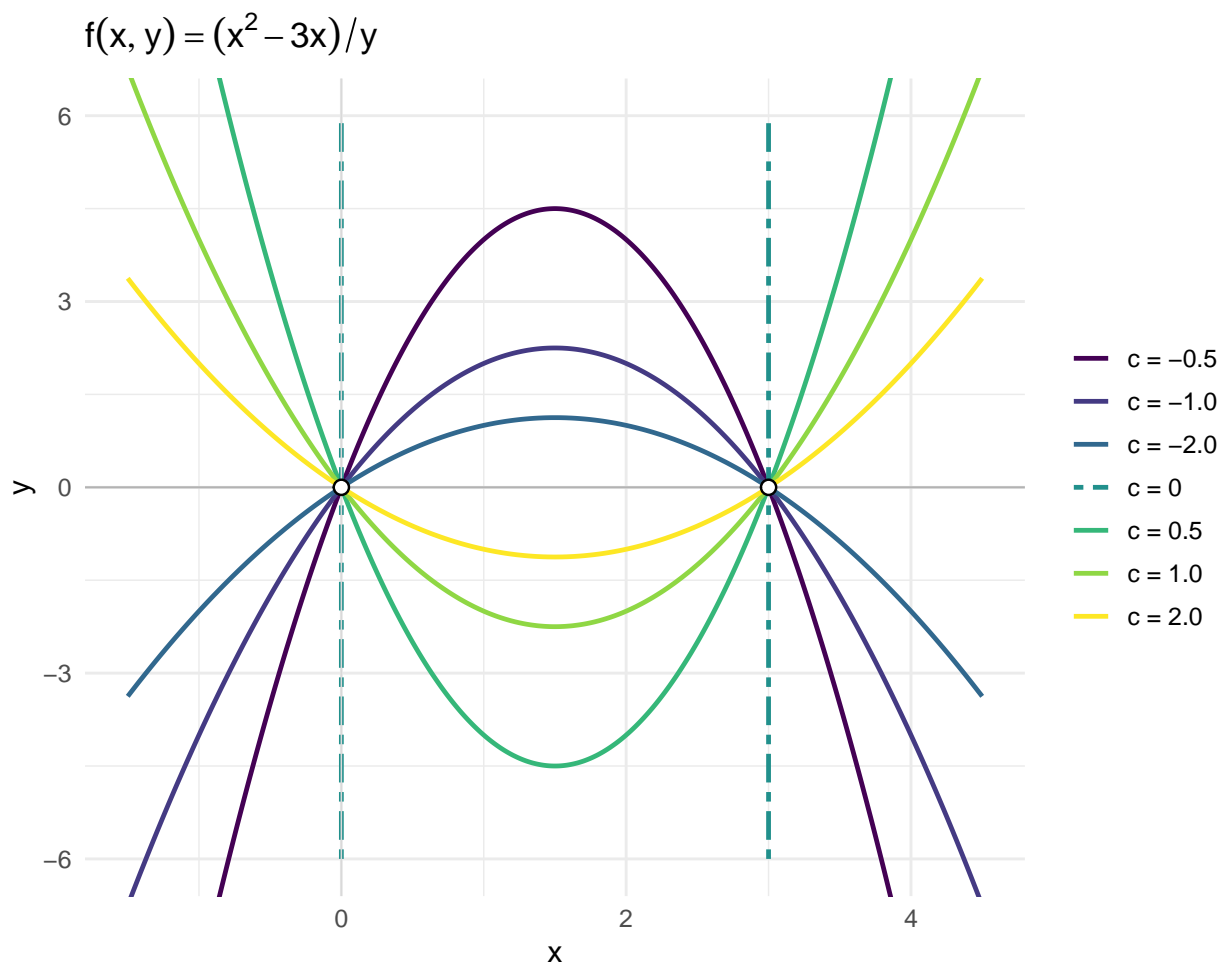


Figura 71: Curvas de nível de $f(x, y) = (x^2 - 3x)/y$ para vários c . Parábolas com eixo de simetria $x = 3/2$, passando (no limite) por $(0, 0)$ e $(3, 0)$ — pontos excluídos do domínio ($y \neq 0$). Sinal de c controla orientação: $c > 0$ abre para cima, $c < 0$ para baixo. A linha $c = 0$ degenera nas retas $x = 0$ e $x = 3$.

29.2.1.1 Derivadas de primeira ordem

$\partial f/\partial x$. Derivando o expoente em x : $\partial_x[\ln(y) \ln(x)] = \ln(y)/x$. Logo:

$$f_x = f \cdot \frac{\ln(y)}{x} = \frac{\ln(y)}{x} x^{\ln(y)} = \ln(y) x^{\ln(y)-1}.$$

$\partial f/\partial y$. Derivando o expoente em y : $\partial_y[\ln(y) \ln(x)] = \ln(x)/y$. Logo:

$$f_y = f \cdot \frac{\ln(x)}{y} = \frac{\ln(x)}{y} x^{\ln(y)}.$$

$$\boxed{f_x = \ln(y) x^{\ln(y)-1}, \quad f_y = \frac{\ln(x)}{y} x^{\ln(y)}.$$

29.2.1.2 Derivadas de segunda ordem

$\partial^2 f/\partial x^2$. Diferenciamos $f_x = \ln(y) x^{\ln(y)-1}$ em x (com y fixo, $\ln(y)$ é constante):

$$f_{xx} = \ln(y) \cdot (\ln(y) - 1) x^{\ln(y)-2}.$$

$$\boxed{f_{xx} = \ln(y)(\ln(y) - 1) x^{\ln(y)-2}.$$

$\partial^2 f/\partial y^2$. Diferenciamos $f_y = \frac{\ln(x) x^{\ln(y)}}{y}$ em y (com x fixo, $\ln(x)$ é constante). Pela regra do quociente:

$$f_{yy} = \ln(x) \cdot \frac{y \cdot \partial_y x^{\ln(y)} - x^{\ln(y)}}{y^2}.$$

Como $\partial_y x^{\ln y} = x^{\ln y} \cdot \ln(x)/y$:

$$f_{yy} = \ln(x) \cdot \frac{y \cdot x^{\ln y} \cdot \ln(x)/y - x^{\ln y}}{y^2} = \frac{\ln(x) x^{\ln(y)} [\ln(x) - 1]}{y^2}.$$

$$\boxed{f_{yy} = \frac{\ln(x)(\ln(x) - 1) x^{\ln(y)}}{y^2}.$$

29.2.1.3 Derivadas cruzadas

$\partial^2 f / \partial y \partial x = (f_x)_y$. Diferenciamos $f_x = \ln(y) x^{\ln(y)-1}$ em y . Tanto $\ln(y)$ quanto $x^{\ln(y)-1}$ dependem de y ; aplicamos a regra do produto.

Para $\partial_y x^{\ln(y)-1}$, escrevemos $x^{\ln(y)-1} = e^{(\ln(y)-1)\ln(x)}$:

$$\partial_y x^{\ln(y)-1} = x^{\ln(y)-1} \cdot \frac{\ln(x)}{y}.$$

Logo:

$$(f_x)_y = \frac{1}{y} x^{\ln(y)-1} + \ln(y) \cdot x^{\ln(y)-1} \cdot \frac{\ln(x)}{y} = \frac{x^{\ln(y)-1}}{y} [1 + \ln(x) \ln(y)].$$

$\partial^2 f / \partial x \partial y = (f_y)_x$. Diferenciamos $f_y = \frac{\ln(x) x^{\ln(y)}}{y}$ em x . O fator $1/y$ é constante; aplicamos a regra do produto a $\ln(x) \cdot x^{\ln(y)}$:

$$\partial_x [\ln(x) x^{\ln(y)}] = \frac{1}{x} x^{\ln(y)} + \ln(x) \cdot \ln(y) x^{\ln(y)-1} = x^{\ln(y)-1} [1 + \ln(x) \ln(y)].$$

Logo:

$$(f_y)_x = \frac{x^{\ln(y)-1} [1 + \ln(x) \ln(y)]}{y}.$$

Igualdade das cruzadas:

$$f_{xy} = f_{yx} = \frac{x^{\ln(y)-1} [1 + \ln(x) \ln(y)]}{y}.$$

Comentário. O resultado confirma o **Teorema de Schwarz/Clairaut**: como f tem derivadas parciais de segunda ordem contínuas no domínio $x, y > 0$, as cruzadas necessariamente coincidem. O cálculo explícito serve como verificação.

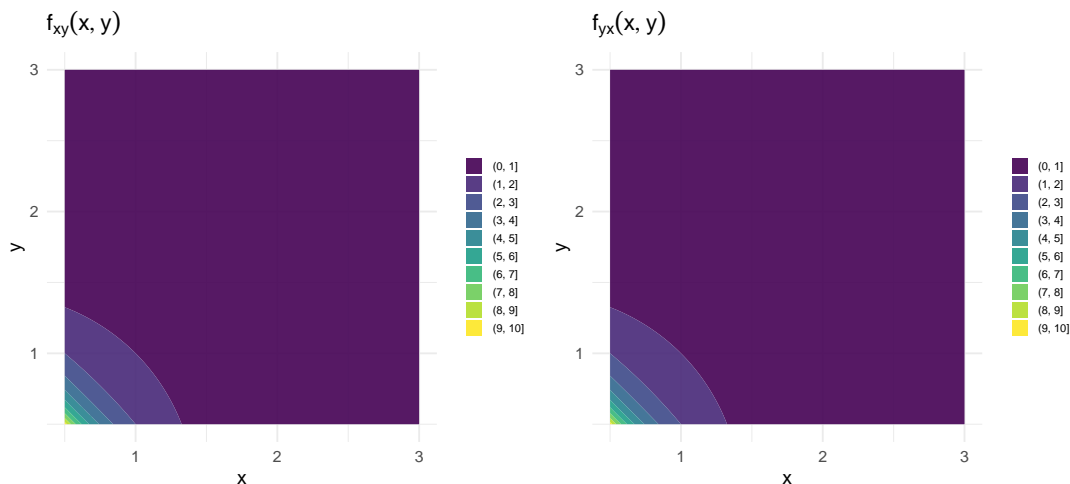


Figura 72: Verificação numérica das derivadas cruzadas de $f(x, y) = x^{\ln(y)}$. Os dois painéis mostram f_{xy} e f_{yx} calculadas pela fórmula analítica $x^{\ln y - 1} [1 + \ln(x) \ln(y)] / y$ — visualmente idênticas, como exige Schwarz.

29.2.2 Questão 2 — Curvas de Nível de $f(x, y) = y/x^2$

Domínio. $x^2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$. Logo $\text{Dom}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$.

Curvas de nível. Para $f(x, y) = c$:

$$\frac{y}{x^2} = c \iff y = cx^2.$$

Cada curva de nível é uma **parábola** com vértice na origem (mas com a própria origem excluída, já que $x = 0$ não pertence ao domínio).

Classificação por sinal de c :

- $c > 0$: parábola com **concavidade para cima**, ramos no semiplano $y > 0$;
- $c < 0$: parábola com **concavidade para baixo**, ramos no semiplano $y < 0$;
- $c = 0$: a curva degenera para $y = 0$ (o eixo x , excluindo a origem).

Aspectos qualitativos.

- Todas as curvas passam (no limite) pela origem, exceto que a origem em si não pertence ao domínio.
- Quanto maior $|c|$, mais “fechada” a parábola (cresce mais rápido).
- O sinal de c separa o plano em duas regiões: $y > 0$ (curvas de nível positivas) e $y < 0$ (negativas).
- A função é **homogênea de grau zero** ao longo da direção $(\lambda x, \lambda^2 y)$: $f(\lambda x, \lambda^2 y) = \lambda^2 y / (\lambda x)^2 = y/x^2 = f(x, y)$.

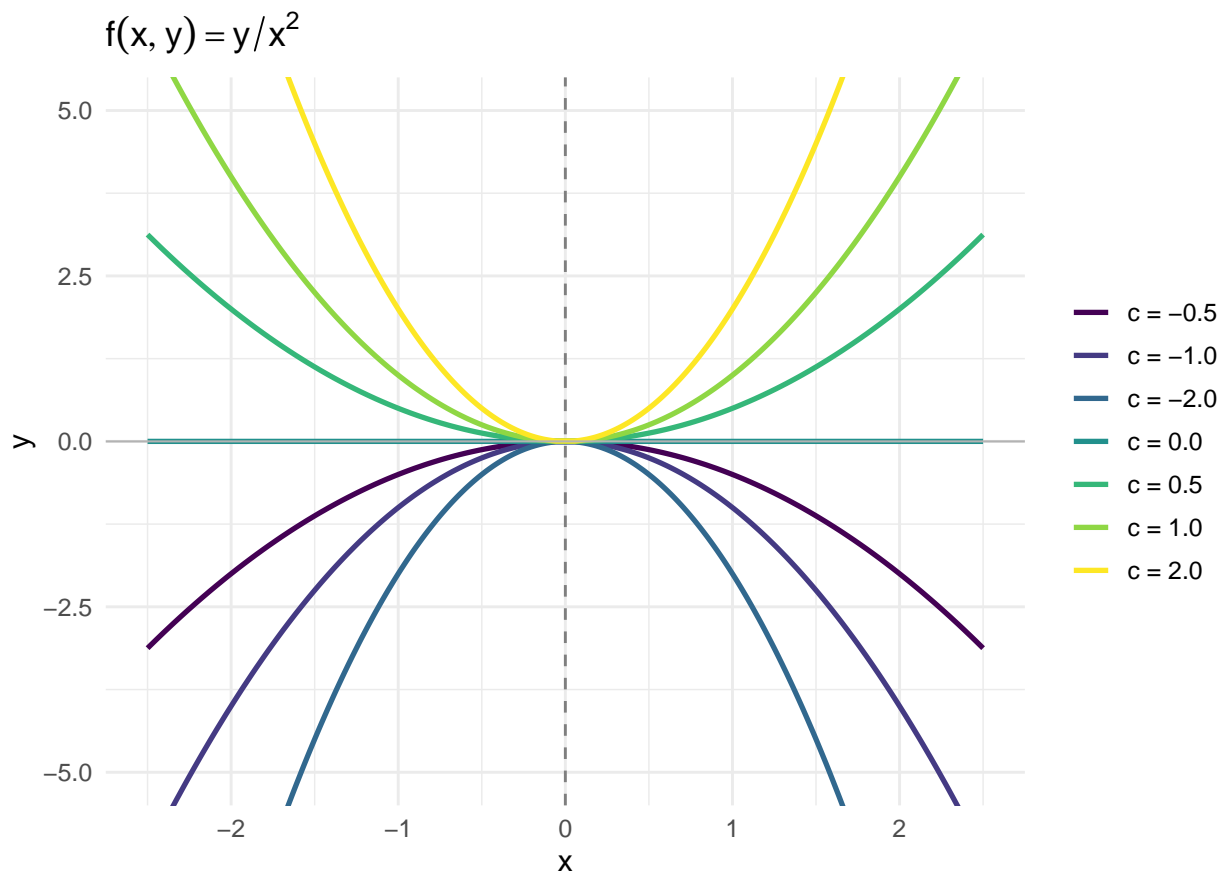


Figura 73: Curvas de nível de $f(x, y) = y/x^2$ para vários c . Parábolas com vértice na origem (excluída do domínio): $c > 0$ abrem para cima, $c < 0$ abrem para baixo, $c = 0$ degenera no eixo x .

29.2.3 Questão 3 — Modelo IS-LM Não-Linear

Considere o modelo:

$$\begin{aligned} Y &= C + I + G, & C &= c(Y^d), & Y^d &= Y - T, \\ I &= I_G + I_P, & I_P &= I_P(r), & M^s &= \bar{M}, & M^d &= M(Y, r), \end{aligned}$$

com $0 < c' < 1$, $I'_P < 0$, $M_Y > 0$, $M_r < 0$.

Diferença em relação à versão 2023. Aqui I_P depende apenas do juro nominal r (não há expectativa de inflação π^e). Estrutura mais simples, mas com a mesma mecânica de estática comparativa.

29.2.3.1 (a) Forma do sistema e diferencial total

Forma reduzida. Substituindo C , I , Y^d , I_P e impondo $M^d = M^s$:

$$\begin{cases} \text{IS:} & Y - c(Y - T) - I_G - I_P(r) - G = 0, \\ \text{LM:} & M(Y, r) - \bar{M} = 0. \end{cases}$$

Diferencial total. Endógenas: (Y, r) . Exógenas: (G, T, I_G, \bar{M}) .

$$\begin{aligned} \text{IS:} & \quad dY - c'(dY - dT) - I'_P dr - dI_G - dG = 0, \\ \text{LM:} & \quad M_Y dY + M_r dr - d\bar{M} = 0. \end{aligned}$$

Reorganizando:

$$\begin{aligned} (1 - c') dY - I'_P dr &= dG + dI_G - c' dT, \\ M_Y dY + M_r dr &= d\bar{M}. \end{aligned}$$

Forma matricial:

$$\boxed{\underbrace{\begin{bmatrix} 1 - c' & -I'_P \\ M_Y & M_r \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}} \begin{bmatrix} dY \\ dr \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dG + dI_G - c' dT \\ d\bar{M} \end{bmatrix}.}$$

Determinante.

$$\Delta = (1 - c') M_r + I'_P M_Y < 0,$$

(soma de dois termos negativos). Pelo **Teorema da Função Implícita**, (Y, r) são funções C^1 das exógenas em uma vizinhança do equilíbrio.

29.2.3.2 (b) Aumento na oferta monetária ($d\bar{M} > 0$, demais fixos)

$$\begin{bmatrix} 1 - c' & -I'_P \\ M_Y & M_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dY \\ dr \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ d\bar{M} \end{bmatrix}.$$

Regra de Cramer:

$$\frac{dY}{d\bar{M}} = \frac{1}{\Delta} \det \begin{bmatrix} 0 & -I'_P \\ 1 & M_r \end{bmatrix} = \frac{I'_P}{\Delta} > 0,$$

pois $I'_P < 0$ e $\Delta < 0$.

$$\frac{dr}{d\bar{M}} = \frac{1}{\Delta} \det \begin{bmatrix} 1 - c' & 0 \\ M_Y & 1 \end{bmatrix} = \frac{1 - c'}{\Delta} < 0,$$

pois $1 - c' > 0$ e $\Delta < 0$.

$$\boxed{\frac{dY}{d\bar{M}} > 0, \quad \frac{dr}{d\bar{M}} < 0.}$$

Interpretação econômica. Política monetária expansionista. Mais moeda na economia juro de equilíbrio cai. A queda em r estimula investimento privado (pois $I'_P < 0$), elevando demanda agregada e produto. LM desloca-se para a direita (ou para baixo, dependendo da orientação dos eixos).

29.2.3.3 (c) Diminuição na taxação ($dT < 0$, demais fixos)

$$\begin{bmatrix} 1 - c' & -I'_P \\ M_Y & M_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dY \\ dr \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c' dT \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Observe que $-c' dT > 0$ quando $dT < 0$ (corte de imposto).

Regra de Cramer:

$$\frac{dY}{dT} = \frac{1}{\Delta} \det \begin{bmatrix} -c' & -I'_P \\ 0 & M_r \end{bmatrix} = \frac{-c' M_r}{\Delta}.$$

Como $-c' < 0$, $M_r < 0$, $\Delta < 0$: $\frac{dY}{dT} = \frac{(+)}{(-)} < 0$. Logo $dT < 0 \Rightarrow dY > 0$.

$$\frac{dr}{dT} = \frac{1}{\Delta} \det \begin{bmatrix} 1 - c' & -c' \\ M_Y & 0 \end{bmatrix} = \frac{c' M_Y}{\Delta} < 0,$$

pois $c' M_Y > 0$ e $\Delta < 0$. Logo $dT < 0 \Rightarrow dr > 0$.

$$\boxed{dT < 0 \Rightarrow dY > 0, \quad dr > 0.}$$

Interpretação econômica. Corte de imposto é **política fiscal expansionista**: maior renda disponível $Y^d = Y - T$ eleva o consumo $c(Y^d)$, deslocando a IS para a direita. O produto sobe, mas o juro também — a maior renda aumenta a demanda por moeda, e com \bar{M} fixa, r tem que subir para reequilibrar o mercado monetário (mesmo efeito qualitativo de um aumento em G visto em 2023).

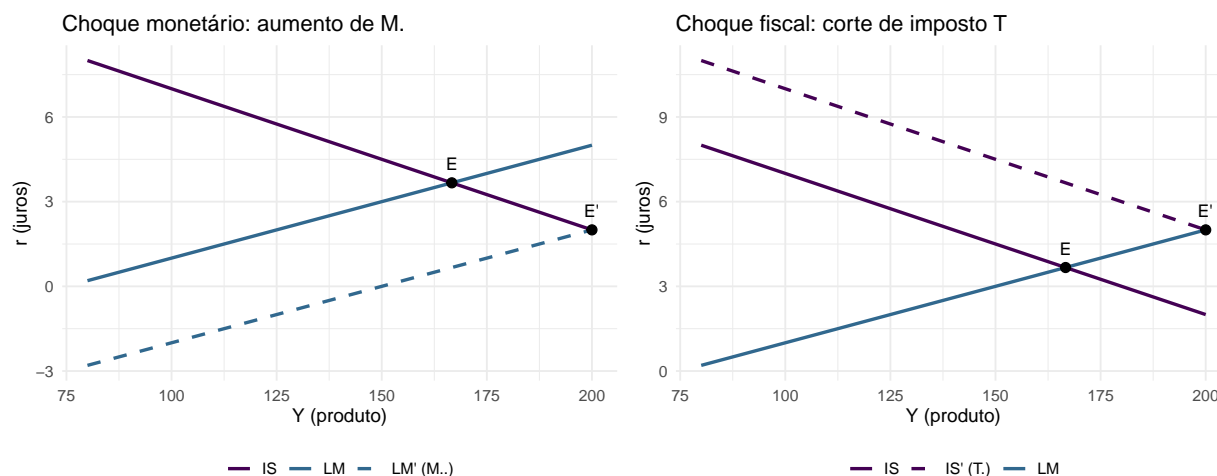


Figura 74: Estática comparativa no diagrama IS-LM (2025). Esquerda: aumento de \bar{M} desloca LM ($Y \uparrow, r \downarrow$). Direita: diminuição de T desloca IS à direita ($Y \uparrow, r \uparrow$).

29.3 Teste 4 (2024) — 20 de abril de 2024

29.3.1 Questão 1 — Equações Diferenciais

Resolva as seguintes equações diferenciais.

29.3.1.1 1.1 — $y'' - 2y' - 4y = 20$

Estratégia. EDO linear de 2ª ordem com coeficientes constantes e termo não-homogêneo constante. A solução geral é $y = y_h + y_p$, onde y_h resolve a homogênea associada e y_p é uma solução particular.

Solução homogênea. Equação característica:

$$r^2 - 2r - 4 = 0 \implies r = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 16}}{2} = 1 \pm \sqrt{5}.$$

Raízes reais e distintas $r_1 = 1 + \sqrt{5}$, $r_2 = 1 - \sqrt{5}$, logo:

$$y_h(x) = C_1 e^{(1+\sqrt{5})x} + C_2 e^{(1-\sqrt{5})x}.$$

Solução particular. Como o termo independente é constante (20), tentamos $y_p = K$ constante. Então $y'_p = y''_p = 0$, e a EDO fornece:

$$-4K = 20 \implies K = -5.$$

Solução geral:

$$y(x) = C_1 e^{(1+\sqrt{5})x} + C_2 e^{(1-\sqrt{5})x} - 5.$$

Verificação. Para $y_p = -5$: $y''_p - 2y'_p - 4y_p = 0 - 0 - 4(-5) = 20$. ✓

29.3.1.2 1.2 — $y' + xy = x$

Estratégia. EDO linear de 1ª ordem na forma padrão $y' + p(x)y = q(x)$ com $p(x) = q(x) = x$. Aplica-se a fórmula do fator integrante:

$$y(x) = e^{-\int p(x) dx} \left[A + \int q(x) e^{\int p(x) dx} dx \right].$$

Cálculo do fator integrante. $\int p(x) dx = \int x dx = \frac{x^2}{2}$, logo $e^{\int p dx} = e^{x^2/2}$.

Cálculo da integral interna. Substituição $u = \frac{x^2}{2}$, $du = x dx$:

$$\int x e^{x^2/2} dx = \int e^u du = e^u + C = e^{x^2/2} + C.$$

Aplicando a fórmula com A absorvendo a constante:

$$y(x) = e^{-x^2/2} [A + e^{x^2/2}] = A e^{-x^2/2} + 1.$$

$$y(x) = 1 + A e^{-x^2/2}.$$

Verificação. $y' = -Ax e^{-x^2/2}$ e $xy = x + Ax e^{-x^2/2}$, logo $y' + xy = x$. ✓

Interpretação. O termo $A e^{-x^2/2}$ é transitório (decai rapidamente para $|x|$ grande) e $y \rightarrow 1$ é a solução de equilíbrio (ponto fixo de $y' = x(1 - y)$).

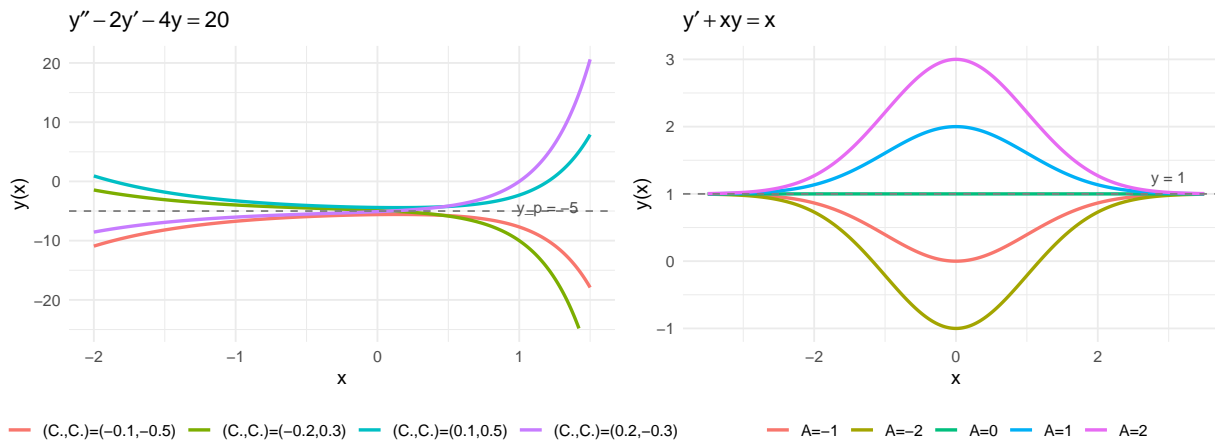


Figura 75: EDOs da Questão 1. Esquerda: solução geral de $y'' - 2y' - 4y = 20$ para vários (C_1, C_2) , todas convergindo localmente ao redor do equilíbrio $y_p = -5$. Direita: solução de $y' + xy = x$ para vários A , todas convergindo para $y = 1$ quando $|x| \rightarrow \infty$.

29.3.2 Questão 2 — Curvas de Nível

Seja $f(x, y) = x^2 - x - y$. Esboce as curvas de nível de f .

Definição. A curva de nível c de f é o conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = c\}$.

Impondo $f(x, y) = c$:

$$x^2 - x - y = c \iff y = x^2 - x - c.$$

Caracterização. Cada curva de nível é uma **parábola** com:

- coeficiente líder $+1$ — concavidade para cima;
- vértice em $x^* = \frac{1}{2}$ (zerando a derivada $2x - 1$);
- ordenada do vértice $y^* = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} - c = -\frac{1}{4} - c$.

Ou seja, **todas as parábolas são translações verticais umas das outras**: aumentar c desloca a curva para baixo (vértice em $-\frac{1}{4} - c$). Quanto maior c , mais baixa a parábola.

Interseções relevantes.

- Com o eixo y ($x = 0$): $y = -c$.
- Com o eixo x ($y = 0$): $x^2 - x = c \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4c}}{2}$, real se $c \geq -\frac{1}{4}$.

A curva especial $c = -\frac{1}{4}$ tangencia o eixo x em $x = \frac{1}{2}$ — é a “curva de nível mais alta” no plano (o gráfico de f atinge ali seu valor máximo ao longo do eixo $y = 0$).

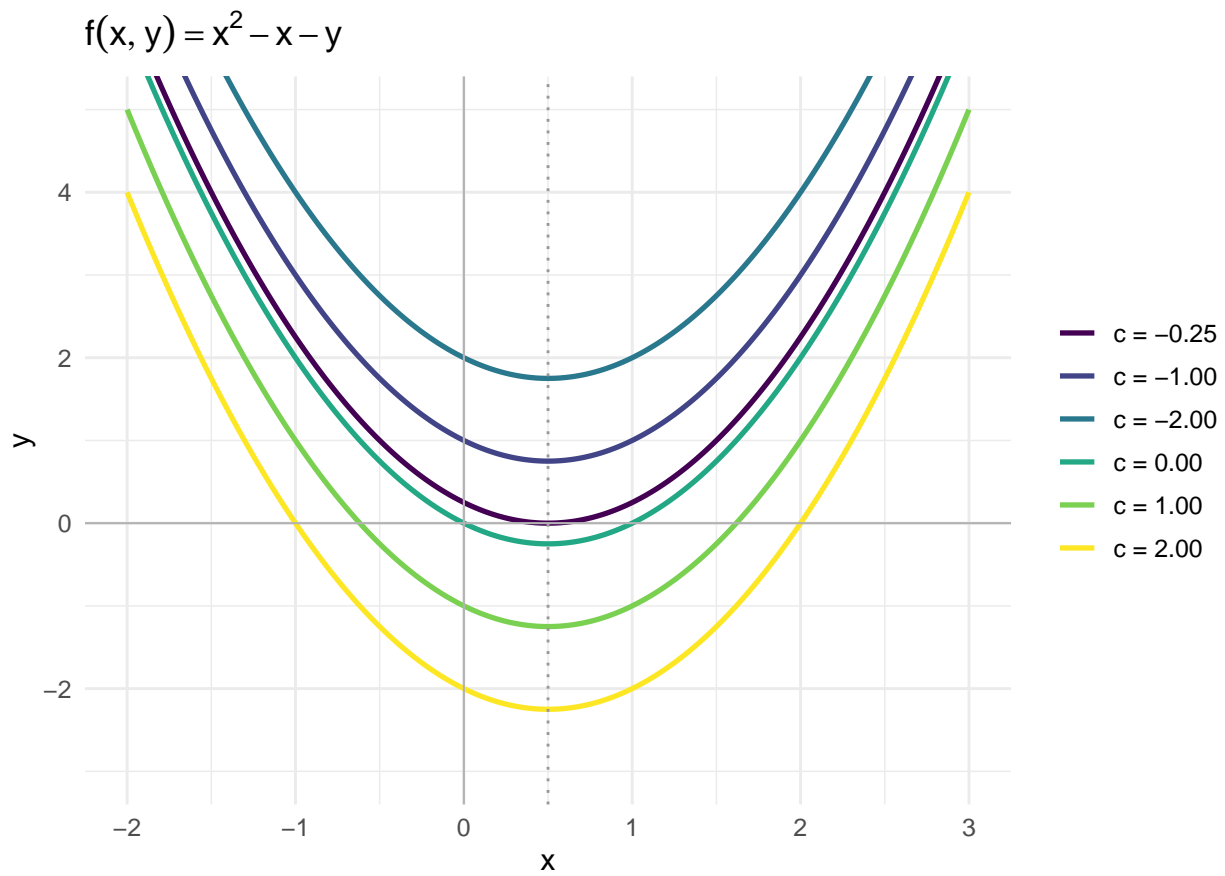


Figura 76: Curvas de nível de $f(x, y) = x^2 - x - y$ para vários valores de c . Todas são parábolas com vértice em $x = 1/2$, deslocadas verticalmente: aumentar c desce a curva.

29.3.3 Questão 3 — Derivadas Parciais

Calcule as derivadas parciais da função:

$$f(x, y) = (x^2 + y^2) e^{-(x^2+y^2)} + y e^x \ln(y).$$

Estratégia. Decompomos $f = g + h$ com $g(x, y) = (x^2 + y^2) e^{-(x^2+y^2)}$ e $h(x, y) = y e^x \ln(y)$.

29.3.3.1 Derivada $\partial f/\partial x$

Parcial de g . Tratamos y como constante. Pela regra do produto:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = (2x) e^{-(x^2+y^2)} + (x^2 + y^2) \cdot e^{-(x^2+y^2)} \cdot (-2x).$$

Fatorando $2x e^{-(x^2+y^2)}$:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 2x e^{-(x^2+y^2)} [1 - (x^2 + y^2)].$$

Parcial de h . Como y é constante:

$$\frac{\partial h}{\partial x} = y e^x \ln(y).$$

Resultado:

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x} = 2x e^{-(x^2+y^2)} [1 - (x^2 + y^2)] + y e^x \ln(y).}$$

29.3.3.2 Derivada $\partial f/\partial y$

Parcial de g . Por simetria em $x \leftrightarrow y$:

$$\frac{\partial g}{\partial y} = 2y e^{-(x^2+y^2)} [1 - (x^2 + y^2)].$$

Parcial de h . Regra do produto, e^x constante em y :

$$\frac{\partial h}{\partial y} = e^x \ln(y) + y e^x \cdot \frac{1}{y} = e^x [\ln(y) + 1].$$

Resultado:

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y} = 2y e^{-(x^2+y^2)} [1 - (x^2 + y^2)] + e^x [\ln(y) + 1].}$$

Comentário. O fator $[1 - (x^2 + y^2)]$ muda de sinal no círculo $x^2 + y^2 = 1$: dentro do círculo, g cresce na direção radial; fora dele, g decresce — o que faz sentido, já que $g(r) = r^2 e^{-r^2}$ tem máximo em $r = 1$.

29.4 Teste 4 (2023) — 11 de setembro de 2023

29.4.1 Questão 1 — Modelo IS-LM Não-Linear

Considere o modelo:

$$\begin{aligned} Y &= C + I + G, & C &= c(Y^d), & Y^d &= Y - T, \\ I &= I_G + I_P, & I_P &= I_P(r - \pi^e), & M^s &= \bar{M}, & M^d &= M(Y, r), \end{aligned}$$

com $0 < c' < 1$, $I'_P < 0$, $M_Y > 0$, $M_r < 0$. O equilíbrio ocorre quando demanda e oferta se igualam nos mercados de bens e de moeda.

29.4.1.1 1.1 — Forma matricial e diferencial total

Forma reduzida. Substituindo C , Y^d , I , I_P na identidade de produto, e impondo $M^d = M^s$, o equilíbrio é o par (Y, r) que resolve:

$$\begin{cases} \text{IS:} & Y - c(Y - T) - I_G - I_P(r - \pi^e) - G = 0, \\ \text{LM:} & M(Y, r) - \bar{M} = 0. \end{cases}$$

Diferenciando totalmente. Tomando como **endógenas** (Y, r) e como **exógenas** $(G, T, I_G, \bar{M}, \pi^e)$:

$$\begin{aligned} \text{IS:} & \quad dY - c'(dY - dT) - I'_P(dr - d\pi^e) - dI_G - dG = 0, \\ \text{LM:} & \quad M_Y dY + M_r dr - d\bar{M} = 0. \end{aligned}$$

Reorganizando termos:

$$\begin{aligned} (1 - c') dY - I'_P dr &= dG + dI_G - c' dT - I'_P d\pi^e, \\ M_Y dY + M_r dr &= d\bar{M}. \end{aligned}$$

Forma matricial:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 - c' & -I'_P \\ M_Y & M_r \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}} \begin{bmatrix} dY \\ dr \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dG + dI_G - c' dT - I'_P d\pi^e \\ d\bar{M} \end{bmatrix}.$$

Determinante (Jacobiano).

$$\Delta = \det \mathbf{J} = (1 - c') M_r - (-I'_P) M_Y = \underbrace{(1 - c') M_r}_{<0} + \underbrace{I'_P M_Y}_{<0} < 0,$$

pois $1 - c' > 0$, $M_r < 0$, $I'_P < 0$, $M_Y > 0$. A não-singularidade $\Delta \neq 0$ garante, pelo **Teorema da Função Implícita**, que (Y, r) podem ser expressos como funções C^1 das exógenas em uma vizinhança do equilíbrio.

29.4.1.2 1.2 — Aumento no gasto do governo ($dG > 0$, demais fixos)

O sistema reduz-se a:

$$\begin{bmatrix} 1 - c' & -I'_P \\ M_Y & M_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dY \\ dr \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dG \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Regra de Cramer:

$$\frac{dY}{dG} = \frac{1}{\Delta} \det \begin{bmatrix} 1 & -I'_P \\ 0 & M_r \end{bmatrix} = \frac{M_r}{\Delta} > 0,$$

pois $M_r < 0$ e $\Delta < 0$.

$$\frac{dr}{dG} = \frac{1}{\Delta} \det \begin{bmatrix} 1 - c' & 1 \\ M_Y & 0 \end{bmatrix} = \frac{-M_Y}{\Delta} > 0,$$

pois $M_Y > 0$ e $\Delta < 0$.

Conclusão:

$$\boxed{\frac{dY}{dG} > 0, \quad \frac{dr}{dG} > 0.}$$

Interpretação econômica. Aumento de G desloca **IS para a direita**: maior demanda agregada \rightarrow maior produto Y . O maior Y eleva a demanda por moeda $M^d = M(Y, r)$; com oferta \bar{M} fixa, o juro r sobe para reequilibrar o mercado monetário. O efeito final em Y é positivo, mas **parcialmente compensado** pelo *crowding out* via $r \uparrow$ (que reduz I_P).

29.4.1.3 1.3 — Aumento da oferta monetária ($d\bar{M} > 0$, demais fixos)

$$\begin{bmatrix} 1 - c' & -I'_P \\ M_Y & M_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dY \\ dr \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ d\bar{M} \end{bmatrix}.$$

Regra de Cramer:

$$\frac{dY}{d\bar{M}} = \frac{1}{\Delta} \det \begin{bmatrix} 0 & -I'_P \\ 1 & M_r \end{bmatrix} = \frac{I'_P}{\Delta} > 0,$$

pois $I'_P < 0$ e $\Delta < 0$.

$$\frac{dr}{d\bar{M}} = \frac{1}{\Delta} \det \begin{bmatrix} 1 - c' & 0 \\ M_Y & 1 \end{bmatrix} = \frac{1 - c'}{\Delta} < 0,$$

pois $1 - c' > 0$ e $\Delta < 0$.

Conclusão:

$$\boxed{\frac{dY}{d\bar{M}} > 0, \quad \frac{dr}{d\bar{M}} < 0.}$$

Interpretação econômica. Aumento de \bar{M} desloca **LM para a direita/baixo**: com mais moeda disponível, o juro de equilíbrio cai. A queda em r estimula I_P (pois $I'_P < 0$), elevando demanda agregada e produto. É a política monetária expansionista padrão.

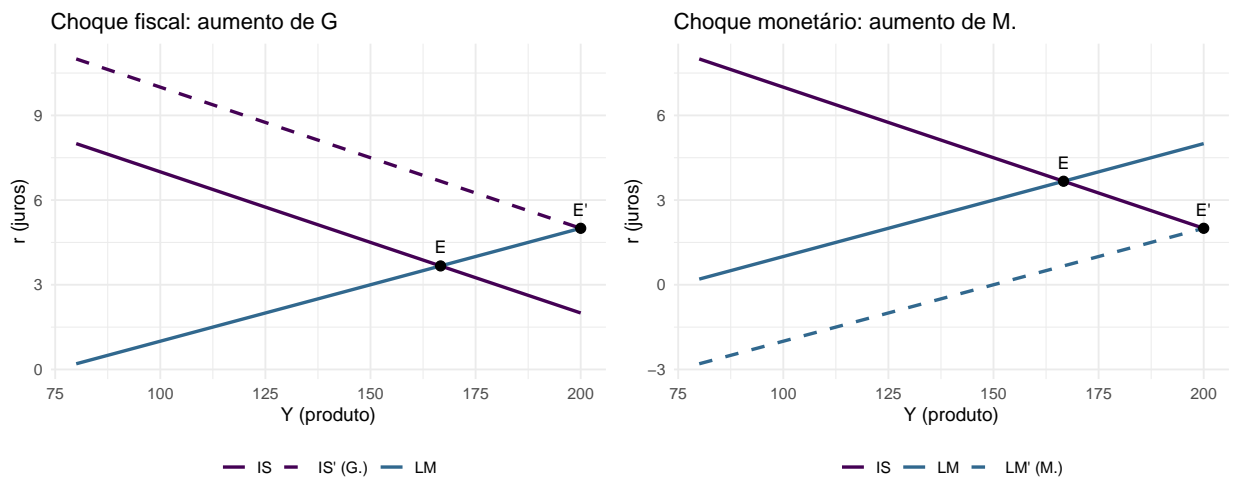


Figura 77: Estática comparativa no diagrama IS-LM. Esquerda: aumento de G desloca IS à direita ($Y \uparrow, r \uparrow$). Direita: aumento de \bar{M} desloca LM à direita ($Y \uparrow, r \downarrow$).

29.4.2 Questão 2 — Extremos Locais

Determine os valores máximos e mínimos locais da função:

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1.$$

Pontos críticos. O gradiente é

$$\nabla f = (4x^3 - 4y, 4y^3 - 4x).$$

Impondo $\nabla f = 0$:

$$\begin{cases} y = x^3, \\ x = y^3. \end{cases}$$

Substituindo a primeira na segunda: $x = (x^3)^3 = x^9$, logo $x^9 - x = x(x^8 - 1) = 0$. As soluções reais são $x = 0$ ou $x^8 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$.

Em cada caso, $y = x^3$ fornece:

- $x = 0 \Rightarrow y = 0 \rightarrow$ ponto crítico $P_0 = (0, 0)$;
- $x = 1 \Rightarrow y = 1 \rightarrow$ ponto crítico $P_1 = (1, 1)$;
- $x = -1 \Rightarrow y = -1 \rightarrow$ ponto crítico $P_2 = (-1, -1)$.

Hessiana. Derivadas segundas:

$$f_{xx} = 12x^2, \quad f_{yy} = 12y^2, \quad f_{xy} = -4.$$

$$H(x, y) = \begin{bmatrix} 12x^2 & -4 \\ -4 & 12y^2 \end{bmatrix}, \quad \det H = 144x^2y^2 - 16.$$

Classificação.

Ponto	f_{xx}	$\det H$	Tipo	f
$P_0 = (0, 0)$	0	$-16 < 0$	Sela	1
$P_1 = (1, 1)$	$12 > 0$	$128 > 0$	Mínimo local	-1
$P_2 = (-1, -1)$	$12 > 0$	$128 > 0$	Mínimo local	-1

Valores em P_1, P_2 : $f(\pm 1, \pm 1) = 1 + 1 - 4 + 1 = -1$.

Conclusão.

Mínimos locais em $(1, 1)$ e $(-1, -1)$, ambos com $f = -1$. Sela em $(0, 0)$.

Observação sobre o máximo. Não há máximo local: como $x^4 + y^4$ domina o comportamento no infinito, $f(x, y) \rightarrow +\infty$ quando $\|(x, y)\| \rightarrow \infty$. Os dois mínimos são, na verdade, **mínimos globais**.

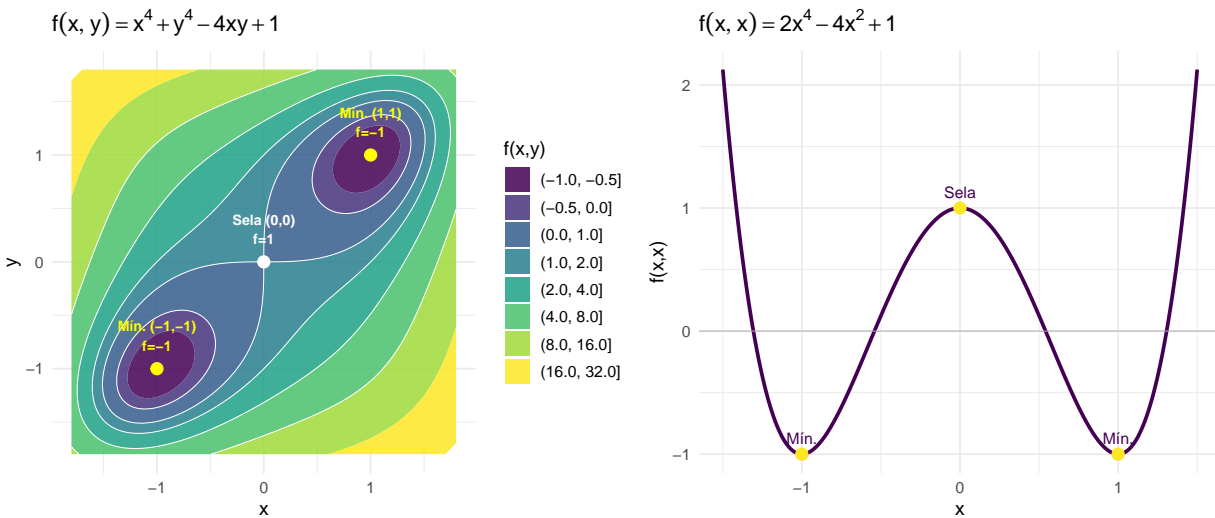


Figura 78: Função $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$. Curvas de nível com os três pontos críticos: mínimos globais em $(\pm 1, \pm 1)$ com $f = -1$ e sela na origem com $f = 1$. À direita, o perfil ao longo da reta $y = x$, $f(x, x) = 2x^4 - 4x^2 + 1$, evidencia o duplo poço característico.

30 Testes Anteriores — Teste 5

30.1 Teste 5 (2026) — 29 de maio de 2026

Este teste cobra **estática comparativa** em dois contextos clássicos: o modelo IS-LM não-linear (Questão 1) e a maximização de lucro da firma com dois insumos (Questão 2). Ambos são aplicações diretas do Teorema da Função Implícita e da regra de Cramer já desenvolvidas nos capítulos de funções de várias variáveis e otimização — a mecânica do IS-LM reaparece quase idêntica à do Teste 4 (2025), e o multiplicador $\partial K/\partial r$ da firma é exatamente o derivado na Seção de Aplicações Econômicas.

30.1.1 Questão 1 — Modelo IS-LM Não-Linear

Considere o modelo:

$$\begin{aligned} Y &= C + I + G, & C &= c(Y^d), & Y^d &= Y - T, \\ I &= I_G + I_P, & I_P &= I_P(r), & M^s &= \bar{M}, & M^d &= M(Y, r), \end{aligned}$$

com $0 < c' < 1$, $I'_P < 0$, $M_Y > 0$, $M_r < 0$. O equilíbrio ocorre quando demanda e oferta se igualam tanto no mercado de bens quanto no mercado monetário.

30.1.1.1 (a) Sistema que resolve o modelo e diferencial total

Forma reduzida. Substituindo $C = c(Y - T)$, $Y^d = Y - T$, $I = I_G + I_P(r)$ na identidade de produto, e impondo $M^d = M^s$, o equilíbrio é o par (Y, r) que zera o sistema:

$$\begin{cases} \text{IS:} & Y - c(Y - T) - I_G - I_P(r) - G = 0, \\ \text{LM:} & M(Y, r) - \bar{M} = 0. \end{cases}$$

Diferencial total. Tomando como **endógenas** (Y, r) e como **exógenas** (G, T, I_G, \bar{M}) :

$$\begin{aligned} \text{IS:} & \quad dY - c'(dY - dT) - I'_P dr - dI_G - dG = 0, \\ \text{LM:} & \quad M_Y dY + M_r dr - d\bar{M} = 0. \end{aligned}$$

Reorganizando, com as endógenas à esquerda:

$$\begin{aligned} (1 - c') dY - I'_P dr &= dG + dI_G - c' dT, \\ M_Y dY + M_r dr &= d\bar{M}. \end{aligned}$$

Forma matricial:

$$\boxed{\underbrace{\begin{bmatrix} 1 - c' & -I'_P \\ M_Y & M_r \end{bmatrix}}_J \begin{bmatrix} dY \\ dr \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dG + dI_G - c' dT \\ d\bar{M} \end{bmatrix}.}$$

Determinante (Jacobiano).

$$\Delta = \det \mathbf{J} = (1 - c') M_r - (-I'_P) M_Y = \underbrace{(1 - c') M_r}_{<0} + \underbrace{I'_P M_Y}_{<0} < 0,$$

pois $1 - c' > 0$, $M_r < 0$, $I'_P < 0$ e $M_Y > 0$. Como $\Delta \neq 0$, o **Teorema da Função Implícita** garante que (Y, r) são funções C^1 das exógenas numa vizinhança do equilíbrio, e os multiplicadores de estática comparativa saem pela **regra de Cramer**.

30.1.1.2 (b) Queda na oferta monetária ($d\bar{M} < 0$, demais fixos)

O sistema reduz-se a:

$$\begin{bmatrix} 1 - c' & -I'_P \\ M_Y & M_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dY \\ dr \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ d\bar{M} \end{bmatrix}.$$

Regra de Cramer.

$$\frac{dY}{d\bar{M}} = \frac{1}{\Delta} \det \begin{bmatrix} 0 & -I'_P \\ 1 & M_r \end{bmatrix} = \frac{I'_P}{\Delta} > 0,$$

pois $I'_P < 0$ e $\Delta < 0$.

$$\frac{dr}{d\bar{M}} = \frac{1}{\Delta} \det \begin{bmatrix} 1 - c' & 0 \\ M_Y & 1 \end{bmatrix} = \frac{1 - c'}{\Delta} < 0,$$

pois $1 - c' > 0$ e $\Delta < 0$. Como o choque é uma **queda** ($d\bar{M} < 0$), os efeitos sobre os níveis invertem o sinal dos multiplicadores:

$$\boxed{d\bar{M} < 0 \implies dY < 0, \quad dr > 0.}$$

Interpretação econômica. Contração monetária. Com menos moeda em circulação e Y momentaneamente dado, o mercado monetário só reequilibra com **juro mais alto**; a LM desloca-se para a esquerda/cima. O juro maior **desestimula o investimento privado** (pois $I'_P < 0$), reduzindo a demanda agregada e o produto. É o espelho exato da política monetária expansionista.

30.1.1.3 (c) Aumento no gasto do governo ($dG > 0$, demaiss fixos)

$$\begin{bmatrix} 1 - c' & -I'_P \\ M_Y & M_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dY \\ dr \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dG \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Regra de Cramer.

$$\frac{dY}{dG} = \frac{1}{\Delta} \det \begin{bmatrix} 1 & -I'_P \\ 0 & M_r \end{bmatrix} = \frac{M_r}{\Delta} > 0,$$

pois $M_r < 0$ e $\Delta < 0$.

$$\frac{dr}{dG} = \frac{1}{\Delta} \det \begin{bmatrix} 1 - c' & 1 \\ M_Y & 0 \end{bmatrix} = \frac{-M_Y}{\Delta} > 0,$$

pois $M_Y > 0$ e $\Delta < 0$.

$$dG > 0 \implies dY > 0, \quad dr > 0.$$

Interpretação econômica. Política fiscal expansionista. O aumento de G desloca a **IS para a direita**: a maior demanda agregada eleva o produto Y . O produto maior aumenta a demanda por moeda $M(Y, r)$ e, com \bar{M} fixo, o juro r sobe para reequilibrar o mercado monetário. O efeito final sobre Y é positivo, mas **parcialmente compensado** pelo *crowding out*: o juro mais alto reduz I_P .

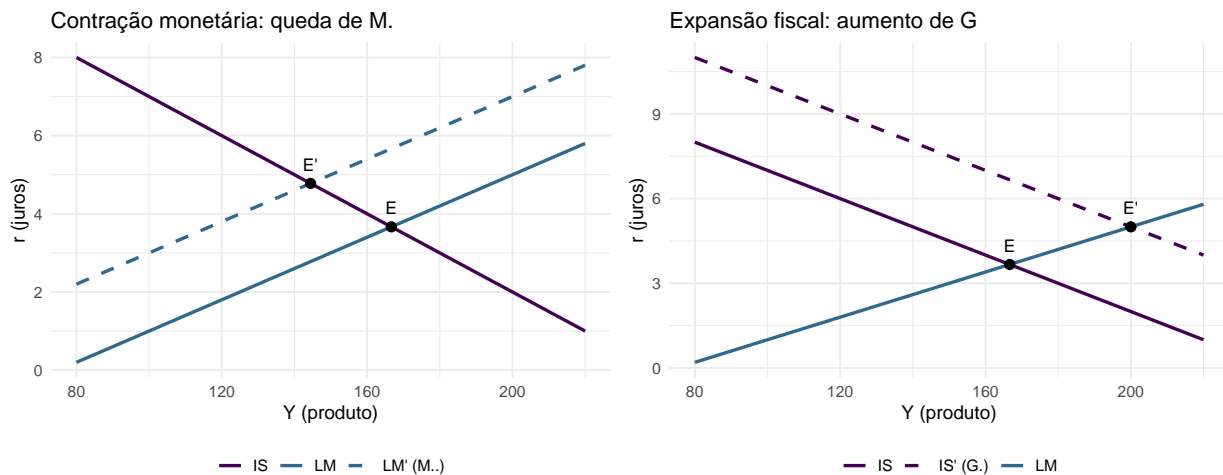


Figura 79: Estática comparativa no diagrama IS-LM. Esquerda: queda de \bar{M} desloca a LM à esquerda/cima ($Y \downarrow, r \uparrow$). Direita: aumento de G desloca a IS à direita ($Y \uparrow, r \uparrow$).

30.1.2 Questão 2 — Maximização de Lucro da Firma com Dois Insumos

Uma firma produz um bem ao preço p usando a função de produção $F(K, L)$, com $F_K > 0$, $F_L > 0$, $F_{KK} < 0$, $F_{LL} < 0$ e $F_{KL} > 0$. Sejam w o salário e r a taxa de juros (preço do capital). Todos os preços (p, w, r) são tomados como dados.

30.1.2.1 (1) Problema de maximização, CPOs e CSO

Problema. A firma escolhe (K, L) que maximizam o lucro

$$\max_{K,L} \pi(K, L) = p F(K, L) - r K - w L.$$

Condições de primeira ordem (CPOs). Anulando o gradiente:

$$\frac{\partial \pi}{\partial K} = p F_K - r = 0, \quad \frac{\partial \pi}{\partial L} = p F_L - w = 0.$$

Em palavras: a firma contrata cada insumo até que o **valor do produto marginal** se iguale ao seu preço, $p F_K = r$ e $p F_L = w$.

Condição de segunda ordem (CSO). A Hessiana do lucro é

$$H_\pi = \begin{pmatrix} \pi_{KK} & \pi_{KL} \\ \pi_{LK} & \pi_{LL} \end{pmatrix} = p \begin{pmatrix} F_{KK} & F_{KL} \\ F_{LK} & F_{LL} \end{pmatrix}.$$

Para que o ponto crítico seja **máximo**, H_π deve ser **definida negativa**, o que pelo critério de Sylvester (menores principais líderes alternando de sinal a partir de negativo) exige:

$$\pi_{KK} = p F_{KK} < 0 \quad (\checkmark, \text{ pois } F_{KK} < 0), \quad |H_\pi| = p^2(F_{KK} F_{LL} - F_{KL}^2) > 0.$$

A primeira condição vale por hipótese. A segunda exige $F_{KK} F_{LL} - F_{KL}^2 > 0$, isto é, F **estritamente côncava** — a curvatura própria dos insumos domina a curvatura cruzada F_{KL} . Sob essa hipótese (que assumimos), o ponto crítico é máximo global.

30.1.2.2 (2) Diferenciação da CPO e sinal de $\partial K / \partial r$

Diferenciando totalmente as duas CPOs, mantendo p e w fixos e variando apenas r :

$$\begin{aligned} p F_{KK} dK + p F_{KL} dL &= dr, \\ p F_{LK} dK + p F_{LL} dL &= 0. \end{aligned}$$

Forma matricial:

$$p \begin{pmatrix} F_{KK} & F_{KL} \\ F_{LK} & F_{LL} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dK \\ dL \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dr \\ 0 \end{pmatrix}.$$

A matriz do sistema é exatamente H_π , com $|H_\pi| = p^2(F_{KK}F_{LL} - F_{KL}^2) > 0$ pela CSO. Pela **regra de Cramer**:

$$\frac{\partial K}{\partial r} = \frac{1}{|H_\pi|} \det \begin{pmatrix} 1 & pF_{KL} \\ 0 & pF_{LL} \end{pmatrix} = \frac{pF_{LL}}{p^2(F_{KK}F_{LL} - F_{KL}^2)} = \frac{F_{LL}}{p(F_{KK}F_{LL} - F_{KL}^2)}.$$

Sinal. O numerador $F_{LL} < 0$; o denominador $p(F_{KK}F_{LL} - F_{KL}^2) > 0$ (preço positivo vezes determinante positivo da CSO). Logo:

$$\boxed{\frac{\partial K}{\partial r} = \frac{F_{LL}}{p(F_{KK}F_{LL} - F_{KL}^2)} < 0.}$$

Interpretação econômica. Encarecer o capital (aumento de r) **reduz a demanda por capital** — a curva de demanda por insumo é negativamente inclinada, resultado garantido pela concavidade da tecnologia. Por simetria, $\partial L/\partial w < 0$. Já o multiplicador cruzado $\partial L/\partial r$ tem o sinal de $-F_{KL} < 0$: como capital e trabalho são complementares ($F_{KL} > 0$), encarecer o capital também reduz a demanda por trabalho.

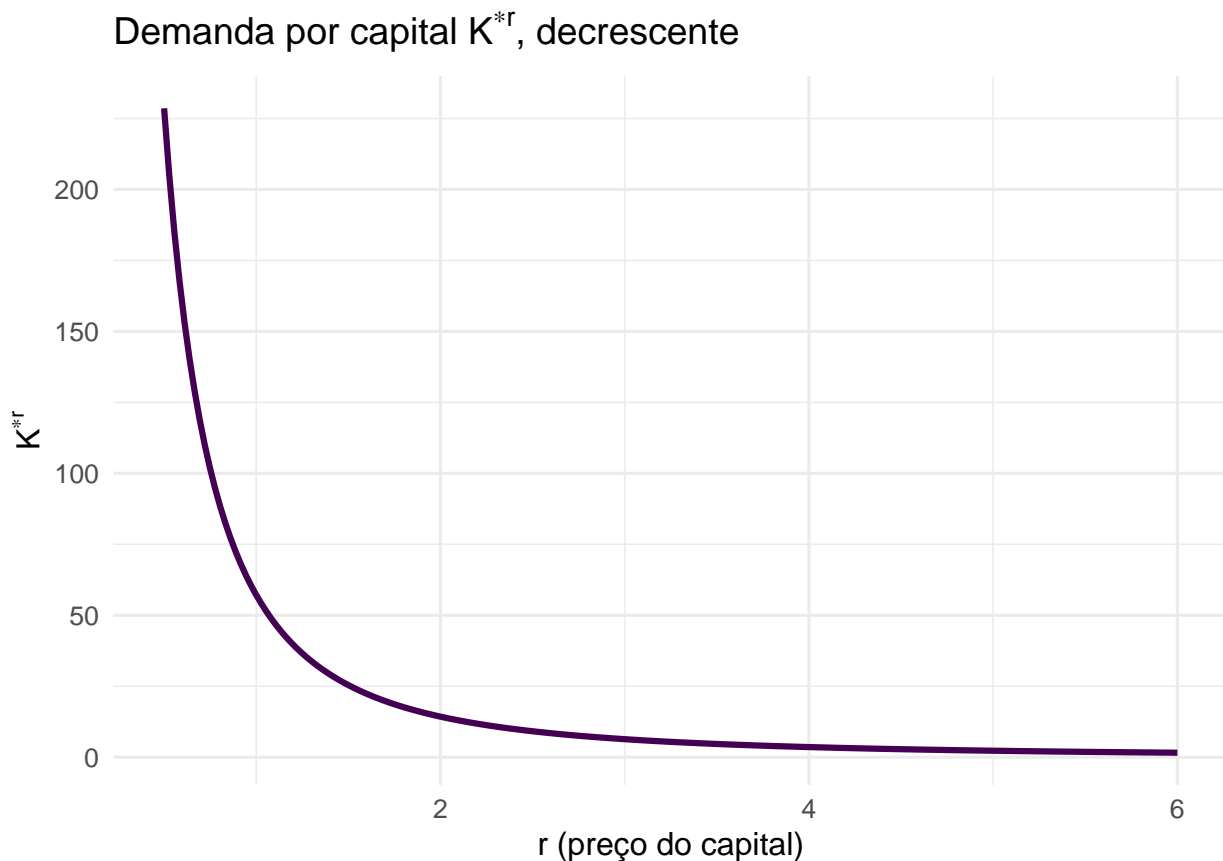


Figura 80: Demanda por capital decrescente em r . Para a tecnologia Cobb-Douglas $F(K, L) = AK^\alpha L^\beta$ com $\alpha + \beta < 1$, as CPOs $pF_K = r$, $pF_L = w$ dão a demanda ótima $K^*(r)$ a p, w fixos. A curva é decrescente, confirmando $\partial K/\partial r < 0$.

31 Mapa da Matéria da Prova

A prova segue a estrutura abaixo (escopo divulgado e calibrado pelas provas de 2022, 2024 e 2025):

Bloco	Peso	Conteúdo
Questão 1 — Teorema	1,0	Demonstração das condições necessárias e suficientes para máximo/mínimo
1ª parte	40%	Derivada / Antiderivada, EDO de 2ª ordem ($\Delta > 0$, $\Delta = 0$, $\Delta < 0$), Gráfico / Análise
2ª parte	60%	Máx. lucro, Máx. utilidade, Min. custo // Min. despesa (otimização com e sem restrição, estática comparativa, Teorema do Envelope)

A demonstração cai só na Questão 1 (caso univariado via Taylor; caso multivariado via Hessiana). Nos demais blocos o que se cobra é **cálculo** e **modelagem econômica**, não prova de teorema.

Organização: **(I) Simulado 1** (formato da prova, mix geral com firma); **(II) Simulado 2** (teoria do consumidor); **(III) Bateria** de exercícios por tópico; **(IV) Gabarito** completo; **(V) Checklist** de véspera.

32 Parte I — Simulado 1 (10,0 pontos)

Tempo sugerido: 2h. Gabarito na Parte IV.

32.1 Questão 1 (1,0 ponto)

Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ duas vezes diferenciável e x^* um ponto interior do domínio.

- Enuncie e **demonstre** as condições **necessárias** de 1ª e 2ª ordem para que x^* seja **mínimo local**.
- Enuncie as condições **suficientes** e prove que garantem mínimo local estrito.
- Generalize para $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$: CPO e CSO (Hessiana) para mínimo e máximo, casos $n = 2$ e $n = 3$.

32.2 Questão 2 (1,5 ponto)

Utilizando os teoremas de derivação, calcule a derivada de

$$f(x) = x^x + \frac{\sqrt{2+3x}}{\ln(5+3^x+x e^x)}.$$

32.3 Questão 3 (2,0 pontos)

- (1,0) Calcule $\int x^3 \ln(x^2 + 2) dx$.
- (1,0) Resolva $y'' + 6y' + 9y = 5$, com $y(0) = \frac{14}{9}$ e $y'(0) = 0$.

32.4 Questão 4 (1,5 ponto) — Gráfico / Análise

Dada $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$, encontre os intervalos de crescimento/decrescimento e de concavidade/convexidade, localize os pontos de máximo, mínimo e inflexão, e faça um esboço do gráfico.

32.5 Questão 5 (4,0 pontos) — Minimização de Custo da Firma

Uma firma produz $y = f(K, L)$, com $f_K, f_L > 0$, $f_{KK}, f_{LL} < 0$, $f_{KL} = f_{LK} > 0$. Sejam r o preço do capital e w o salário.

- (1,0) Escreva o problema de **minimização de custo** para um nível de produção q . Monte o Lagrangeano, encontre as CPO e diga quais são as CSO.
- (0,5) Represente o problema **graficamente** (isoquanta e isocusto).
- (1,0) Diferencie as CPO e encontre o **sinal** de $\partial K / \partial r$ e de $\partial K / \partial q$.
- (1,0) Suponha $f(K, L) = K^{1/2} L^{1/2}$. Encontre K^* , L^* , λ^* e a função custo $C^*(r, w, q)$.

- e. (0,5) Verifique, pelo **Teorema do Envelope** (Lema de Shephard), que $\partial C^*/\partial r = K^*$ e $\partial C^*/\partial q = \lambda^*$. Qual o grau de homogeneidade de C^* em (r, w) ?

33 Parte II — Simulado 2 (10,0 pontos) — Teoria do Consumidor

Tempo sugerido: 2h. Gabarito na Parte IV.

33.1 Questão 1 (1,0 ponto)

Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ duas vezes diferenciável. Enuncie e **demonstre** as condições **necessárias e suficientes** para que x^* seja um ponto de **máximo local**.

33.2 Questão 2 (1,5 ponto)

Calcule a derivada de

$$f(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^{x+1} + \frac{e^{x^2+2x+1}}{\sqrt{5x-2}} - 3^x.$$

33.3 Questão 3 (2,0 pontos)

- (1,0) Calcule $\int x^2 \ln x dx$.
- (1,0) Resolva $y'' - 3y' + 2y = 4$, com $y(0) = 4$ e $y'(0) = 5$.

33.4 Questão 4 (5,5 pontos) — O Consumidor por Inteiro

Seja $U(x_1, x_2)$ a utilidade, p_i o preço do bem i e R a renda. Considere $U_i > 0$, $U_{ii} < 0$, $U_{ij} > 0$.

- (1,0) Escreva o problema de **maximização de utilidade**. Monte o Lagrangeano, encontre as CPO. Quais são as CSO?
- (0,5) Represente **graficamente**.
- (1,0) Diferencie as CPO e encontre o sinal de $\partial x_1 / \partial p_1$ e de $\partial x_1 / \partial R$.
- (1,0) Para $U(x_1, x_2) = x_1^{1/2} x_2^{1/2}$, encontre as demandas marshallianas x_1^* , x_2^* e λ^* .
- (1,0) Encontre a **utilidade indireta** $V(p_1, p_2, R)$; pelo Envelope, calcule $\partial V / \partial p_1$ e $\partial V / \partial R$ e verifique a **Identidade de Roy**.
- (1,0) Resolva agora o **dual** (minimização de despesa) para atingir utilidade \bar{U} : encontre as demandas hicksianas h_1, h_2 , a função despesa $E^*(p_1, p_2, \bar{U})$ e seu grau de homogeneidade nos preços.

34 Parte III — Bateria por Tópico

Sem demonstrações — só cálculo e modelagem. Vários itens vêm de provas e testes anteriores.

34.1 Tópico A — Derivação

A1. $f(x) = x^{x+1} + \frac{2+3x}{\ln(1-2x+x^{32})}$.

A2. $f(x) = (5x-2)^x + e^{\sqrt{x}} - \ln(x^3+1)$.

A3. $f(x, y) = xy + e^{x^2+y^2}$: derivadas parciais de 1ª e 2ª ordem; mostre $f_{xy} = f_{yx}$.

A4. $f(x, y) = x^a y^b$ (Cobb-Douglas): parciais de 1ª e 2ª ordem e verifique $f_{xy} = f_{yx}$.

34.2 Tópico B — Antiderivada (Integração por Partes e Substituição)

Por partes:

B1. $\int (\ln x)^2 dx$ **B2.** $\int (2+5x)e^{x/3} dx$ **B3.** $\int x^2 e^{-x} dx$

B4. $\int (2+3x)e^{2x} dx$ **B5.** $\int x \ln(x+1) dx$ **B6.** $\int x^3 \ln(x^2+2) dx$

Por substituição:

B7. $\int x e^{x^2} dx$ **B8.** $\int \frac{3x^2+6x}{x^3+3x^2-2} dx$ **B9.** $\int x^2 \sqrt{x^3+1} dx$

B10. $\int \frac{\ln x}{x} dx$ **B11.** (substituição + partes) $\int x^3 e^{x^2} dx$

34.3 Tópico C — EDO de 2ª Ordem

C1. ($\Delta > 0$) $y'' - 5y' + 6y = 5$, $y(0) = \frac{5}{6}$, $y'(0) = 1$.

C2. ($\Delta = 0$) $y'' - 4y' + 4y = 5$, $y(0) = \frac{3}{2}$, $y'(0) = -1$.

C3. ($\Delta < 0$) $y'' + 2y' + 5y = 10$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 0$.

C4. ($\Delta < 0$, $\alpha = 0$) $y'' + 4y = 8$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 2$.

C5. ($\Delta = 0$) $2y'' - 8y' + 8y = 16$, $y(0) = 3$, $y'(0) = -1$.

C6. ($\Delta > 0$) $y'' + 5y' + 4y = 1$ (solução geral).

34.4 Tópico D — Análise de Função / Gráfico

D1. $f(x) = x^3 + 3x^2 + 2x$. **D2.** $f(x) = x^4 - 2x^2$. **D3.** $f(x) = 3x^4 - 4x^3$.

34.5 Tópico E — Otimização sem Restrição (Máx. Lucro)

E1. (Concorrência perfeita, 2 insumos) $\max_{K,L} \pi = p f(K, L) - wL - rK$: CPO, CSO e interpretação de $f_K/f_L = r/w$.

E2. (Monopolista, 2 mercados) $P_1 = 50 - 5Q_1$, $P_2 = 100 - 10Q_2$, custo $C = 90 + 20(Q_1 + Q_2)$. Encontre (Q_1^*, Q_2^*) , preços, lucro e verifique a CSO. Onde o preço é maior?

E3. (Monopolista, 1 mercado) demanda inversa $P = 100 - 2Q$, custo $C = Q^2 + 10Q + 50$. Encontre Q^* , P^* , lucro e verifique a CSO.

E4. (Concorrência perfeita, 1 produto) $\pi(q) = pq - (c_0 + c_1q + \frac{1}{2}c_2q^2)$. Encontre q^* e interprete.

34.6 Tópico F — Otimização com Restrição (Min. Custo // Min. Despesa)

F1. (Firma, Cobb-Douglas) $\min rK + wL$ s.a. $K^{1/2}L^{1/2} = q$: K^* , L^* , λ^* , C^* , homogeneidade, $\partial C^*/\partial q$.

F2. (Firma, CES) $\min rK + wL$ s.a. $(K^\rho + L^\rho)^{\beta/\rho} = q$: K^* , L^* , função custo e homogeneidade.

F3. (Firma, 3 insumos) $f = K^{1/4}L^{1/4}X^{1/2}$, preços r, w, p_X : K^* , L^* , X^* , λ^* , função custo e homogeneidade.

F4. (Consumidor, despesa, genérico) $\min p_1x_1 + p_2x_2$ s.a. $U(x_1, x_2) = \bar{U}$: CPO, CSO e sinais de $\partial x_1/\partial \bar{U}$ e $\partial x_1/\partial p_1$.

F5. (Consumidor, 3 bens Cobb-Douglas) $U = x_1^{1/4}x_2^{1/4}x_3^{1/2}$: x_i^* , λ^* , função despesa e homogeneidade.

F6. (Consumidor, utilidade CES) $U = (x_1^\rho + x_2^\rho)^{1/\rho}$: demandas marshallianas x_1^* , x_2^* .

35 Parte IV — Gabarito

35.1 Regras de derivação e estratégia (referência)

Tenha estas regras à mão para todas as questões de derivada. Sejam f, g deriváveis e c constante.

Regras básicas.

$$(c)' = 0, \quad (x^n)' = n x^{n-1}, \quad (c f)' = c f'.$$

Soma / diferença. $(f \pm g)' = f' \pm g'$.

Produto. $(f g)' = f' g + f g'$.

Quociente. $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' g - f g'}{g^2}$.

Cadeia. $[f(g(x))]' = f'(g(x)) g'(x)$.

Exponencial e logaritmo.

$$(e^x)' = e^x, \quad (e^g)' = e^g g', \quad (a^x)' = a^x \ln a, \quad (a^g)' = a^g \ln a g',$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad (\ln g)' = \frac{g'}{g}, \quad (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}.$$

Potência de expoente variável (base e expoente dependem de x). Escreva $u^v = e^{v \ln u}$ e derive pela cadeia/produto:

$$(u^v)' = u^v \left(v' \ln u + v \frac{u'}{u} \right).$$

Casos úteis: $x^x = e^{x \ln x} \Rightarrow (x^x)' = x^x (\ln x + 1)$; $x^g = e^{g \ln x}$.

Estratégia para expressões grandes (a ideia central de todas as questões de derivada):

1. **Identifique a estrutura externa** — é soma, quociente, produto ou potência u^v ?
2. **Quebre em blocos menores** e nomeie-os (por exemplo $f = A + \frac{B}{C}$).
3. **Derive cada bloco** com a regra apropriada acima.
4. **Recombine** pela regra da soma/produto/quociente.
5. Quando houver **expoente variável** ou produtos/quocientes longos, use **diferenciação logarítmica**: tome $\ln f$, derive $\left(\frac{f'}{f} = \dots\right)$ e multiplique por f .

35.2 Gabarito — Simulado 1

35.2.1 Questão 1 — Condições necessárias e suficientes (mínimo)

Enunciado. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ duas vezes diferenciável e x^* um ponto interior. (a) Enuncie e demonstre as condições necessárias de 1ª e 2ª ordem para x^* ser mínimo local; (b) enuncie as suficientes e prove que garantem mínimo local estrito; (c) generalize para $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ (CPO e CSO via Hessiana, casos $n = 2$ e $n = 3$).

A ferramenta central é a **expansão de Taylor de 2ª ordem com resto**, que decorre do Teorema do Valor Médio (e este, do Teorema de Rolle). Para Δx pequeno, existe $\theta \in (0, 1)$ tal que

$$f(x^* + \Delta x) = f(x^*) + f'(x^*) \Delta x + \frac{1}{2} f''(x^* + \theta \Delta x) (\Delta x)^2. \quad (\text{T})$$

a) Condições necessárias.

Se x^* é mínimo local, então, para todo Δx pequeno,

$$f(x^* + \Delta x) - f(x^*) \geq 0.$$

Substituindo (T), isso significa

$$f'(x^*) \Delta x + \frac{1}{2} f''(x^* + \theta \Delta x) (\Delta x)^2 \geq 0.$$

Para $\Delta x \rightarrow 0$ o termo linear domina. Se fosse $f'(x^*) > 0$, escolhendo $\Delta x < 0$ pequeno o lado direito ficaria negativo — contradição. Se fosse $f'(x^*) < 0$, escolheríamos $\Delta x > 0$. Logo a **condição necessária de 1ª ordem** é

$$\boxed{f'(x^*) = 0.}$$

Com $f'(x^*) = 0$, a desigualdade (T) reduz-se a

$$\frac{1}{2} f''(x^* + \theta \Delta x) (\Delta x)^2 \geq 0.$$

Como $(\Delta x)^2 > 0$, devemos ter $f''(x^* + \theta \Delta x) \geq 0$; fazendo $\Delta x \rightarrow 0$ e usando a continuidade de f'' , obtém-se a **condição necessária de 2ª ordem**

$$\boxed{f''(x^*) \geq 0.}$$

b) Condições suficientes.

Suponha agora $f'(x^*) = 0$ e $f''(x^*) > 0$. Por continuidade, $f'' > 0$ em toda uma vizinhança de x^* . Então, para $\Delta x \neq 0$ pequeno, o ponto intermediário $x^* + \theta \Delta x$ está nessa vizinhança e $f''(x^* + \theta \Delta x) > 0$. Por (T), com termo linear nulo,

$$f(x^* + \Delta x) - f(x^*) = \frac{1}{2} f''(x^* + \theta \Delta x) (\Delta x)^2 > 0.$$

Portanto $f(x^*) < f(x^* + \Delta x)$ para todo $\Delta x \neq 0$ próximo: x^* é **mínimo local estrito**. (Para máximo, basta $f''(x^*) < 0$.) ■

c) Caso multivariado.

A expansão de Taylor passa a ser

$$f(x^* + \Delta x) = f(x^*) + \nabla f(x^*)^\top \Delta x + \frac{1}{2} \Delta x^\top H \Delta x + o(\|\Delta x\|^2),$$

com Hessiana $H = (f_{ij}(x^*))$, $f_{ij} = \partial^2 f / \partial x_i \partial x_j$. As condições são:

- **CPO:** $\nabla f(x^*) = 0$, i.e. $f_i(x^*) = 0$ para todo i .
- **CSO** pelos menores principais líderes $D_k = \det H^{(k \times k)}$:
 - **Mínimo** (H definida positiva): $D_1 > 0$, $D_2 > 0$, ..., $D_n > 0$ (todos positivos).
 - **Máximo** (H definida negativa): sinais alternados começando negativo, $D_1 < 0$, $D_2 > 0$, $D_3 < 0$, ...

Para $n = 2$, com $H = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{12} & f_{22} \end{pmatrix}$ e $|H| = f_{11}f_{22} - f_{12}^2$:

$$\text{mín: } f_{11} > 0, |H| > 0; \quad \text{máx: } f_{11} < 0, |H| > 0; \quad \text{sela: } |H| < 0.$$

Para $n = 3$, usam-se $D_1 = f_{11}$, $D_2 = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{12} & f_{22} \end{vmatrix}$ e $D_3 = |H|$, com os mesmos padrões de sinal.

35.2.2 Questão 2 — Derivada

Enunciado. Utilizando os teoremas de derivação, calcule a derivada de $f(x) = x^x + \frac{\sqrt{2+3x}}{\ln(5+3^x+xe^x)}$.

Estratégia. Seguindo a referência, identificamos a estrutura externa (uma **soma** de dois blocos) e quebramos f em funções menores: $f(x) = x^x + \frac{B}{C}$, com $B = \sqrt{2+3x}$ e $C = \ln(5+3^x+xe^x)$. Derivamos cada bloco — x^x (potência de expoente variável), B (cadeia) e C (cadeia no logaritmo) — e recombinaos com a regra do quociente.

Para o primeiro termo, reescrevemos como exponencial: $x^x = e^{x \ln x}$. Derivando,

$$\frac{d}{dx} x^x = e^{x \ln x} \cdot \frac{d}{dx} (x \ln x) = x^x (\ln x + 1).$$

Para o quociente, calculamos as derivadas das partes. O numerador:

$$B' = \frac{d}{dx} (2+3x)^{1/2} = \frac{3}{2\sqrt{2+3x}}.$$

O denominador, pela regra da cadeia no logaritmo:

$$C' = \frac{1}{5 + 3^x + xe^x} \cdot (3^x \ln 3 + e^x + xe^x) = \frac{3^x \ln 3 + e^x(1+x)}{5 + 3^x + xe^x}.$$

Aplicando a regra do quociente $\left(\frac{B}{C}\right)' = \frac{B'C - BC'}{C^2}$ e somando o primeiro termo:

$$f'(x) = x^x(\ln x + 1) + \frac{\frac{3}{2\sqrt{2+3x}}C - \sqrt{2+3x} \frac{3^x \ln 3 + e^x(1+x)}{5 + 3^x + xe^x}}{C^2}, \quad C = \ln(5 + 3^x + xe^x).$$

35.2.3 Questão 3a — $\int x^3 \ln(x^2 + 2) dx$

Enunciado. Calcule a integral $\int x^3 \ln(x^2 + 2) dx$.

Integramos por partes com $u = \ln(x^2 + 2)$ e $dv = x^3 dx$. Então

$$du = \frac{2x}{x^2 + 2} dx, \quad v = \frac{x^4}{4}.$$

Logo

$$\int x^3 \ln(x^2 + 2) dx = \frac{x^4}{4} \ln(x^2 + 2) - \frac{1}{2} \int \frac{x^5}{x^2 + 2} dx.$$

A integral restante resolve-se por **divisão polinomial**:

$$\frac{x^5}{x^2 + 2} = x^3 - 2x + \frac{4x}{x^2 + 2} \implies \int \frac{x^5}{x^2 + 2} dx = \frac{x^4}{4} - x^2 + 2 \ln(x^2 + 2).$$

Substituindo de volta:

$$\int x^3 \ln(x^2 + 2) dx = \frac{x^4}{4} \ln(x^2 + 2) - \frac{x^4}{8} + \frac{x^2}{2} - \ln(x^2 + 2) + C.$$

35.2.4 Questão 3b — $y'' + 6y' + 9y = 5$

Enunciado. Resolva a EDO de 2ª ordem $y'' + 6y' + 9y = 5$, com $y(0) = \frac{14}{9}$ e $y'(0) = 0$.

A equação característica é

$$r^2 + 6r + 9 = (r + 3)^2 = 0 \quad \implies \quad r = -3 \text{ (raiz dupla, } \Delta = 0\text{)}.$$

A solução homogênea, no caso de raiz dupla, leva o fator x :

$$y_h(x) = (C_1 + C_2x) e^{-3x}.$$

Para a solução particular, como o termo forçante é constante, tentamos $y_p = A$:

$$9A = 5 \quad \implies \quad A = \frac{5}{9}.$$

A solução geral é, portanto,

$$y(x) = (C_1 + C_2x) e^{-3x} + \frac{5}{9}.$$

Aplicamos $y(0) = \frac{14}{9}$:

$$C_1 + \frac{5}{9} = \frac{14}{9} \quad \implies \quad C_1 = 1.$$

Derivando, $y'(x) = e^{-3x}(C_2 - 3C_1 - 3C_2x)$, e impondo $y'(0) = 0$:

$$C_2 - 3C_1 = 0 \quad \implies \quad C_2 = 3.$$

$$\boxed{y(x) = (1 + 3x) e^{-3x} + \frac{5}{9}.$$

Verificação: $y(0) = 1 + \frac{5}{9} = \frac{14}{9}$ e $y'(0) = 3 - 3 = 0$.

35.2.5 Questão 4 — Análise de $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$

Enunciado. Dada $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$, encontre os intervalos de crescimento/decrescimento e de concavidade/convexidade, localize os pontos de máximo, mínimo e inflexão, e faça um esboço do gráfico.

Começamos pela primeira derivada, que controla crescimento e extremos:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x - 3)(x + 1).$$

As raízes são $x = -1$ e $x = 3$. Estudando o sinal:

- $f'(x) > 0$ em $(-\infty, -1)$ e em $(3, \infty)$ — função **crecente**;
- $f'(x) < 0$ em $(-1, 3)$ — função **decrecente**.

A segunda derivada controla a concavidade:

$$f''(x) = 6x - 6 = 6(x - 1).$$

Avaliando nos pontos críticos:

- $f''(-1) = -12 < 0$, logo $x = -1$ é **máximo local**, com $f(-1) = 10$;
- $f''(3) = 12 > 0$, logo $x = 3$ é **mínimo local**, com $f(3) = -22$.

Quanto à concavidade: $f'' < 0$ em $(-\infty, 1)$ (**côncava**) e $f'' > 0$ em $(1, \infty)$ (**convexa**), com **ponto de inflexão** em $x = 1$, onde $f(1) = -6$.

Esboço: cúbica que cresce, atinge o máximo $(-1, 10)$, decresce mudando de concavidade na inflexão $(1, -6)$, alcança o mínimo $(3, -22)$ e volta a crescer.

35.2.6 Questão 5 — Minimização de custo da firma

Enunciado. Firma com $y = f(K, L)$ ($f_K, f_L > 0$, $f_{KK}, f_{LL} < 0$, $f_{KL} = f_{LK} > 0$), preço do capital r e salário w . (a) Escreva o problema de minimização de custo para produção q , com Lagrangeano, CPO e CSO; (b) represente graficamente; (c) ache o sinal de $\partial K/\partial r$ e $\partial K/\partial q$; (d) para $f = K^{1/2}L^{1/2}$, encontre K^*, L^*, λ^* e $C^*(r, w, q)$; (e) verifique o Envelope/Shephard e a homogeneidade de C^* .

a) Problema, Lagrangeano e CPO.

O problema é

$$\min_{K, L} rK + wL \quad \text{s.a.} \quad f(K, L) = q,$$

com Lagrangeano

$$\mathcal{L}(K, L, \lambda) = rK + wL + \lambda(q - f(K, L)).$$

As condições de primeira ordem são

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K} = r - \lambda f_K = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L} = w - \lambda f_L = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = q - f(K, L) = 0.$$

Dividindo as duas primeiras, o multiplicador cancela e surge a condição de **tangência**:

$$\frac{f_K}{f_L} = \frac{r}{w} \quad (\text{TMST} = \text{razão de preços dos fatores}).$$

A CSO usa o **Hessiano orlado**

$$\bar{H} = \begin{pmatrix} -\lambda f_{KK} & -\lambda f_{KL} & -f_K \\ -\lambda f_{KL} & -\lambda f_{LL} & -f_L \\ -f_K & -f_L & 0 \end{pmatrix},$$

e a condição de **mínimo** é $|\bar{H}| < 0$.

b) Gráfico. No plano (L, K) , a isoquanta $f(K, L) = q$ é convexa, com inclinação $\left. \frac{dK}{dL} \right|_q = -\frac{f_L}{f_K}$; a isocusto $rK + wL = \bar{C}$ é reta com inclinação $-\frac{w}{r}$. O ótimo é a **tangência** entre a isoquanta dada e a isocusto mais baixa possível.

c) Estática comparativa. Diferenciando o sistema de CPO (Teorema da Função Implícita) e resolvendo por Cramer, com $|\bar{H}| < 0$:

$$\frac{\partial K}{\partial r} = \frac{f_L^2}{|\bar{H}|} < 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial K}{\partial q} = \frac{\lambda(f_K f_{LL} - f_{KL} f_L)}{|\bar{H}|} > 0.$$

Ou seja: encarecer o capital reduz seu uso; produzir mais eleva a demanda por capital.

d) Cobb-Douglas $f(K, L) = K^{1/2} L^{1/2}$.

O Lagrangeano fica

$$\mathcal{L} = rK + wL + \lambda(q - K^{1/2} L^{1/2}),$$

com CPO

$$r = \lambda \frac{1}{2} K^{-1/2} L^{1/2}, \quad w = \lambda \frac{1}{2} K^{1/2} L^{-1/2}.$$

Dividindo uma pela outra obtemos a tangência

$$\frac{r}{w} = \frac{L}{K} \implies L = \frac{r}{w} K.$$

Substituindo na restrição $K^{1/2} L^{1/2} = q$:

$$K^{1/2} \left(\frac{r}{w} K \right)^{1/2} = q \implies K \sqrt{\frac{r}{w}} = q.$$

Isolando, obtemos as demandas condicionais de fatores e o multiplicador:

$$\boxed{K^* = q \sqrt{\frac{w}{r}}, \quad L^* = q \sqrt{\frac{r}{w}}, \quad \lambda^* = 2\sqrt{rw}.$$

A função custo no ótimo é

$$C^*(r, w, q) = rK^* + wL^* = q\sqrt{rw} + q\sqrt{rw} = 2q\sqrt{rw}.$$

e) **Envelope (Shephard) e homogeneidade.** Derivando C^* diretamente,

$$\frac{\partial C^*}{\partial r} = q \sqrt{\frac{w}{r}} = K^* \checkmark, \quad \frac{\partial C^*}{\partial q} = 2\sqrt{rw} = \lambda^* \checkmark.$$

E C^* é **homogênea de grau 1** em (r, w) : multiplicar r e w por t multiplica \sqrt{rw} — e portanto o custo — por t .

35.3 Gabarito — Simulado 2 (Teoria do Consumidor)

35.3.1 Questão 1 — Condições para máximo

Enunciado. Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ duas vezes diferenciável. Enuncie e demonstre as condições necessárias e suficientes para que x^* seja um ponto de máximo local.

Pela expansão de Taylor de 2ª ordem (T), $f(x^* + \Delta x) = f(x^*) + f'(x^*)\Delta x + \frac{1}{2}f''(x^* + \theta\Delta x)(\Delta x)^2$.

Se x^* é **máximo local**, então $f(x^* + \Delta x) - f(x^*) \leq 0$. Pelo mesmo argumento de sinal do termo linear (agora invertido), a 1ª ordem exige

$$\boxed{f'(x^*) = 0.}$$

Com isso, $\frac{1}{2}f''(x^* + \theta\Delta x)(\Delta x)^2 \leq 0$, e como $(\Delta x)^2 > 0$, a necessária de 2ª ordem é

$$\boxed{f''(x^*) \leq 0.}$$

A **condição suficiente** é $f'(x^*) = 0$ e $f''(x^*) < 0$: por continuidade $f'' < 0$ numa vizinhança, e então

$$f(x^* + \Delta x) - f(x^*) = \frac{1}{2}f''(x^* + \theta\Delta x)(\Delta x)^2 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{máximo local estrito. } \blacksquare$$

No caso multivariado, CPO $\nabla f(x^*) = 0$ e CSO com Hessiana **definida negativa** (menores principais alternando, $D_1 < 0, D_2 > 0, \dots$).

35.3.2 Questão 2 — Derivada

Enunciado. Calcule a derivada de $f(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^{x+1} + \frac{e^{x^2+2x+1}}{\sqrt{5x-2}} - 3^x$.

Estratégia. A estrutura externa é uma **soma de três blocos**; quebramos f e derivamos cada um pela regra adequada da referência (potência de expoente variável no 1º, quociente com cadeia no 2º, exponencial a^x no 3º). Tratamos os três termos separadamente.

Termo 1. Reescrevemos $\left(\frac{1}{x}\right)^{x+1} = e^{(x+1)\ln(1/x)} = e^{-(x+1)\ln x}$. Pela cadeia,

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x}\right)^{x+1} = \left(\frac{1}{x}\right)^{x+1} \cdot \left(-\ln x - \frac{x+1}{x}\right).$$

Termo 2. Note $x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$, logo o numerador é $N = e^{(x+1)^2}$ com $N' = 2(x+1)e^{(x+1)^2}$, e o denominador $D = (5x-2)^{1/2}$ com $D' = \frac{5}{2\sqrt{5x-2}}$. Pela regra do quociente,

$$\frac{d}{dx} \frac{e^{(x+1)^2}}{\sqrt{5x-2}} = \frac{2(x+1)e^{(x+1)^2}\sqrt{5x-2} - e^{(x+1)^2}\frac{5}{2\sqrt{5x-2}}}{5x-2}.$$

Termo 3. $\frac{d}{dx} 3^x = 3^x \ln 3$.

Somando,

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^{x+1} \left(-\ln x - \frac{x+1}{x}\right) + \frac{2(x+1)e^{(x+1)^2} \sqrt{5x-2} - \frac{5e^{(x+1)^2}}{2\sqrt{5x-2}}}{5x-2} - 3^x \ln 3.$$

35.3.3 Questão 3a — $\int x^2 \ln x \, dx$

Enunciado. Calcule a integral $\int x^2 \ln x \, dx$.

Por partes, com $u = \ln x$ e $dv = x^2 \, dx$:

$$du = \frac{1}{x} \, dx, \quad v = \frac{x^3}{3}.$$

Logo

$$\int x^2 \ln x \, dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} \, dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{3} \int x^2 \, dx.$$

Concluindo,

$$\int x^2 \ln x \, dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + C = \frac{x^3}{3} \left(\ln x - \frac{1}{3} \right) + C.$$

35.3.4 Questão 3b — $y'' - 3y' + 2y = 4$

Enunciado. Resolva a EDO de 2ª ordem $y'' - 3y' + 2y = 4$, com $y(0) = 4$ e $y'(0) = 5$.

Equação característica:

$$r^2 - 3r + 2 = (r-1)(r-2) = 0 \quad \Rightarrow \quad r_1 = 1, \quad r_2 = 2 \quad (\Delta = 1 > 0).$$

Solução homogênea:

$$y_h(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x}.$$

Particular constante: $2A = 4 \Rightarrow A = 2$. Solução geral:

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + 2.$$

Condições iniciais. De $y(0) = 4$:

$$C_1 + C_2 + 2 = 4 \implies C_1 + C_2 = 2.$$

Como $y'(x) = C_1 e^x + 2C_2 e^{2x}$, de $y'(0) = 5$:

$$C_1 + 2C_2 = 5.$$

Subtraindo as duas, $C_2 = 3$ e $C_1 = -1$:

$$y(x) = -e^x + 3e^{2x} + 2.$$

Verificação: $y(0) = -1 + 3 + 2 = 4$ e $y'(0) = -1 + 6 = 5$.

35.3.5 Questão 4 — O consumidor por inteiro

Enunciado. Seja $U(x_1, x_2)$ a utilidade, preços p_i , renda R , com $U_i > 0$, $U_{ii} < 0$, $U_{ij} > 0$. (a) Escreva o problema de maximização de utilidade, com Lagrangeano, CPO e CSO; (b) represente graficamente; (c) ache o sinal de $\partial x_1 / \partial p_1$ e $\partial x_1 / \partial R$; (d) para $U = x_1^{1/2} x_2^{1/2}$, encontre x_1^* , x_2^* , λ^* ; (e) ache a utilidade indireta V , calcule $\partial V / \partial p_1$, $\partial V / \partial R$ e verifique a Identidade de Roy; (f) resolva o dual (minimização de despesa para \bar{U}): demandas hicksianas, função despesa E^* e sua homogeneidade.

a) Problema, Lagrangeano, CPO.

$$\max_{x_1, x_2} U(x_1, x_2) \quad \text{s.a.} \quad p_1 x_1 + p_2 x_2 = R; \quad \mathcal{L} = U(x_1, x_2) + \lambda (R - p_1 x_1 - p_2 x_2).$$

CPO:

$$U_1 - \lambda p_1 = 0, \quad U_2 - \lambda p_2 = 0, \quad R - p_1 x_1 - p_2 x_2 = 0,$$

donde a tangência

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{p_1}{p_2}.$$

CSO: Hessiano orlado $\bar{H} = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & -p_1 \\ U_{21} & U_{22} & -p_2 \\ -p_1 & -p_2 & 0 \end{pmatrix}$ com $|\bar{H}| > 0$ (máximo).

b) Gráfico. Curvas de indiferença convexas; reta orçamentária com inclinação $-p_1/p_2$. Ótimo na tangência da curva de indiferença mais alta com a restrição.

c) Estática comparativa. Diferenciando as CPO e resolvendo com $|\bar{H}| > 0$:

$$\frac{\partial x_1}{\partial p_1} < 0 \quad (\text{demanda decrescente no próprio preço}), \quad \frac{\partial x_1}{\partial R} > 0 \quad (\text{bem normal}).$$

d) **Cobb-Douglas** $U = x_1^{1/2}x_2^{1/2}$.

As derivadas são $U_1 = \frac{1}{2}x_1^{-1/2}x_2^{1/2}$ e $U_2 = \frac{1}{2}x_1^{1/2}x_2^{-1/2}$. A tangência dá

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{x_2}{x_1} = \frac{p_1}{p_2} \implies x_2 = \frac{p_1}{p_2}x_1.$$

Na restrição orçamentária:

$$p_1x_1 + p_2 \cdot \frac{p_1}{p_2}x_1 = R \implies 2p_1x_1 = R.$$

Logo

$$\boxed{x_1^* = \frac{R}{2p_1}, \quad x_2^* = \frac{R}{2p_2}, \quad \lambda^* = \frac{U_1(x^*)}{p_1}.$$

(Regra Cobb-Douglas: metade da renda em cada bem, pois os expoentes são $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$.)

e) **Utilidade indireta, Envelope e Roy.** Substituindo as demandas em U :

$$V(p_1, p_2, R) = \left(\frac{R}{2p_1}\right)^{1/2} \left(\frac{R}{2p_2}\right)^{1/2} = \frac{R}{2\sqrt{p_1p_2}}.$$

Pelo Envelope, a partir de \mathcal{L} ,

$$\frac{\partial V}{\partial p_1} = \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_1} \right|_* = -\lambda^*x_1^*, \quad \frac{\partial V}{\partial R} = \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial R} \right|_* = \lambda^*.$$

Derivando a forma fechada: $\frac{\partial V}{\partial p_1} = -\frac{R}{4p_1^{3/2}p_2^{1/2}} = -\frac{V}{2p_1}$ e $\frac{\partial V}{\partial R} = \frac{1}{2\sqrt{p_1p_2}} = \frac{V}{R}$. A **Identidade de Roy** confirma:

$$-\frac{\partial V/\partial p_1}{\partial V/\partial R} = -\frac{-V/(2p_1)}{V/R} = \frac{R}{2p_1} = x_1^*. \checkmark$$

f) **Dual — minimização de despesa.**

$$\min_{x_1, x_2} p_1x_1 + p_2x_2 \quad \text{s.a.} \quad x_1^{1/2}x_2^{1/2} = \bar{U}; \quad \mathcal{L} = p_1x_1 + p_2x_2 + \mu(\bar{U} - x_1^{1/2}x_2^{1/2}).$$

A mesma condição de tangência $\frac{x_2}{x_1} = \frac{p_1}{p_2}$ vale, mas agora a substituímos na **restrição de utilidade** $x_1^{1/2}x_2^{1/2} = \bar{U}$. Com $x_2 = \frac{p_1}{p_2}x_1$,

$$x_1^{1/2} \left(\frac{p_1}{p_2}x_1\right)^{1/2} = \bar{U} \implies x_1\sqrt{\frac{p_1}{p_2}} = \bar{U}.$$

Obtemos as **demandas hicksianas**:

$$h_1 = \bar{U} \sqrt{\frac{p_2}{p_1}}, \quad h_2 = \bar{U} \sqrt{\frac{p_1}{p_2}}.$$

A função despesa é

$$E^*(p_1, p_2, \bar{U}) = p_1 h_1 + p_2 h_2 = \bar{U} \sqrt{p_1 p_2} + \bar{U} \sqrt{p_1 p_2} = 2\bar{U} \sqrt{p_1 p_2},$$

homogênea de grau 1 nos preços. (Lema de Shephard: $\partial E^* / \partial p_1 = \bar{U} \sqrt{p_2 / p_1} = h_1$.)

35.4 Gabarito — Bateria

35.4.1 Tópico A — Derivação

Aplicam-se as **regras de derivação e a estratégia** da referência no início desta Parte IV: identificar a estrutura, quebrar em blocos menores, derivar cada um e recombinar.

A1. *Enunciado:* calcule a derivada de $f(x) = x^{x+1} + \frac{2+3x}{\ln(1-2x+x^{32})}$.

Para $x^{x+1} = e^{(x+1)\ln x}$,

$$\frac{d}{dx}x^{x+1} = x^{x+1}\left(\ln x + \frac{x+1}{x}\right).$$

Para o quociente, $N = 2 + 3x$ ($N' = 3$) e $D = \ln(1 - 2x + x^{32})$ com $D' = \frac{-2 + 32x^{31}}{1 - 2x + x^{32}}$. Assim,

$$f'(x) = x^{x+1}\left(\ln x + \frac{x+1}{x}\right) + \frac{3 \ln(1 - 2x + x^{32}) - (2 + 3x)\frac{-2 + 32x^{31}}{1 - 2x + x^{32}}}{[\ln(1 - 2x + x^{32})]^2}.$$

A2. *Enunciado:* calcule a derivada de $f(x) = (5x - 2)^x + e^{\sqrt{x}} - \ln(x^3 + 1)$.

Para $(5x - 2)^x = e^{x \ln(5x-2)}$,

$$\frac{d}{dx}(5x - 2)^x = (5x - 2)^x \left(\ln(5x - 2) + \frac{5x}{5x - 2} \right).$$

Os outros termos: $\frac{d}{dx}e^{\sqrt{x}} = \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$ e $\frac{d}{dx}\ln(x^3 + 1) = \frac{3x^2}{x^3 + 1}$. Portanto,

$$f'(x) = (5x - 2)^x \left(\ln(5x - 2) + \frac{5x}{5x - 2} \right) + \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} - \frac{3x^2}{x^3 + 1}.$$

A3. *Enunciado:* para $f(x, y) = xy + e^{x^2+y^2}$, calcule as parciais de 1ª e 2ª ordem e mostre que $f_{xy} = f_{yx}$.

As parciais de 1ª ordem são

$$f_x = y + 2x e^{x^2+y^2}, \quad f_y = x + 2y e^{x^2+y^2}.$$

As de 2ª ordem:

$$f_{xx} = (2 + 4x^2)e^{x^2+y^2}, \quad f_{yy} = (2 + 4y^2)e^{x^2+y^2},$$

$$f_{xy} = 1 + 4xy e^{x^2+y^2} = f_{yx}. \quad \checkmark$$

A4. Enunciado: para $f(x, y) = x^a y^b$ (Cobb-Douglas), calcule as parciais de 1ª e 2ª ordem e verifique $f_{xy} = f_{yx}$.

Parciais:

$$f_x = a x^{a-1} y^b, \quad f_y = b x^a y^{b-1},$$

$$f_{xx} = a(a-1)x^{a-2}y^b, \quad f_{yy} = b(b-1)x^a y^{b-2},$$

$$f_{xy} = ab x^{a-1} y^{b-1} = f_{yx}. \quad \checkmark$$

35.4.2 Tópico B — Integração por partes

B1. Enunciado: calcule $\int (\ln x)^2 dx$.

Por partes, $u = (\ln x)^2$, $dv = dx$, $du = \frac{2 \ln x}{x} dx$, $v = x$. Então

$$\int (\ln x)^2 dx = x(\ln x)^2 - 2 \int \ln x dx = x(\ln x)^2 - 2(x \ln x - x) + C.$$

$$\boxed{\int (\ln x)^2 dx = x[(\ln x)^2 - 2 \ln x + 2] + C.}$$

B2. Enunciado: calcule $\int (2 + 5x)e^{x/3} dx$.

Por partes, $u = 2 + 5x$, $dv = e^{x/3} dx$, $du = 5 dx$, $v = 3e^{x/3}$. Então

$$\int (2 + 5x)e^{x/3} dx = 3(2 + 5x)e^{x/3} - 15 \int e^{x/3} dx = 3(2 + 5x)e^{x/3} - 45e^{x/3} + C.$$

$$\boxed{\int (2 + 5x)e^{x/3} dx = (15x - 39)e^{x/3} + C.}$$

B3. Enunciado: calcule $\int x^2 e^{-x} dx$.

Por partes, $u = x^2$, $dv = e^{-x} dx$, $v = -e^{-x}$. Primeira passagem:

$$\int x^2 e^{-x} dx = -x^2 e^{-x} + 2 \int x e^{-x} dx.$$

A integral $\int x e^{-x} dx = -x e^{-x} - e^{-x}$ (nova integração por partes). Logo

$$\int x^2 e^{-x} dx = -e^{-x}(x^2 + 2x + 2) + C.$$

B4. Enunciado: calcule $\int (2 + 3x)e^{2x} dx$.

Por partes, $u = 2 + 3x$, $dv = e^{2x} dx$, $v = \frac{1}{2}e^{2x}$. Então

$$\int (2 + 3x)e^{2x} dx = \frac{2 + 3x}{2}e^{2x} - \frac{3}{2} \int e^{2x} dx = \frac{2 + 3x}{2}e^{2x} - \frac{3}{4}e^{2x} + C.$$

$$\int (2 + 3x)e^{2x} dx = \frac{1}{4}(6x + 1)e^{2x} + C.$$

B5. Enunciado: calcule $\int x \ln(x + 1) dx$.

Por partes, $u = \ln(x + 1)$, $dv = x dx$, $du = \frac{1}{x+1} dx$, $v = \frac{x^2}{2}$. Então

$$\int x \ln(x + 1) dx = \frac{x^2}{2} \ln(x + 1) - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{x + 1} dx.$$

Como $\frac{x^2}{x + 1} = x - 1 + \frac{1}{x + 1}$, temos $\int \frac{x^2}{x+1} dx = \frac{x^2}{2} - x + \ln(x + 1)$. Portanto,

$$\int x \ln(x + 1) dx = \frac{x^2}{2} \ln(x + 1) - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \ln(x + 1) + C.$$

B6. Enunciado: calcule $\int x^3 \ln(x^2 + 2) dx$. (idêntico à Questão 3a do Simulado 1)

$$\int x^3 \ln(x^2 + 2) dx = \frac{x^4}{4} \ln(x^2 + 2) - \frac{x^4}{8} + \frac{x^2}{2} - \ln(x^2 + 2) + C.$$

B7. Enunciado: calcule $\int x e^{x^2} dx$.

Substituímos $u = x^2$, de modo que $du = 2x dx$, ou seja $x dx = \frac{1}{2} du$. A integral vira

$$\int x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int e^u du = \frac{1}{2} e^u + C.$$

Voltando a x ,

$$\int x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} e^{x^2} + C.$$

B8. Enunciado: calcule $\int \frac{3x^2 + 6x}{x^3 + 3x^2 - 2} dx$.

Repare que o numerador é exatamente a derivada do denominador. Substituindo $u = x^3 + 3x^2 - 2$, temos $du = (3x^2 + 6x) dx$, e a integral assume a forma $\int \frac{f'}{f}$:

$$\int \frac{3x^2 + 6x}{x^3 + 3x^2 - 2} dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C.$$

$$\boxed{\int \frac{3x^2 + 6x}{x^3 + 3x^2 - 2} dx = \ln|x^3 + 3x^2 - 2| + C.}$$

B9. Enunciado: calcule $\int x^2 \sqrt{x^3 + 1} dx$.

Substituimos $u = x^3 + 1$, com $du = 3x^2 dx$, isto é $x^2 dx = \frac{1}{3} du$. Então

$$\int x^2 \sqrt{x^3 + 1} dx = \frac{1}{3} \int u^{1/2} du = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} u^{3/2} + C.$$

$$\boxed{\int x^2 \sqrt{x^3 + 1} dx = \frac{2}{9} (x^3 + 1)^{3/2} + C.}$$

B10. Enunciado: calcule $\int \frac{\ln x}{x} dx$.

Substituimos $u = \ln x$, com $du = \frac{1}{x} dx$. A integral fica imediata:

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \int u du = \frac{u^2}{2} + C.$$

$$\boxed{\int \frac{\ln x}{x} dx = \frac{(\ln x)^2}{2} + C.}$$

B11. Enunciado: calcule $\int x^3 e^{x^2} dx$ (substituição + partes).

Aqui combinamos as duas técnicas. Primeiro a substituição $u = x^2$ ($du = 2x dx$); como $x^3 dx = x^2 \cdot x dx = u \cdot \frac{1}{2} du$,

$$\int x^3 e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int u e^u du.$$

A integral em u resolve-se **por partes** ($\int u e^u du = u e^u - e^u$):

$$\frac{1}{2} \int u e^u du = \frac{1}{2} (u e^u - e^u) + C.$$

Voltando a x ,

$$\int x^3 e^{x^2} dx = \frac{1}{2} e^{x^2} (x^2 - 1) + C.$$

35.4.3 Tópico C — EDO de 2ª ordem

C1. Enunciado: resolva $y'' - 5y' + 6y = 5$, $y(0) = \frac{5}{6}$, $y'(0) = 1$ ($\Delta > 0$).

$r^2 - 5r + 6 = (r - 2)(r - 3) = 0 \Rightarrow r = 2, 3$. Particular: $6A = 5 \Rightarrow A = \frac{5}{6}$.

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + \frac{5}{6}.$$

$y(0) = C_1 + C_2 + \frac{5}{6} = \frac{5}{6} \Rightarrow C_1 + C_2 = 0$; $y'(0) = 2C_1 + 3C_2 = 1 \Rightarrow C_2 = 1$, $C_1 = -1$.

$$y = -e^{2x} + e^{3x} + \frac{5}{6}.$$

C2. Enunciado: resolva $y'' - 4y' + 4y = 5$, $y(0) = \frac{3}{2}$, $y'(0) = -1$ ($\Delta = 0$).

$r^2 - 4r + 4 = (r - 2)^2 \Rightarrow r = 2$ (dupla). Particular: $4A = 5 \Rightarrow A = \frac{5}{4}$.

$$y = (C_1 + C_2 x) e^{2x} + \frac{5}{4}.$$

$y(0) = C_1 + \frac{5}{4} = \frac{3}{2} \Rightarrow C_1 = \frac{1}{4}$; $y' = e^{2x}(C_2 + 2C_1 + 2C_2 x)$, $y'(0) = C_2 + 2C_1 = -1 \Rightarrow C_2 = -\frac{3}{2}$.

$$y = \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{2}x \right) e^{2x} + \frac{5}{4}.$$

C3. Enunciado: resolva $y'' + 2y' + 5y = 10$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 0$ ($\Delta < 0$).

$r^2 + 2r + 5 = 0 \Rightarrow r = -1 \pm 2i$ ($\alpha = -1, \beta = 2$). Particular: $5A = 10 \Rightarrow A = 2$.

$$y = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + 2.$$

$y(0) = C_1 + 2 = 3 \Rightarrow C_1 = 1$; $y'(0) = -C_1 + 2C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = \frac{1}{2}$.

$$y = e^{-x} \left(\cos 2x + \frac{1}{2} \sin 2x \right) + 2.$$

C4. Enunciado: resolva $y'' + 4y = 8$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 2$ ($\Delta < 0$, $\alpha = 0$).

$r^2 + 4 = 0 \Rightarrow r = \pm 2i$ ($\alpha = 0, \beta = 2$). Particular: $4A = 8 \Rightarrow A = 2$.

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + 2.$$

$y(0) = C_1 + 2 = 3 \Rightarrow C_1 = 1$; $y' = -2C_1 \sin 2x + 2C_2 \cos 2x$, $y'(0) = 2C_2 = 2 \Rightarrow C_2 = 1$.

$$y = \cos 2x + \sin 2x + 2.$$

C5. Enunciado: resolva $2y'' - 8y' + 8y = 16$, $y(0) = 3$, $y'(0) = -1$ ($\Delta = 0$).

Dividindo por 2: $y'' - 4y' + 4y = 8$, $(r - 2)^2 = 0$, $r = 2$ (dupla). Particular: $4A = 8 \Rightarrow A = 2$.

$$y = (C_1 + C_2x)e^{2x} + 2.$$

$y(0) = C_1 + 2 = 3 \Rightarrow C_1 = 1$; $y' = e^{2x}(C_2 + 2C_1 + 2C_2x)$, $y'(0) = C_2 + 2C_1 = -1 \Rightarrow C_2 = -3$.

$$y = (1 - 3x)e^{2x} + 2.$$

C6. Enunciado: resolva (solução geral) $y'' + 5y' + 4y = 1$.

$r^2 + 5r + 4 = (r + 1)(r + 4) = 0 \Rightarrow r = -1, -4$. Particular: $4A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{4}$.

$$y = C_1e^{-x} + C_2e^{-4x} + \frac{1}{4}.$$

35.4.4 Tópico D — Análise de função

D1. Enunciado: analise $f(x) = x^3 + 3x^2 + 2x$ (crescimento, concavidade, extremos, inflexão). $f'(x) = 3x^2 + 6x + 2 = 0 \Rightarrow x = -1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \approx -0,42; -1,58$. $f''(x) = 6x + 6$: máximo local em $x \approx -1,58$ ($f'' < 0$), mínimo local em $x \approx -0,42$ ($f'' > 0$). Côncava em $x < -1$, convexa em $x > -1$, inflexão em $x = -1$ ($f(-1) = 0$).

D2. Enunciado: analise $f(x) = x^4 - 2x^2$. $f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x = -1, 0, 1$. $f''(x) = 12x^2 - 4$: mínimos em $x = \pm 1$ ($f = -1$), máximo local em $x = 0$ ($f = 0$). Inflexões em $x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$. Função par, em “W”.

D3. Enunciado: analise $f(x) = 3x^4 - 4x^3$. $f'(x) = 12x^3 - 12x^2 = 12x^2(x - 1) = 0 \Rightarrow x = 0, 1$. $f''(x) = 36x^2 - 24x = 12x(3x - 2)$. Em $x = 1$, $f'' = 12 > 0$: mínimo ($f(1) = -1$). Em $x = 0$, $f'' = 0$ e não há troca de sinal de f' (ambos os lados $f' \leq 0$): é **inflexão horizontal**, não extremo. Inflexões em $x = 0$ e $x = \frac{2}{3}$.

35.4.5 Tópico E — Máx. lucro

E1. Enunciado: firma em concorrência perfeita com 2 insumos; escreva $\max_{K,L} \pi = pf(K, L) - wL - rK$, ache CPO e CSO e interprete $f_K/f_L = r/w$.

$\max_{K,L} \pi = pf(K, L) - wL - rK$. CPO:

$$\pi_K = pf_K - r = 0, \quad \pi_L = pf_L - w = 0 \quad \Rightarrow \quad pf_K = r, \quad pf_L = w,$$

donde $\frac{f_K}{f_L} = \frac{r}{w}$: o valor do produto marginal de cada fator iguala seu preço, e a TMST iguala a razão de preços. CSO: $H_\pi = p \begin{pmatrix} f_{KKK} & f_{KLL} \\ f_{KLL} & f_{LLL} \end{pmatrix}$, com $\pi_{KK} = pf_{KK} < 0$ e $|H_\pi| = p^2(f_{KK}f_{LL} - f_{KL}^2) > 0$ — máximo.

E2. Enunciado: monopolista com 2 mercados, $P_1 = 50 - 5Q_1$, $P_2 = 100 - 10Q_2$, custo $C = 90 + 20(Q_1 + Q_2)$; ache (Q_1^*, Q_2^*) , preços, lucro e CSO; em qual mercado o preço é maior?

Substituindo as demandas inversas,

$$\pi = (50 - 5Q_1)Q_1 + (100 - 10Q_2)Q_2 - 90 - 20(Q_1 + Q_2).$$

CPO:

$$\frac{\partial \pi}{\partial Q_1} = 50 - 10Q_1 - 20 = 0 \Rightarrow Q_1^* = 3, \quad \frac{\partial \pi}{\partial Q_2} = 100 - 20Q_2 - 20 = 0 \Rightarrow Q_2^* = 4.$$

Preços e lucro: $P_1^* = 35$, $P_2^* = 60$, $\pi^* = 35 \cdot 3 + 60 \cdot 4 - [90 + 20 \cdot 7] = 115$. CSO: $H = \begin{pmatrix} -10 & 0 \\ 0 & -20 \end{pmatrix}$, $|H| = 200 > 0$, $\pi_{Q_1 Q_1} = -10 < 0$ — máximo. O preço é maior no mercado **2** (mais inelástico): regra $RMg_1 = RMg_2 = CMg$ cobra-se mais de quem reage menos (discriminação de 3º grau).

E3. Enunciado: monopolista (1 mercado) com demanda inversa $P = 100 - 2Q$ e custo $C = Q^2 + 10Q + 50$; ache Q^* , P^* , lucro e verifique a CSO.

$\pi = (100 - 2Q)Q - (Q^2 + 10Q + 50) = 90Q - 3Q^2 - 50$. CPO: $\pi' = 90 - 6Q = 0 \Rightarrow Q^* = 15$. Então $P^* = 100 - 30 = 70$, $\pi^* = 90 \cdot 15 - 3 \cdot 225 - 50 = 625$. CSO: $\pi'' = -6 < 0$ — máximo.

E4. Enunciado: firma em concorrência perfeita, $\pi(q) = pq - (c_0 + c_1q + \frac{1}{2}c_2q^2)$; encontre q^* e interprete.

$\pi(q) = pq - (c_0 + c_1q + \frac{1}{2}c_2q^2)$. CPO: $p - c_1 - c_2q = 0 \Rightarrow q^* = \frac{p - c_1}{c_2}$. CSO: $\pi'' = -c_2 < 0$. Interpretação: produz-se até **preço = custo marginal** ($p = c_1 + c_2q^*$).

35.4.6 Tópico F — Min. custo / Min. despesa

F1. Enunciado: min custo $rK + wL$ s.a. $K^{1/2}L^{1/2} = q$; ache K^* , L^* , λ^* , C^* , homogeneidade e $\partial C^* / \partial q$.

(ver Simulado 1, Q5d-e) Com $f = K^{1/2}L^{1/2}$:

$$K^* = q\sqrt{\frac{w}{r}}, \quad L^* = q\sqrt{\frac{r}{w}}, \quad \lambda^* = 2\sqrt{rw}, \quad C^* = 2q\sqrt{rw},$$

homogênea de grau 1 em (r, w) , com $\partial C^* / \partial q = 2\sqrt{rw} = \lambda^*$.

F2. Enunciado: min custo $rK + wL$ s.a. $(K^\rho + L^\rho)^{\beta/\rho} = q$ (CES); ache K^* , L^* , a função custo e a homogeneidade.

Para $f = (K^\rho + L^\rho)^{\beta/\rho}$, as derivadas são $f_K = \beta(K^\rho + L^\rho)^{\beta/\rho-1} K^{\rho-1}$ (idem f_L). A tangência $f_K/f_L = r/w$ dá

$$\left(\frac{K}{L}\right)^{\rho-1} = \frac{r}{w} \implies \frac{K}{L} = \left(\frac{r}{w}\right)^{\frac{1}{\rho-1}}.$$

Substituindo na restrição $K^\rho + L^\rho = q^{\rho/\beta}$ e isolando,

$$K^* = q^{1/\beta} \frac{r^{\frac{1}{\rho-1}}}{(r^{\frac{\rho}{\rho-1}} + w^{\frac{\rho}{\rho-1}})^{1/\rho}}, \quad L^* = q^{1/\beta} \frac{w^{\frac{1}{\rho-1}}}{(r^{\frac{\rho}{\rho-1}} + w^{\frac{\rho}{\rho-1}})^{1/\rho}}.$$

A função custo simplifica para

$$C^* = q^{1/\beta} (r^{\frac{\rho}{\rho-1}} + w^{\frac{\rho}{\rho-1}})^{\frac{\rho-1}{\rho}},$$

homogênea de grau 1 em (r, w) (e grau $1/\beta$ em q).

F3. Enunciado: *min custo com 3 insumos, $f = K^{1/4}L^{1/4}X^{1/2}$, preços r, w, p_X ; ache K^*, L^*, X^*, λ^* , a função custo e a homogeneidade.*

Para Cobb-Douglas com expoentes que somam 1, as participações de cada insumo no custo total igualam os expoentes. Com $a_K = a_L = \frac{1}{4}$, $a_X = \frac{1}{2}$, a fórmula geral $C^* = q \prod_i (p_i/a_i)^{a_i}$ dá

$$C^*(r, w, p_X, q) = q (4r)^{1/4} (4w)^{1/4} (2p_X)^{1/2} = 2\sqrt{2} q r^{1/4} w^{1/4} p_X^{1/2},$$

homogênea de grau 1 nos preços. As demandas saem das participações ($p_i X_i^* = a_i C^*$):

$$K^* = \frac{C^*}{4r}, \quad L^* = \frac{C^*}{4w}, \quad X^* = \frac{C^*}{2p_X}, \quad \lambda^* = \frac{\partial C^*}{\partial q} = \frac{C^*}{q}.$$

F4. Enunciado: *min despesa $p_1 x_1 + p_2 x_2$ s.a. $U(x_1, x_2) = \bar{U}$ (genérico); ache CPO, CSO e os sinais de $\partial x_1 / \partial \bar{U}$ e $\partial x_1 / \partial p_1$.*

min $p_1 x_1 + p_2 x_2$ s.a. $U = \bar{U}$, com $\mathcal{L} = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \mu(\bar{U} - U)$. CPO: $p_1 = \mu U_1$, $p_2 = \mu U_2$, $U = \bar{U}$, donde $\frac{U_1}{U_2} = \frac{p_1}{p_2}$. CSO (orlado): $|\bar{H}| < 0$. Diferenciando as CPO (TFI) e resolvendo por Cramer:

$$\frac{\partial x_1}{\partial \bar{U}} > 0 \quad (\text{mais utilidade-alvo exige mais consumo}), \quad \frac{\partial x_1}{\partial p_1} < 0 \quad (\text{efeito substituição puro}).$$

F5. Enunciado: *min despesa para $U = x_1^{1/4} x_2^{1/4} x_3^{1/2}$ (3 bens); ache x_i^*, λ^* , a função despesa e a homogeneidade.*

Por dualidade com a Cobb-Douglas (expoentes $a_1 = a_2 = \frac{1}{4}$, $a_3 = \frac{1}{2}$, soma 1), a função despesa é

$$E^* = \bar{U} \prod_i \left(\frac{p_i}{a_i} \right)^{a_i} = \bar{U} (4p_1)^{1/4} (4p_2)^{1/4} (2p_3)^{1/2} = 2\sqrt{2} \bar{U} p_1^{1/4} p_2^{1/4} p_3^{1/2},$$

homogênea de grau 1 nos preços. As demandas hicksianas e o multiplicador são

$$\boxed{x_i^* = \frac{a_i E^*}{p_i}, \quad \lambda^* = \mu^* = \frac{\partial E^*}{\partial \bar{U}} = \frac{E^*}{\bar{U}}.}$$

Explicitamente, $x_1^* = \frac{1}{4} E^* / p_1$, $x_2^* = \frac{1}{4} E^* / p_2$, $x_3^* = \frac{1}{2} E^* / p_3$.

F6. Enunciado: maximização de utilidade CES $U = (x_1^\rho + x_2^\rho)^{1/\rho}$; ache as demandas marshallianas x_1^* , x_2^* .

Como $U_1/U_2 = (x_1/x_2)^{\rho-1}$, a tangência dá

$$\left(\frac{x_1}{x_2} \right)^{\rho-1} = \frac{p_1}{p_2} \implies \frac{x_1}{x_2} = \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{1}{\rho-1}} = \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{-\sigma}, \quad \sigma = \frac{1}{1-\rho}.$$

Substituindo na restrição orçamentária $p_1 x_1 + p_2 x_2 = R$ e isolando, obtemos as **demandas marshallianas CES**:

$$\boxed{x_1^* = \frac{R p_1^{-\sigma}}{p_1^{1-\sigma} + p_2^{1-\sigma}}, \quad x_2^* = \frac{R p_2^{-\sigma}}{p_1^{1-\sigma} + p_2^{1-\sigma}}, \quad \sigma = \frac{1}{1-\rho}.}$$

O parâmetro σ é a **elasticidade de substituição** entre os bens.

36 Parte V — Checklist de Véspera

- **Q1 (a demonstração):** CPO/CSO via Taylor (necessárias: termo linear $f' = 0$; quadrático $f'' \geq 0$; suficientes: $f'' > 0 / < 0$). Multivariado: Hessiana e sinais dos menores ($D_1 > 0, \dots$ p/ mín; alternando p/ máx).
- **Derivadas:** $a^{g(x)} = e^{g(x)\ln a}$ e $x^x = e^{x\ln x}$; produto, quociente e cadeia (saber **aplicar**); parciais e $f_{xy} = f_{yx}$.
- **Integração — por partes:** LIATE; $\int (\ln x)^2$, $\int x^n \ln x$, $\int x^k e^{ax}$ (repetida), $\int x^3 \ln(x^2 + 2)$ (divisão polinomial), $\int x \ln(x + 1)$.
- **Integração — substituição:** achar u cuja derivada aparece no integrando; casos $\int x e^{x^2}$, $\int \frac{f'}{f} = \ln |f|$, $\int x^2 \sqrt{x^3 + 1}$, $\int \frac{\ln x}{x}$; e combinar substituição + partes ($\int x^3 e^{x^2}$).
- **EDO 2ª ordem:** característica $r^2 + ar + b = 0$; $\Delta > 0$ (reais), $\Delta = 0$ (dupla, fator x), $\Delta < 0$ (Euler: $e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$); particular constante $bA = c$; aplicar $y(0), y'(0)$.
- **Gráfico:** sinal de f' (cresc./decr.), sinal de f'' (concavidade), extremos e inflexão (cuidado com inflexão horizontal).
- **Otimização:** Lagrangeano, CPO (tangência), CSO (Hessiano orlado: máx $|\bar{H}| > 0$, mín $|\bar{H}| < 0$).
- **Estática comparativa:** diferenciar CPO (TFI) + Cramer; sinais de $\partial x_1 / \partial p_1 < 0$, $\partial x_1 / \partial R > 0$, $\partial K / \partial r < 0$, $\partial K / \partial q > 0$.
- **Envelope:** consumidor $\partial V / \partial p_i = -\lambda^* x_i^*$, $\partial V / \partial R = \lambda^*$ (Roy: $x_i^* = -\frac{\partial V / \partial p_i}{\partial V / \partial R}$); firma/despesa $\partial C^* / \partial r = K^*$, $\partial C^* / \partial q = \lambda^*$ (Shephard); custo/despesa homogêneos de grau 1 nos preços.

37 Parte VI — Gabaritos de Provas Anteriores

Resoluções completas, linha a linha, das provas e avaliações substitutivas de 2022, 2024 e 2025 (arquivos na pasta `prova/`). Em ordem cronológica.

37.1 Prova 2 — 5 de novembro de 2022

37.1.1 Questão 1 — Condições de otimalidade na minimização

Enunciado. Seja x^* um ponto do domínio de $f(x)$, função diferenciável, tal que $f(x^*) \leq f(x)$ numa vizinhança de x^* (mínimo relativo). Quais são as condições necessárias de 1ª e 2ª ordem? Quais as suficientes do problema de minimização? Prove.

Suponha f duas vezes continuamente diferenciável e x^* interior. A ferramenta é a expansão de Taylor de 2ª ordem com resto de Lagrange: para Δx pequeno, existe $\theta \in (0, 1)$ tal que

$$f(x^* + \Delta x) = f(x^*) + f'(x^*) \Delta x + \frac{1}{2} f''(x^* + \theta \Delta x) (\Delta x)^2.$$

Necessária de 1ª ordem. Como x^* é mínimo, $f(x^* + \Delta x) - f(x^*) \geq 0$. Para Δx pequeno o termo dominante é o linear, e $f(x^* + \Delta x) - f(x^*) = f'(x^*) \Delta x + o(|\Delta x|) \geq 0$. Dividindo por $\Delta x > 0$ ($\Delta x \rightarrow 0^+$) dá $f'(x^*) \geq 0$; por $\Delta x < 0$ ($\Delta x \rightarrow 0^-$) dá $f'(x^*) \leq 0$. Logo

$$\boxed{f'(x^*) = 0.}$$

Necessária de 2ª ordem. Com $f'(x^*) = 0$, $f(x^* + \Delta x) - f(x^*) = \frac{1}{2} f''(x^* + \theta \Delta x) (\Delta x)^2 \geq 0$. Como $(\Delta x)^2 > 0$, segue $f''(x^* + \theta \Delta x) \geq 0$; fazendo $\Delta x \rightarrow 0$ e usando a continuidade de f'' ,

$$\boxed{f''(x^*) \geq 0.}$$

Suficientes. Se $f'(x^*) = 0$ e $f''(x^*) > 0$, então por continuidade $f'' > 0$ numa vizinhança de x^* ; para $0 < |\Delta x| < \delta$, o ponto $x^* + \theta \Delta x$ está nela e

$$f(x^* + \Delta x) - f(x^*) = \frac{1}{2} \underbrace{f''(x^* + \theta \Delta x)}_{>0} \underbrace{(\Delta x)^2}_{>0} > 0,$$

ou seja, x^* é **mínimo local estrito**. ■

37.1.2 Questão 2 — Maximização de utilidade

37.1.2.1 (a) $n = 2$ — CPO e CSO

Enunciado. Escreva o problema para $n = 2$, as CPO e a CSO.

$$\max_{x_1, x_2} U(x_1, x_2) \quad \text{s.a.} \quad p_1 x_1 + p_2 x_2 = R, \quad \mathcal{L} = U + \lambda(R - p_1 x_1 - p_2 x_2).$$

As CPO são

$$U_1 = \lambda p_1, \quad U_2 = \lambda p_2, \quad p_1 x_1 + p_2 x_2 = R \quad \implies \quad \frac{U_1}{U_2} = \frac{p_1}{p_2}.$$

A CSO de máximo exige Hessiano orlado com determinante positivo:

$$\bar{H} = \begin{pmatrix} 0 & -p_1 & -p_2 \\ -p_1 & U_{11} & U_{12} \\ -p_2 & U_{12} & U_{22} \end{pmatrix}, \quad |\bar{H}| = -U_{11}p_2^2 + 2U_{12}p_1p_2 - U_{22}p_1^2 > 0.$$

37.1.2.2 (b) $n = 3$ — CPO e CSO

Enunciado. Idem para $n = 3$.

$$\max_{x_1, x_2, x_3} U \quad \text{s.a.} \quad \sum_i p_i x_i = R, \quad U_i = \lambda p_i \quad (i = 1, 2, 3), \quad \frac{U_i}{U_j} = \frac{p_i}{p_j}.$$

O Hessiano orlado é 4×4 :

$$\bar{H} = \begin{pmatrix} 0 & -p_1 & -p_2 & -p_3 \\ -p_1 & U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ -p_2 & U_{12} & U_{22} & U_{23} \\ -p_3 & U_{13} & U_{23} & U_{33} \end{pmatrix},$$

e para máximo os menores principais orlados líderes alternam de sinal a partir do de ordem 3: $|\bar{H}_3| > 0$ e $|\bar{H}_4| = |\bar{H}| < 0$.

37.1.2.3 (c) Estática comparativa: sinal de $\partial x_1 / \partial R$

Enunciado. Diferencie as CPO e ache o sinal de $\partial x_1 / \partial R$.

Diferenciando o sistema das CPO ($n = 2$) em relação a R :

$$\begin{aligned} U_{11}dx_1 + U_{12}dx_2 - p_1d\lambda &= 0, \\ U_{12}dx_1 + U_{22}dx_2 - p_2d\lambda &= 0, \\ -p_1dx_1 - p_2dx_2 &= -dR. \end{aligned}$$

Em forma matricial, $\bar{H} (dx_1, dx_2, d\lambda)^\top = (0, 0, -1)^\top dR$. Por Cramer,

$$\frac{\partial x_1}{\partial R} = \frac{p_1U_{22} - p_2U_{12}}{|\bar{H}|}.$$

Com $p_i = U_i/\lambda$, o numerador vale $\frac{1}{\lambda}(U_1U_{22} - U_2U_{12})$; supondo bem normal e $|\bar{H}| > 0$,

$$\boxed{\frac{\partial x_1}{\partial R} > 0 \quad (\text{bem normal}).}$$

37.1.2.4 (d) Demanda CES, $n = 3$

Enunciado. Para $U = [\alpha_1^{1/\sigma} x_1^{(\sigma-1)/\sigma} + \alpha_2^{1/\sigma} x_2^{(\sigma-1)/\sigma} + \alpha_3^{1/\sigma} x_3^{(\sigma-1)/\sigma}]^{\sigma/(\sigma-1)}$, $\sigma > 1$, encontre x_i^* e λ^* .

Escreva $A = \sum_j \alpha_j^{1/\sigma} x_j^{(\sigma-1)/\sigma}$, de modo que $U = A^{\sigma/(\sigma-1)}$. A utilidade marginal é

$$U_i = A^{1/(\sigma-1)} \alpha_i^{1/\sigma} x_i^{-1/\sigma}.$$

A tangência $U_i/U_j = p_i/p_j$ elimina o fator comum:

$$\left(\frac{\alpha_i}{\alpha_j}\right)^{1/\sigma} \left(\frac{x_i}{x_j}\right)^{-1/\sigma} = \frac{p_i}{p_j} \implies \frac{x_i}{x_j} = \frac{\alpha_i}{\alpha_j} \left(\frac{p_i}{p_j}\right)^{-\sigma}.$$

Logo $p_i x_i = \alpha_i p_i^{1-\sigma} (x_j p_j^\sigma / \alpha_j)$; somando em i e usando $\sum_i p_i x_i = R$:

$$R = \frac{x_j p_j^\sigma}{\alpha_j} \sum_i \alpha_i p_i^{1-\sigma} \implies \boxed{x_k^* = \frac{\alpha_k p_k^{-\sigma}}{\sum_j \alpha_j p_j^{1-\sigma}} R, \quad k = 1, 2, 3.}$$

O multiplicador é a utilidade marginal da renda. Com o índice de preços CES $P = (\sum_j \alpha_j p_j^{1-\sigma})^{1/(1-\sigma)}$,

$$\boxed{\lambda^* = \frac{U_1(x^*)}{p_1} = \left(\sum_j \alpha_j p_j^{1-\sigma}\right)^{1/(\sigma-1)} = P^{-1}.}$$

Para $\sigma > 1$ a CES é estritamente quase-côncava, garantindo a CSO de máximo.

37.1.2.5 (e) Utilidade indireta e Envelope

Enunciado. Seja $V(\cdot)$ a utilidade indireta. Pelo Envelope, ache $\partial V / \partial p_1$ e $\partial V / \partial R$.

Pelo Teorema do Envelope, derivam-se apenas os parâmetros em $\mathcal{L} = U + \lambda(R - \sum p_i x_i)$:

$$\frac{\partial V}{\partial p_1} = -\lambda^* x_1^*, \quad \frac{\partial V}{\partial R} = \lambda^*,$$

e combinando obtém-se a **Identidade de Roy**:

$$\boxed{x_1^* = -\frac{\partial V / \partial p_1}{\partial V / \partial R}.$$

37.1.2.6 (f) Minimização de despesa, 3 bens (genérico)

Enunciado. Escreva o problema de minimização de despesa com 3 bens; CPO e CSO.

$$\min_{x_1, x_2, x_3} \sum_i p_i x_i \quad \text{s.a.} \quad U = \bar{U}, \quad \mathcal{L} = \sum_i p_i x_i + \mu(\bar{U} - U).$$

CPO: $p_i = \mu U_i$ ($i = 1, 2, 3$) e $U = \bar{U}$, donde $\frac{p_i}{p_j} = \frac{U_i}{U_j}$ (mesma tangência — dualidade). A CSO de mínimo exige Hessiano orlado com $|\bar{H}| < 0$.

37.1.3 Questão 3 — Minimização de custo da firma

37.1.3.1 (a) Problema, CPO e CSO

$$\min_{K, L} rK + wL \quad \text{s.a.} \quad f(K, L) = q, \quad \mathcal{L} = rK + wL + \lambda(q - f).$$

CPO: $r = \lambda f_K$, $w = \lambda f_L$, $f = q$, donde $\frac{f_K}{f_L} = \frac{r}{w}$. CSO de mínimo: Hessiano orlado com $|\bar{H}| < 0$.

37.1.3.2 (b) Estática comparativa

Enunciado. Sinais de $\partial K/\partial q$ e $\partial K/\partial r$.

Diferenciando as CPO e resolvendo por Cramer, com $|\bar{H}| < 0$:

$$\frac{\partial K}{\partial r} = \frac{f_L^2}{|\bar{H}|} < 0, \quad \frac{\partial K}{\partial q} = \frac{\lambda(f_K f_{LL} - f_{KL} f_L)}{|\bar{H}|} > 0.$$

37.1.3.3 (c) Função custo CES

Enunciado. Para $f = (K^\rho + L^\rho)^{\beta/\rho}$, encontre K^* , L^* , a função custo e $\partial C/\partial q$.

Com $f_K = \beta(K^\rho + L^\rho)^{\beta/\rho-1} K^{\rho-1}$ (idem f_L), a tangência dá

$$\left(\frac{K}{L}\right)^{\rho-1} = \frac{r}{w} \implies \frac{K}{L} = \left(\frac{r}{w}\right)^{1/(\rho-1)}.$$

Impondo $K^\rho + L^\rho = q^{\rho/\beta}$,

$$\boxed{K^* = q^{1/\beta} \frac{r^{1/(\rho-1)}}{(r^{\rho/(\rho-1)} + w^{\rho/(\rho-1)})^{1/\rho}}, \quad L^* = q^{1/\beta} \frac{w^{1/(\rho-1)}}{(r^{\rho/(\rho-1)} + w^{\rho/(\rho-1)})^{1/\rho}}.}$$

A função custo simplifica para

$$C^* = q^{1/\beta} (r^{\rho/(\rho-1)} + w^{\rho/(\rho-1)})^{(\rho-1)/\rho},$$

e o custo marginal ($= \lambda^*$, pelo Envelope) é

$$\frac{\partial C^*}{\partial q} = \frac{1}{\beta} q^{1/\beta-1} (r^{\rho/(\rho-1)} + w^{\rho/(\rho-1)})^{(\rho-1)/\rho} = \lambda^*.$$

37.2 Avaliação Substitutiva — 18 de novembro de 2022

37.2.1 Questão 1 — Regra da cadeia

Enunciado. Demonstre a regra da cadeia: se g é diferenciável em x e f em $u = g(x)$, então $h(x) = f(g(x))$ satisfaz $h'(x) = f'(g(x))g'(x)$.

Pela diferenciabilidade de f em u , definimos a função-erro

$$\varepsilon(\Delta u) = \begin{cases} \frac{f(u + \Delta u) - f(u)}{\Delta u} - f'(u), & \Delta u \neq 0, \\ 0, & \Delta u = 0, \end{cases}$$

de modo que, para todo Δu (inclusive 0),

$$f(u + \Delta u) - f(u) = [f'(u) + \varepsilon(\Delta u)]\Delta u, \quad \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \varepsilon(\Delta u) = 0.$$

Tomamos $\Delta u = g(x + \Delta x) - g(x)$, de modo que $u + \Delta u = g(x + \Delta x)$, e dividimos o incremento da composta por $\Delta x \neq 0$:

$$\frac{h(x + \Delta x) - h(x)}{\Delta x} = [f'(u) + \varepsilon(\Delta u)] \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}.$$

Quando $\Delta x \rightarrow 0$: como g é contínua, $\Delta u \rightarrow 0$, logo $\varepsilon(\Delta u) \rightarrow 0$; e $\frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \rightarrow g'(x)$. Portanto

$$\boxed{h'(x) = f'(g(x))g'(x)}.$$

A função-erro ε evita a divisão direta por Δu (que poderia se anular). ■

37.2.2 Questão 2 — Integral definida $\int_0^6 (2 + 5x)e^{x/3} dx$

Enunciado. Calcule $\int_0^6 (2 + 5x)e^{x/3} dx$.

Por partes, com $u = 2 + 5x$ e $dv = e^{x/3} dx$, de modo que $du = 5 dx$ e $v = 3e^{x/3}$, a antiderivada é

$$F(x) = 3(2 + 5x)e^{x/3} - 15 \int e^{x/3} dx = 3(2 + 5x)e^{x/3} - 45e^{x/3} = (15x - 39)e^{x/3}.$$

Avaliamos nos extremos ($x/3 = 2$ em $x = 6$):

$$F(6) = (90 - 39)e^2 = 51e^2, \quad F(0) = (0 - 39)e^0 = -39.$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$\int_0^6 (2 + 5x)e^{x/3} dx = 51e^2 - (-39) = 51e^2 + 39.$$

Verificação: $\frac{d}{dx}[(15x - 39)e^{x/3}] = 15e^{x/3} + (15x - 39)\frac{1}{3}e^{x/3} = (5x + 2)e^{x/3}$.

37.2.3 Questão 3 — EDO $y'' + 5y' + 4y = 1$

Enunciado. Resolva $y'' + 5y' + 4y = 1$.

A característica é $r^2 + 5r + 4 = (r + 1)(r + 4) = 0$, com raízes reais distintas $r = -1, -4$:

$$y_h = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-4x}.$$

A particular constante satisfaz $4A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{4}$. Logo

$$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-4x} + \frac{1}{4}.$$

37.2.4 Questão 4 — Análise de $f(x) = x^3 + 3x^2 + 2x$

Enunciado. Determine crescimento/decrescimento, concavidade, máximo, mínimo e inflexão; esboce.

A 1ª derivada governa a monotonia:

$$f'(x) = 3x^2 + 6x + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \approx -1,58; -0,42.$$

Como f' é parábola de boca para cima, $f' > 0$ fora das raízes e $f' < 0$ entre elas:

- **crecente** em $(-\infty, -1 - \frac{1}{\sqrt{3}})$ e $(-1 + \frac{1}{\sqrt{3}}, \infty)$; **decrescente** entre as raízes.

A 2ª derivada governa a concavidade:

$$f''(x) = 6x + 6 = 6(x + 1).$$

Assim $f'' < 0$ em $(-\infty, -1)$ (**côncava**) e $f'' > 0$ em $(-1, \infty)$ (**convexa**), com **inflexão** em $x = -1$, $f(-1) = 0$. Classificando os críticos: em $x \approx -1,58$ ($f'' < 0$) há **máximo local**; em $x \approx -0,42$ ($f'' > 0$) há **mínimo local**. As raízes de f são $x = 0, -1, -2$.

Esboço: cúbica crescente nas pontas; sobe até o máximo em $\approx -1,58$, desce passando pela inflexão $(-1, 0)$, atinge o mínimo em $\approx -0,42$ e volta a subir; corta o eixo em $-2, -1, 0$, com $(-1, 0)$ como centro de simetria.

37.2.5 Questão 5 — Minimização de despesa

37.2.5.1 (a) $n = 2$ — CPO e CSO

$$\min_{x_1, x_2} p_1 x_1 + p_2 x_2 \quad \text{s.a.} \quad U(x_1, x_2) = \bar{U}, \quad \mathcal{L} = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \mu(\bar{U} - U).$$

CPO: $p_1 = \mu U_1$, $p_2 = \mu U_2$, $U = \bar{U}$, donde $\frac{U_1}{U_2} = \frac{p_1}{p_2}$. CSO de mínimo: Hessiano orlado com $|\bar{H}| < 0$.

37.2.5.2 (b) Gráfico

No plano (x_1, x_2) , a curva de indiferença $U = \bar{U}$ é convexa à origem; as retas de isodespesa $p_1 x_1 + p_2 x_2 = c$ têm inclinação $-p_1/p_2$. O ótimo é a **tangência** da curva de indiferença com a reta de isodespesa de menor valor, onde $-U_1/U_2 = -p_1/p_2$.

37.2.5.3 (c) Estática comparativa

$$\frac{\partial x_1}{\partial \bar{U}} > 0 \quad (\text{mais utilidade-alvo exige mais consumo}), \quad \frac{\partial x_1}{\partial p_1} < 0 \quad (\text{hicksiana decrescente, efeito substituição pu})$$

37.2.5.4 (d) CES, $n = 2$: $U = [x_1^a + x_2^a]^{1/a}$, $a > 0$

Enunciado. Encontre x_1^* , x_2^* , λ^* .

Com $U_i = [x_1^a + x_2^a]^{1/a-1} x_i^{a-1}$, a tangência dá

$$\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{a-1} = \frac{p_1}{p_2} \implies \frac{x_1}{x_2} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{1/(a-1)}.$$

Substituindo em $x_1^a + x_2^a = \bar{U}^a$ e isolando,

$$\boxed{x_1^* = \bar{U} \frac{p_1^{1/(a-1)}}{(p_1^{a/(a-1)} + p_2^{a/(a-1)})^{1/a}}, \quad x_2^* = \bar{U} \frac{p_2^{1/(a-1)}}{(p_1^{a/(a-1)} + p_2^{a/(a-1)})^{1/a}}.}$$

A função despesa é

$$E^* = p_1 x_1^* + p_2 x_2^* = \bar{U} (p_1^{a/(a-1)} + p_2^{a/(a-1)})^{(a-1)/a},$$

e o multiplicador (custo marginal de utilidade)

$$\boxed{\lambda^* = \mu^* = \frac{\partial E^*}{\partial \bar{U}} = (p_1^{a/(a-1)} + p_2^{a/(a-1)})^{(a-1)/a}}.$$

Verificação ($p_1 = p_2 = p$): $x_1^* = x_2^* = \bar{U} 2^{-1/a}$, e $U(x^*) = [2(\bar{U} 2^{-1/a})^a]^{1/a} = \bar{U}$.

37.2.5.5 (e) Minimização de despesa, 3 bens (genérico)

$$\min \sum_i p_i x_i \quad \text{s.a.} \quad U(x_1, x_2, x_3) = \bar{U}, \quad p_i = \mu U_i, \quad U = \bar{U}, \quad \frac{U_i}{U_j} = \frac{p_i}{p_j}.$$

CSO de mínimo: Hessiano orlado 4×4 com $|\bar{H}_3| < 0$ e $|\bar{H}_4| > 0$.

37.2.5.6 (f) CES, $n = 3$, parâmetro $\sigma > 1$

Enunciado. Para $U = [\sum_i \alpha_i^{1/\sigma} x_i^{(\sigma-1)/\sigma}]^{\sigma/(\sigma-1)}$, encontre as demandas hicksianas x_i^* e λ^* .

Seja $\rho = \frac{\sigma-1}{\sigma}$ e $S = \sum_j \alpha_j^{1/\sigma} x_j^\rho$, de modo que $U = S^{1/\rho}$. Então $U_i = S^{1/\rho-1} \alpha_i^{1/\sigma} x_i^{\rho-1}$, e como $\rho-1 = -1/\sigma$, a tangência $U_i/U_j = p_i/p_j$ dá

$$\frac{x_i}{x_j} = \frac{\alpha_i}{\alpha_j} \left(\frac{p_i}{p_j} \right)^{-\sigma} \implies x_i^* = k \alpha_i p_i^{-\sigma},$$

com escala k a fixar por $U(x^*) = \bar{U}$. Calculando S no ótimo (usando $p_i^{-\sigma\rho} = p_i^{1-\sigma}$ e $\alpha_i^{1/\sigma} \alpha_i^\rho = \alpha_i$):

$$S = k^\rho \sum_j \alpha_j p_j^{1-\sigma} = k^\rho P^{1-\sigma}, \quad P = \left[\sum_j \alpha_j p_j^{1-\sigma} \right]^{1/(1-\sigma)}.$$

Impondo $U = S^{1/\rho} = \bar{U}$, isto é $S = \bar{U}^\rho$, e como $1 - \sigma = -\sigma\rho$, vem $k = \bar{U} P^\sigma$. Logo as **demandas hicksianas**:

$$x_i^* = \bar{U} \alpha_i \left(\frac{p_i}{P} \right)^{-\sigma} = \bar{U} \frac{\alpha_i p_i^{-\sigma}}{(\sum_j \alpha_j p_j^{1-\sigma})^{\sigma/(\sigma-1)}}, \quad i = 1, 2, 3.$$

A função despesa é $E^* = \sum_i p_i x_i^* = \bar{U} P^\sigma \sum_i \alpha_i p_i^{1-\sigma} = \bar{U} P^\sigma P^{1-\sigma} = \bar{U} P$, e o multiplicador

$$\lambda^* = \mu^* = \frac{\partial E^*}{\partial \bar{U}} = P = \left[\sum_j \alpha_j p_j^{1-\sigma} \right]^{1/(1-\sigma)}.$$

$E^* = \bar{U} P$ é homogênea de grau 1 nos preços; cada x_i^* , de grau 0.

37.3 Prova — 4 de maio de 2024

37.3.1 Questão 1 — Regra do produto

Enunciado. Demonstre a regra do produto: $(fg)' = f'g + fg'$.

Pela definição,

$$(fg)'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}.$$

Somamos e subtraímos $f(x)g(x+h)$ no numerador, criando a ponte entre os produtos:

$$f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x) = [f(x+h) - f(x)]g(x+h) + f(x)[g(x+h) - g(x)].$$

Dividindo por h e separando os limites:

$$(fg)'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x+h) + f(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}.$$

Como g é diferenciável (logo contínua), $g(x+h) \rightarrow g(x)$, e portanto

$$\boxed{(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)}.$$

37.3.2 Questão 2 — Derivada

Enunciado. Calcule a derivada de $f(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^{x+1} + \frac{e^{x^2+2x+1}}{\sqrt{5x-2}} - 3^{x^3}$.

Termo 1. Como $\left(\frac{1}{x}\right)^{x+1} = e^{-(x+1)\ln x}$, a derivada do expoente é $-\ln x - \frac{x+1}{x}$, logo

$$T'_1 = \left(\frac{1}{x}\right)^{x+1} \left(-\ln x - \frac{x+1}{x}\right).$$

Termo 2. Note $x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$. Com $u = e^{(x+1)^2}$ ($u' = 2(x+1)e^{(x+1)^2}$) e $v = (5x-2)^{1/2}$ ($v' = \frac{5}{2\sqrt{5x-2}}$), a regra do quociente dá

$$T'_2 = e^{(x+1)^2} \left[\frac{2(x+1)}{\sqrt{5x-2}} - \frac{5}{2(5x-2)^{3/2}} \right].$$

Termo 3. Como $3^{x^3} = e^{x^3 \ln 3}$, $T'_3 = 3^{x^3} \ln 3 \cdot 3x^2$.

Somando $f' = T'_1 + T'_2 - T'_3$:

$$\boxed{f'(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^{x+1} \left(-\ln x - \frac{x+1}{x}\right) + e^{(x+1)^2} \left[\frac{2(x+1)}{\sqrt{5x-2}} - \frac{5}{2(5x-2)^{3/2}} \right] - 3^{x^3} \ln 3 \cdot 3x^2}.$$

37.3.3 Questão 3 — Integral e EDO

(a) *Enunciado.* Calcule $\int (\ln x)^2 dx$.

Por partes, $u = (\ln x)^2$, $dv = dx$, $v = x$:

$$\int (\ln x)^2 dx = x(\ln x)^2 - 2 \int \ln x dx.$$

Como $\int \ln x dx = x \ln x - x$,

$$\int (\ln x)^2 dx = x[(\ln x)^2 - 2 \ln x + 2] + C.$$

Verificação: derivando, sobra $(\ln x)^2$.

(b) *Enunciado.* Resolva $2y'' - 8y' + 8y = 16$, $y(0) = 3$, $y'(0) = -1$.

Dividindo por 2: $y'' - 4y' + 4y = 8$. A característica é $(r - 2)^2 = 0$, $r = 2$ dupla, logo $y_h = (C_1 + C_2x)e^{2x}$. Particular: $4A = 8 \Rightarrow A = 2$. Geral:

$$y(x) = (C_1 + C_2x)e^{2x} + 2.$$

De $y(0) = C_1 + 2 = 3 \Rightarrow C_1 = 1$. Como $y'(x) = (2C_1 + C_2 + 2C_2x)e^{2x}$, $y'(0) = 2C_1 + C_2 = -1 \Rightarrow C_2 = -3$:

$$y(x) = (1 - 3x)e^{2x} + 2.$$

Verificação: $y(0) = 3$, $y'(0) = 2 - 3 = -1$.

37.3.4 Questão 4 — Maximização de utilidade

(a) $\max U(x_1, x_2)$ s.a. $p_1x_1 + p_2x_2 = R$, $\mathcal{L} = U + \lambda(R - p_1x_1 - p_2x_2)$. CPO: $U_1 = \lambda p_1$, $U_2 = \lambda p_2$, restrição, donde $\frac{U_1}{U_2} = \frac{p_1}{p_2}$. CSO de máximo: $|\bar{H}| > 0$.

(b) No plano (x_1, x_2) , a reta orçamentária tem inclinação $-p_1/p_2$ e interceptos R/p_1 , R/p_2 ; as curvas de indiferença são convexas. O ótimo é a tangência da curva de indiferença mais alta com a reta orçamentária.

(c) Diferenciando as CPO e resolvendo por Cramer com $|\bar{H}| > 0$: $\frac{\partial x_1}{\partial p_1} < 0$ (demanda própria decrescente) e $\frac{\partial x_2}{\partial R} > 0$ (bem normal).

(d) Para $U = x_1^{1/3} x_2^{2/3}$ ($\alpha = \frac{1}{3}$): tangência $\frac{U_1}{U_2} = \frac{x_2}{2x_1} = \frac{p_1}{p_2} \Rightarrow p_2x_2 = 2p_1x_1$. Na restrição, $3p_1x_1 = R$:

$$\boxed{x_1^* = \frac{R}{3p_1}, \quad x_2^* = \frac{2R}{3p_2}, \quad \lambda^* = \frac{U_1(x^*)}{p_1}.}$$

Das demandas, $\frac{\partial x_1^*}{\partial p_1} = -\frac{R}{3p_1^2} < 0$ e $\frac{\partial x_2^*}{\partial R} = \frac{2}{3p_2} > 0$ (confirmam o item c).

(e) Utilidade indireta:

$$V = \left(\frac{1}{3}\right)^{1/3} \left(\frac{2}{3}\right)^{2/3} \frac{R}{p_1^{1/3} p_2^{2/3}}.$$

Pelo Envelope, $\frac{\partial V}{\partial p_2} = -\lambda^* x_2^* = -\frac{2}{3p_2} V$ e $\frac{\partial V}{\partial R} = \lambda^* = \frac{V}{R}$. A relação entre eles é a **Identidade de Roy**:

$$\boxed{-\frac{\partial V / \partial p_2}{\partial V / \partial R} = \frac{2R}{3p_2} = x_2^*.$$

37.4 Prova Substitutiva — 25 de maio de 2024

37.4.1 Questão 1 — Regra do quociente

Enunciado. Demonstre a regra do quociente: $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$ (com $g \neq 0$).

Pela definição, sobre denominador comum,

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{g(x+h)g(x)}.$$

Somamos e subtraímos $f(x)g(x)$ no numerador para formar os quocientes de Newton:

$$f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h) = g(x)[f(x+h) - f(x)] - f(x)[g(x+h) - g(x)].$$

Substituindo e tomando o limite (com $g(x+h) \rightarrow g(x)$, pois g é contínua),

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}}.$$

37.4.2 Questão 2 — EDO e integral

(a) *Enunciado.* Resolva $y'' - 5y' + 6y = 5$, $y(0) = \frac{5}{6}$, $y'(0) = 1$.

Característica $r^2 - 5r + 6 = (r-2)(r-3) = 0$, $\Delta = 1 > 0$, $r = 2, 3$, logo $y_h = C_1e^{2x} + C_2e^{3x}$.
Particular: $6A = 5 \Rightarrow A = \frac{5}{6}$. Geral:

$$y = C_1e^{2x} + C_2e^{3x} + \frac{5}{6}.$$

De $y(0) = C_1 + C_2 + \frac{5}{6} = \frac{5}{6} \Rightarrow C_1 + C_2 = 0$; e $y'(0) = 2C_1 + 3C_2 = 1 \Rightarrow C_2 = 1$, $C_1 = -1$:

$$\boxed{y(x) = -e^{2x} + e^{3x} + \frac{5}{6}}.$$

Verificação: $y(0) = \frac{5}{6}$, $y'(0) = -2 + 3 = 1$.

(b) *Enunciado.* Calcule $\int (2 + 3x)e^{2x} dx$.

Por partes, $u = 2 + 3x$, $dv = e^{2x} dx$, $v = \frac{1}{2}e^{2x}$:

$$\int (2 + 3x)e^{2x} dx = \frac{2 + 3x}{2}e^{2x} - \frac{3}{2} \int e^{2x} dx = \frac{2 + 3x}{2}e^{2x} - \frac{3}{4}e^{2x} + C.$$

Reduzindo ao denominador comum,

$$\int (2 + 3x)e^{2x} dx = \frac{1}{4}(6x + 1)e^{2x} + C.$$

Verificação: $\frac{d}{dx}[\frac{1}{4}(6x + 1)e^{2x}] = (3x + 2)e^{2x}$.

37.4.3 Questão 3 — Derivadas parciais de $f(x, y) = x^y + e^{x^2+y^2}$

Enunciado. Calcule as parciais de 1ª e 2ª ordem e mostre $f_{xy} = f_{yx}$.

Lembrando $\frac{\partial}{\partial x}x^y = yx^{y-1}$ e $\frac{\partial}{\partial y}x^y = x^y \ln x$, as parciais de 1ª ordem são

$$f_x = yx^{y-1} + 2xe^{x^2+y^2}, \quad f_y = x^y \ln x + 2ye^{x^2+y^2}.$$

As de 2ª ordem puras:

$$f_{xx} = y(y-1)x^{y-2} + (2+4x^2)e^{x^2+y^2}, \quad f_{yy} = x^y(\ln x)^2 + (2+4y^2)e^{x^2+y^2}.$$

As cruzadas: derivando f_x em relação a y (produto em yx^{y-1}),

$$f_{xy} = x^{y-1}(1 + y \ln x) + 4xye^{x^2+y^2};$$

derivando f_y em relação a x (produto em $x^y \ln x$),

$$f_{yx} = yx^{y-1} \ln x + x^{y-1} + 4xye^{x^2+y^2} = x^{y-1}(1 + y \ln x) + 4xye^{x^2+y^2}.$$

Comparando, coincidem termo a termo:

$$f_{xy} = x^{y-1}(1 + y \ln x) + 4xye^{x^2+y^2} = f_{yx}. \quad \checkmark$$

37.4.4 Questão 4 — Minimização de custo

(a) $\min rK + wL$ s.a. $f(K, L) = q$, $\mathcal{L} = rK + wL + \lambda(q - f)$. CPO: $r = \lambda f_K$, $w = \lambda f_L$, $f = q$, donde $\frac{f_K}{f_L} = \frac{r}{w}$. CSO de mínimo: Hessiano orlado com $|\bar{H}| < 0$ (garantido por $\lambda > 0$, $f_{KK}, f_{LL} < 0$, $f_{KL} > 0$ e quase-convexidade da isoquanta).

(b) No plano (L, K) , a isoquanta $f = q$ é convexa à origem; as isocustos $rK + wL = \bar{C}$ têm inclinação $-w/r$. O ótimo é a tangência da isoquanta com a isocusto de menor valor.

(c) Diferenciando as CPO e usando Cramer com $|\bar{H}| < 0$:

$$\frac{\partial K}{\partial r} = \frac{f_L^2}{|\bar{H}|} < 0, \quad \frac{\partial K}{\partial q} = \frac{\lambda(f_K f_{LL} - f_{KL} f_L)}{|\bar{H}|} > 0.$$

(d) Para $f = (K^\rho + L^\rho)^{\beta/\rho}$, a tangência dá $(\frac{K}{L})^{\rho-1} = \frac{r}{w} \Rightarrow \frac{K}{L} = (r/w)^{1/(\rho-1)}$. Impondo $K^\rho + L^\rho = q^{\rho/\beta}$:

$$\boxed{K^* = q^{1/\beta} \frac{r^{1/(\rho-1)}}{(r^{\rho/(\rho-1)} + w^{\rho/(\rho-1)})^{1/\rho}}, \quad L^* = q^{1/\beta} \frac{w^{1/(\rho-1)}}{(r^{\rho/(\rho-1)} + w^{\rho/(\rho-1)})^{1/\rho}},}$$

e $\lambda^* = \partial C^*/\partial q$ (item e).

(e) A função custo é $C^* = rK^* + wL^*$; como $r \cdot r^{1/(\rho-1)} = r^{\rho/(\rho-1)}$,

$$\boxed{C^* = q^{1/\beta} (r^{\rho/(\rho-1)} + w^{\rho/(\rho-1)})^{(\rho-1)/\rho},}$$

homogênea de grau 1 em (r, w) . Pelo Lema de Shephard,

$$\boxed{\frac{\partial C^*}{\partial r} = K^*, \quad \frac{\partial C^*}{\partial w} = L^*. \quad \checkmark}$$

37.5 Prova — 10 de maio de 2025

37.5.1 Questão 1 — Condições necessárias de mínimo

Enunciado. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável. Quais as condições necessárias para x^* ser mínimo relativo?

Pela expansão de Taylor de 2ª ordem, $f(x^* + h) - f(x^*) = f'(x^*)h + \frac{1}{2}f''(x^*)h^2 + o(h^2) \geq 0$. Para h pequeno o termo linear domina; como h tem qualquer sinal, é necessário

$$\boxed{f'(x^*) = 0.}$$

Anulado o linear, $\frac{1}{2}f''(x^*)h^2 + o(h^2) \geq 0$; dividindo por $h^2 > 0$ e fazendo $h \rightarrow 0$,

$$\boxed{f''(x^*) \geq 0.}$$

(A suficiente correspondente seria $f''(x^*) > 0$.)

37.5.2 Questão 2 — Derivada (diferenciação logarítmica)

Enunciado. Calcule a derivada de $f(x) = \sqrt{\left(x^x + \frac{\sqrt{2+3x}}{\ln(5+3^x+xe^x)}\right)^{e^x}}$.

Defina a expressão interna $G(x) = x^x + \frac{\sqrt{2+3x}}{\ln(5+3^x+xe^x)}$. Como a raiz é potência $\frac{1}{2}$,

$$f(x) = (G^{e^x})^{1/2} = G^{e^x/2}.$$

Base e expoente variam: usamos **diferenciação logarítmica**. De $\ln f = \frac{e^x}{2} \ln G$,

$$\frac{f'}{f} = \frac{e^x}{2} \left(\ln G + \frac{G'}{G} \right) \implies f' = G^{e^x/2} \cdot \frac{e^x}{2} \left(\ln G + \frac{G'}{G} \right).$$

Falta G' . O primeiro termo: $\frac{d}{dx}x^x = x^x(\ln x + 1)$. O segundo é quociente N/D com $N = \sqrt{2+3x}$, $D = \ln(5+3^x+xe^x)$:

$$N' = \frac{3}{2\sqrt{2+3x}}, \quad D' = \frac{3^x \ln 3 + e^x(1+x)}{5+3^x+xe^x},$$

de modo que

$$G' = x^x(\ln x + 1) + \frac{\frac{3}{2\sqrt{2+3x}} \ln(5+3^x+xe^x) - \sqrt{2+3x} \frac{3^x \ln 3 + e^x(1+x)}{5+3^x+xe^x}}{[\ln(5+3^x+xe^x)]^2}.$$

Portanto,

$$f'(x) = G e^{x/2} \cdot \frac{e^x}{2} \left(\ln G + \frac{G'}{G} \right),$$

com G e G' acima.

37.5.3 Questão 3 — Integral e EDO

(1) *Enunciado.* Calcule $\int x^3 \ln(x^2 + 2) dx$.

Por partes, $u = \ln(x^2 + 2)$, $dv = x^3 dx$, $v = \frac{x^4}{4}$, $du = \frac{2x}{x^2+2} dx$:

$$\int x^3 \ln(x^2 + 2) dx = \frac{x^4}{4} \ln(x^2 + 2) - \frac{1}{2} \int \frac{x^5}{x^2 + 2} dx.$$

Por divisão polinomial, $\frac{x^5}{x^2 + 2} = x^3 - 2x + \frac{4x}{x^2 + 2}$, logo $\int = \frac{x^4}{4} - x^2 + 2 \ln(x^2 + 2)$. Substituindo,

$$\int x^3 \ln(x^2 + 2) dx = \frac{x^4}{4} \ln(x^2 + 2) - \frac{x^4}{8} + \frac{x^2}{2} - \ln(x^2 + 2) + C.$$

(2) *Enunciado.* Resolva $y'' + 6y' + 9y = 5$, $y(0) = \frac{14}{9}$, $y'(0) = 0$.

Característica $(r + 3)^2 = 0$, $r = -3$ dupla, $y_h = (C_1 + C_2 x)e^{-3x}$. Particular: $9A = 5 \Rightarrow A = \frac{5}{9}$. Geral $y = (C_1 + C_2 x)e^{-3x} + \frac{5}{9}$. De $y(0) = C_1 + \frac{5}{9} = \frac{14}{9} \Rightarrow C_1 = 1$; $y'(0) = C_2 - 3C_1 = 0 \Rightarrow C_2 = 3$:

$$y(x) = (1 + 3x)e^{-3x} + \frac{5}{9}.$$

Verificação: $y(0) = \frac{14}{9}$, $y'(0) = 0$.

37.5.4 Questão 4 — Minimização de despesa

(a) $\min p_1 x_1 + p_2 x_2$ s.a. $U = \bar{U}$, $\mathcal{L} = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \mu(\bar{U} - U)$. CPO: $p_1 = \mu U_1$, $p_2 = \mu U_2$, $U = \bar{U}$, donde $\frac{U_1}{U_2} = \frac{p_1}{p_2}$. CSO de mínimo: $|\bar{H}| < 0$.

(b) Curva de indiferença $U = \bar{U}$ convexa à origem; isodespesas de inclinação $-p_1/p_2$. Ótimo na tangência com a isodespesa de menor valor.

(c) Diferenciando as CPO (Cramer, $|\bar{H}| < 0$): $\frac{\partial x_1}{\partial p_1} = \frac{-U_2^2}{|\bar{H}|} < 0$ — hicksiana decrescente no próprio preço (efeito substituição puro).

(d) Três bens: $\min \sum p_i x_i$ s.a. $U(x_1, x_2, x_3) = \bar{U}$; CPO $p_i = \mu U_i$, $U = \bar{U}$, tangências $\frac{U_i}{U_j} = \frac{p_i}{p_j}$; CSO orlado 4×4 ($|\bar{H}_3| < 0$, $|\bar{H}_4| > 0$).

(e) Para $U = x_1^{1/4} x_2^{1/4} x_3^{1/2}$ (expoentes $a_1 = a_2 = \frac{1}{4}$, $a_3 = \frac{1}{2}$, somam 1), $U_i = a_i U/x_i$ e a tangência dá $p_i x_i$ proporcional a a_i , isto é $x_i^* = \frac{a_i E^*}{p_i}$. Impondo $U(x^*) = \bar{U}$:

$$\bar{U} = \prod_i \left(\frac{a_i E^*}{p_i} \right)^{a_i} = E^* \prod_i \left(\frac{a_i}{p_i} \right)^{a_i} \implies E^* = \bar{U} \prod_i \left(\frac{p_i}{a_i} \right)^{a_i} = 2\sqrt{2} \bar{U} p_1^{1/4} p_2^{1/4} p_3^{1/2}.$$

Logo

$$\boxed{x_1^* = \frac{E^*}{4p_1}, \quad x_2^* = \frac{E^*}{4p_2}, \quad x_3^* = \frac{E^*}{2p_3}, \quad \lambda^* = \mu^* = \frac{E^*}{\bar{U}} = 2\sqrt{2} p_1^{1/4} p_2^{1/4} p_3^{1/2}.$$

(f) A função despesa $E^* = 2\sqrt{2} \bar{U} p_1^{1/4} p_2^{1/4} p_3^{1/2}$ é **homogênea de grau 1** nos preços ($\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 1$): dobrar todos os preços dobra a despesa mínima.

37.6 Prova — 11 de maio de 2025

37.6.1 Questão 1 — Condições necessárias e suficientes de máximo

Enunciado. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável. Quais as condições necessárias e suficientes para x^* ser máximo relativo?

Por Taylor, $f(x^* + h) - f(x^*) = f'(x^*)h + \frac{1}{2}f''(x^*)h^2 + o(h^2) \leq 0$. O termo linear domina para h pequeno; como h tem qualquer sinal,

$$\boxed{f'(x^*) = 0.}$$

Anulado o linear, $\frac{1}{2}f''(x^*)h^2 + o(h^2) \leq 0$; dividindo por $h^2 > 0$,

$$\boxed{f''(x^*) \leq 0 \quad (\text{necessária}).}$$

Suficiente: se $f'(x^*) = 0$ e $f''(x^*) < 0$, por continuidade $f'' < 0$ numa vizinhança, e pelo resto de Lagrange $f(x^* + h) - f(x^*) = \frac{1}{2}f''(\xi)h^2 < 0$ para $0 < |h| < \delta$: **máximo local estrito**. A diferença para a necessária é só a desigualdade estrita.

37.6.2 Questão 2 — Derivada

Enunciado. Calcule a derivada de $f(x) = x^{\frac{x}{x+1}} + \frac{2 + 3^x}{\ln\left(1 - 2x + \frac{3}{x^2}\right)}$.

Primeira parcela $A = x^{x/(x+1)} = e^{\frac{x}{x+1} \ln x}$. Como $\frac{d}{dx} \frac{x}{x+1} = \frac{1}{(x+1)^2}$, a derivada do expoente é $\frac{\ln x}{(x+1)^2} + \frac{1}{x+1}$, logo

$$A' = x^{\frac{x}{x+1}} \left[\frac{\ln x}{(x+1)^2} + \frac{1}{x+1} \right].$$

Segunda parcela $B = N/D$ com $N = 2 + 3^x$ ($N' = 3^x \ln 3$) e $D = \ln(1 - 2x + 3x^{-2})$ ($D' = \frac{-2 - 6/x^3}{1 - 2x + 3/x^2}$). Pela regra do quociente,

$$B' = \frac{3^x \ln 3 \ln(1 - 2x + \frac{3}{x^2}) + (2 + 3^x) \frac{2 + 6/x^3}{1 - 2x + 3/x^2}}{[\ln(1 - 2x + \frac{3}{x^2})]^2}$$

(o sinal vira positivo pois $-N \cdot D' = -(2 + 3^x) \frac{-2 - 6/x^3}{1 - 2x + 3/x^2}$). Somando,

$$\boxed{f'(x) = x^{\frac{x}{x+1}} \left[\frac{\ln x}{(x+1)^2} + \frac{1}{x+1} \right] + B'(x).}$$

37.6.3 Questão 3 — Integral e EDO

(a) *Enunciado.* Calcule $\int \frac{x^2}{e^x} dx$.

Reescrevendo $\frac{x^2}{e^x} = x^2 e^{-x}$ e integrando por partes ($u = x^2$, $dv = e^{-x} dx$):

$$\int x^2 e^{-x} dx = -x^2 e^{-x} + 2 \int x e^{-x} dx = -x^2 e^{-x} + 2(-x e^{-x} - e^{-x}) + C.$$

$$\int \frac{x^2}{e^x} dx = -e^{-x}(x^2 + 2x + 2) + C.$$

Verificação: derivando, retorna $x^2 e^{-x}$.

(b) *Enunciado.* Resolva $y'' - 4y' + 4y = 5$, $y(0) = \frac{3}{2}$, $y'(0) = -1$.

Característica $(r - 2)^2 = 0$, $r = 2$ dupla, $y_h = (C_1 + C_2 x)e^{2x}$. Particular: $4A = 5 \Rightarrow A = \frac{5}{4}$. Geral $y = (C_1 + C_2 x)e^{2x} + \frac{5}{4}$. De $y(0) = C_1 + \frac{5}{4} = \frac{3}{2} \Rightarrow C_1 = \frac{1}{4}$; $y'(0) = C_2 + 2C_1 = -1 \Rightarrow C_2 = -\frac{3}{2}$:

$$y(x) = \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{2}x\right)e^{2x} + \frac{5}{4}.$$

Verificação: $y(0) = \frac{3}{2}$, $y'(0) = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2} = -1$.

37.6.4 Questão 4 — Minimização de custo

(a) $\min rK + wL$ s.a. $f(K, L) = q$, $\mathcal{L} = rK + wL + \lambda(q - f)$. CPO: $r = \lambda f_K$, $w = \lambda f_L$, $f = q$, donde $\frac{f_K}{f_L} = \frac{r}{w}$. CSO de mínimo: Hessiano orlado com $|\bar{H}| < 0$.

(b) No plano (L, K) , a tangência entre a isoquanta $f = q$ (convexa à origem) e a isocusto $rK + wL = C$ (inclinação $-w/r$) de menor valor.

(c) Diferenciando as CPO em relação a q e resolvendo por Cramer:

$$\frac{\partial L}{\partial q} = \frac{\lambda(f_L f_{KK} - f_{KL} f_K)}{|\bar{H}|} > 0,$$

pois numerador < 0 ($f_{KK} < 0$) e $|\bar{H}| < 0$: produzir mais eleva o uso de trabalho.

(d) Para $f = K^{1/2} L^{1/2}$: tangência $\frac{f_K}{f_L} = \frac{L}{K} = \frac{r}{w} \Rightarrow L = \frac{r}{w} K$; na restrição $K \sqrt{r/w} = q$:

$$K^* = q \sqrt{\frac{w}{r}}, \quad L^* = q \sqrt{\frac{r}{w}}, \quad \lambda^* = 2\sqrt{rw}.$$

Custo: $C^* = 2q\sqrt{rw}$, e $\partial C^*/\partial q = 2\sqrt{rw} = \lambda^*$.

(e) Com terceiro insumo X de preço p_X : $\min rK + wL + p_X X$ s.a. $f(K, L, X) = q$, com CPO

$$\boxed{r = \lambda f_K, \quad w = \lambda f_L, \quad p_X = \lambda f_X, \quad f = q.}$$

(f) Para $f = K^{1/4}L^{1/4}X^{1/2}$ (expoentes $a_K = a_L = \frac{1}{4}$, $a_X = \frac{1}{2}$, somam 1), cada gasto é a fração do expoente no custo total: $rK^* = a_K C^*$ etc. Substituindo $K^* = \frac{C^*}{4r}$, $L^* = \frac{C^*}{4w}$, $X^* = \frac{C^*}{2p_X}$ em $f = q$ e isolando (C^* tem expoente total 1):

$$\boxed{C^* = q(4r)^{1/4}(4w)^{1/4}(2p_X)^{1/2} = 2\sqrt{2}qr^{1/4}w^{1/4}p_X^{1/2},}$$

homogênea de grau 1 nos preços. Daí $\lambda^* = \frac{\partial C^*}{\partial q} = \frac{C^*}{q} = 2\sqrt{2}r^{1/4}w^{1/4}p_X^{1/2}$, e

$$\boxed{K^* = \frac{q}{\sqrt{2}}r^{-3/4}w^{1/4}p_X^{1/2}, \quad L^* = \frac{q}{\sqrt{2}}r^{1/4}w^{-3/4}p_X^{1/2}, \quad X^* = \sqrt{2}qr^{1/4}w^{1/4}p_X^{-1/2}.}$$

(g) Pelo Lema de Shephard,

$$\boxed{\frac{\partial C^*}{\partial p_X} = X^* = \sqrt{2}qr^{1/4}w^{1/4}p_X^{-1/2}.}$$

38 Prova — Matemática (2026)

38.1 Prova (2026) — 30 de maio de 2026

Resolução completa da prova final. As questões varrem todo o curso: condições de otimalidade (Q1), derivação logarítmica (Q2), integração e EDOs (Q3) e teoria do consumidor com dualidade e Teorema do Envelope (Q4). Cada resultado abaixo é uma aplicação direta dos capítulos de derivadas, integral, EDO, otimização e aplicações econômicas.

38.1.1 Questão 1 (1,0 ponto) — Condições Necessárias para Máximo Relativo

Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável. Quais são as condições necessárias para x^* ser um ponto de máximo relativo?

Condição necessária de primeira ordem. Se x^* é máximo relativo interior e f é diferenciável em x^* , então x^* é ponto crítico:

$$f'(x^*) = 0.$$

Justificativa. Como x^* é máximo local, existe $\delta > 0$ tal que $f(x) \leq f(x^*)$ para $|x - x^*| < \delta$. Pela direita, $\frac{f(x) - f(x^*)}{x - x^*} \leq 0$; pela esquerda, ≥ 0 . Como f é diferenciável, os dois limites laterais coincidem com $f'(x^*)$, forçando $f'(x^*) = 0$.

Condição necessária de segunda ordem (caso f seja duas vezes diferenciável):

$$f''(x^*) \leq 0.$$

Justificativa. Pela expansão de Taylor, $f(x) = f(x^*) + \frac{1}{2}f''(x^*)(x - x^*)^2 + o((x - x^*)^2)$. Se fosse $f''(x^*) > 0$, f cresceria em torno de x^* , contradizendo o máximo.

Observação. As condições são apenas **necessárias**, não suficientes: $f(x) = x^3$ tem $f'(0) = 0$ e $f''(0) = 0$ sem que $x = 0$ seja máximo. A condição **suficiente** de segunda ordem é $f'(x^*) = 0$ e $f''(x^*) < 0$ (desigualdade estrita).

38.1.2 Questão 2 (1,25 ponto) — Derivada por Diferenciação Logarítmica

Calcule a derivada de

$$f(x) = \left(x^2 e^{-x} + \frac{\ln(x^4 + 4^x)}{\sqrt{x^3 - 3x}} \right)^x.$$

Estratégia. A função tem a forma $f(x) = g(x)^x$, com **base e expoente variáveis**. Isso exige **diferenciação logarítmica**. Seja

$$g(x) = \underbrace{x^2 e^{-x}}_{u(x)} + \frac{\ln(x^4 + 4^x)}{\underbrace{\sqrt{x^3 - 3x}}_{v(x)}}.$$

Passo 1 — logaritmo e derivação implícita. Tomando \ln de ambos os lados, $\ln f = x \ln g$. Derivando:

$$\frac{f'}{f} = \ln g + x \frac{g'}{g} \implies f'(x) = g(x)^x \left[\ln g(x) + \frac{x g'(x)}{g(x)} \right].$$

Passo 2 — derivada de $u(x) = x^2 e^{-x}$ (regra do produto):

$$u'(x) = 2x e^{-x} + x^2(-e^{-x}) = x e^{-x}(2 - x).$$

Passo 3 — derivada de $v(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$, com $N = \ln(x^4 + 4^x)$ e $D = (x^3 - 3x)^{1/2}$.

$$N'(x) = \frac{4x^3 + 4^x \ln 4}{x^4 + 4^x} \quad (\text{pois } \frac{d}{dx} 4^x = 4^x \ln 4),$$

$$D'(x) = \frac{1}{2}(x^3 - 3x)^{-1/2}(3x^2 - 3) = \frac{3(x^2 - 1)}{2\sqrt{x^3 - 3x}}.$$

Pela regra do quociente, $v' = \frac{N'D - ND'}{D^2}$ com $D^2 = x^3 - 3x$:

$$v'(x) = \frac{4x^3 + 4^x \ln 4}{(x^4 + 4^x)\sqrt{x^3 - 3x}} - \frac{3(x^2 - 1) \ln(x^4 + 4^x)}{2(x^3 - 3x)^{3/2}}.$$

Passo 4 — montagem. Como $g' = u' + v'$:

$$g'(x) = x e^{-x}(2 - x) + \frac{4x^3 + 4^x \ln 4}{(x^4 + 4^x)\sqrt{x^3 - 3x}} - \frac{3(x^2 - 1) \ln(x^4 + 4^x)}{2(x^3 - 3x)^{3/2}}.$$

Resultado final:

$$\boxed{f'(x) = \left(x^2 e^{-x} + \frac{\ln(x^4 + 4^x)}{\sqrt{x^3 - 3x}} \right)^x \left[\ln g(x) + \frac{x g'(x)}{g(x)} \right]},$$

com g e g' dados acima. O domínio exige $x^3 - 3x > 0$, isto é, $x \in (-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, \infty)$, e $g(x) > 0$ para que $g(x)^x$ esteja definida.

38.1.3 Questão 3

38.1.3.1 3.1 (1,0 ponto) — Integral $\int 2x^3 e^{x^2} dx$

Estratégia. Substituição seguida de integração por partes. Note que $2x^3 = x^2 \cdot 2x$ e que $2x dx$ é o diferencial de x^2 .

Substituição $u = x^2$, $du = 2x dx$. Como $x^2 = u$:

$$\int 2x^3 e^{x^2} dx = \int x^2 e^{x^2} (2x dx) = \int u e^u du.$$

Integração por partes com $s = u$, $dt = e^u du$ (logo $ds = du$, $t = e^u$):

$$\int u e^u du = u e^u - \int e^u du = (u - 1) e^u + C.$$

Voltando a x ($u = x^2$):

$$\boxed{\int 2x^3 e^{x^2} dx = (x^2 - 1) e^{x^2} + C.}$$

Verificação. $\frac{d}{dx}[(x^2 - 1)e^{x^2}] = 2x e^{x^2} + (x^2 - 1) e^{x^2} 2x = 2x e^{x^2} [1 + x^2 - 1] = 2x^3 e^{x^2}$. ✓

38.1.3.2 3.2 (1,0 ponto) — EDO $y'' - 8y' + 16y = -48$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 7$

Equação característica. $r^2 - 8r + 16 = (r - 4)^2 = 0 \Rightarrow r = 4$ (raiz dupla). Logo:

$$y_h(x) = (C_1 + C_2 x) e^{4x}.$$

Solução particular. Termo não-homogêneo constante e $r = 0$ não é raiz, então tentamos $y_p = A$: $16A = -48 \Rightarrow A = -3$.

Solução geral. $y(x) = (C_1 + C_2 x) e^{4x} - 3$.

Condições iniciais.

$$y(0) = C_1 - 3 = -1 \Rightarrow C_1 = 2.$$

$$y'(x) = (C_2 + 4C_1 + 4C_2 x) e^{4x}, \quad y'(0) = C_2 + 4C_1 = C_2 + 8 = 7 \Rightarrow C_2 = -1.$$

$$\boxed{y(x) = (2 - x) e^{4x} - 3.}$$

Verificação. $y(0) = 2 - 3 = -1$ ✓. $y'(x) = -e^{4x} + 4(2 - x)e^{4x} = (7 - 4x)e^{4x}$, $y'(0) = 7$ ✓.

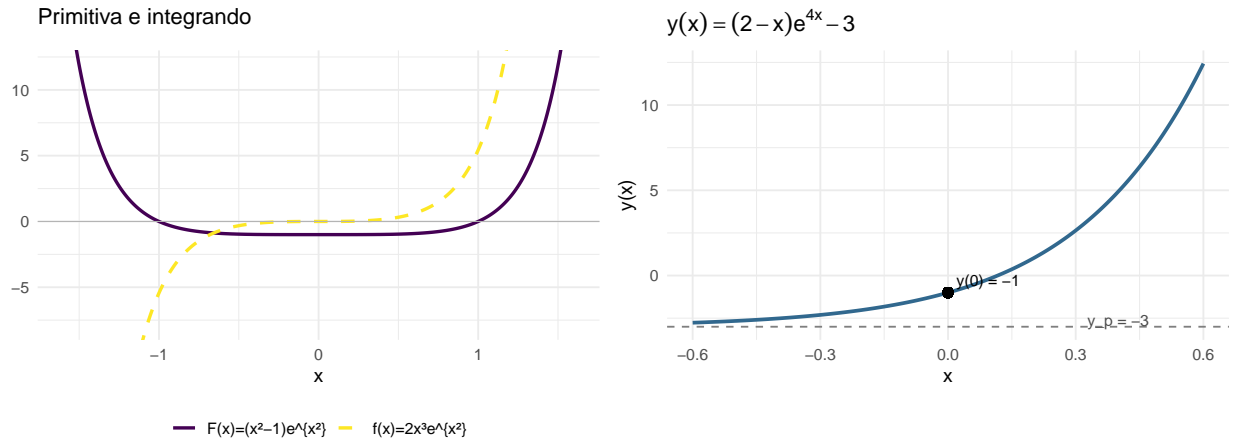


Figura 81: Esquerda: a primitiva $(x^2 - 1)e^{x^2}$ (linha) e seu integrando $2x^3e^{x^2}$ (tracejado). Direita: solução da EDO $y(x) = (2 - x)e^{4x} - 3$, com $y(0) = -1$ marcado; o fator $(2 - x)e^{4x}$ domina o crescimento.

38.1.4 Questão 4 — Teoria do Consumidor

Seja $U(x_1, x_2)$ a utilidade do indivíduo, x_i a quantidade do bem i e p_i o preço do bem i . Suponha $U_i > 0$, $U_{ii} < 0$ e $U_{ij} > 0$ para todo i e $j \neq i$.

38.1.4.1 (a) (0,75) — Maximização de utilidade: problema, CPOs e CSO

Problema. Com renda R :

$$\max_{x_1, x_2} U(x_1, x_2) \quad \text{s.a.} \quad p_1x_1 + p_2x_2 = R.$$

Lagrangeana. $\mathcal{L} = U(x_1, x_2) + \lambda(R - p_1x_1 - p_2x_2)$.

CPOs:

$$\boxed{U_1 = \lambda p_1, \quad U_2 = \lambda p_2, \quad p_1x_1 + p_2x_2 = R.}$$

Dividindo as duas primeiras, obtém-se a **condição de tangência** (TMS igual à razão de preços):

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{p_1}{p_2}.$$

CSO. Pela natureza restrita, usa-se o **Hessiano orlado**:

$$\bar{H} = \begin{pmatrix} 0 & -p_1 & -p_2 \\ -p_1 & U_{11} & U_{12} \\ -p_2 & U_{21} & U_{22} \end{pmatrix}.$$

Para **máximo** (com $n = 2$ variáveis e $m = 1$ restrição), exige-se $|\bar{H}| > 0$. Calculando:

$$|\bar{H}| = -p_1^2 U_{22} - p_2^2 U_{11} + 2p_1 p_2 U_{12}.$$

Sob as hipóteses $U_{ii} < 0$ e $U_{12} > 0$, os três termos são positivos, de modo que $|\bar{H}| > 0$ **automaticamente** — a solução interior é máximo.

38.1.4.2 (b) (0,5) — Representação gráfica

No plano (x_1, x_2) : as **curvas de indiferença** ($U = \text{const.}$) são convexas em direção à origem (decréscenas pela monotonicidade $U_i > 0$, convexas pela quase-concavidade implicada por $U_{ii} < 0$, $U_{ij} > 0$); a **reta orçamentária** $p_1 x_1 + p_2 x_2 = R$ tem inclinação $-p_1/p_2$. O ótimo (x_1^*, x_2^*) é o **ponto de tangência** entre a curva de indiferença mais alta atingível e a reta orçamentária.

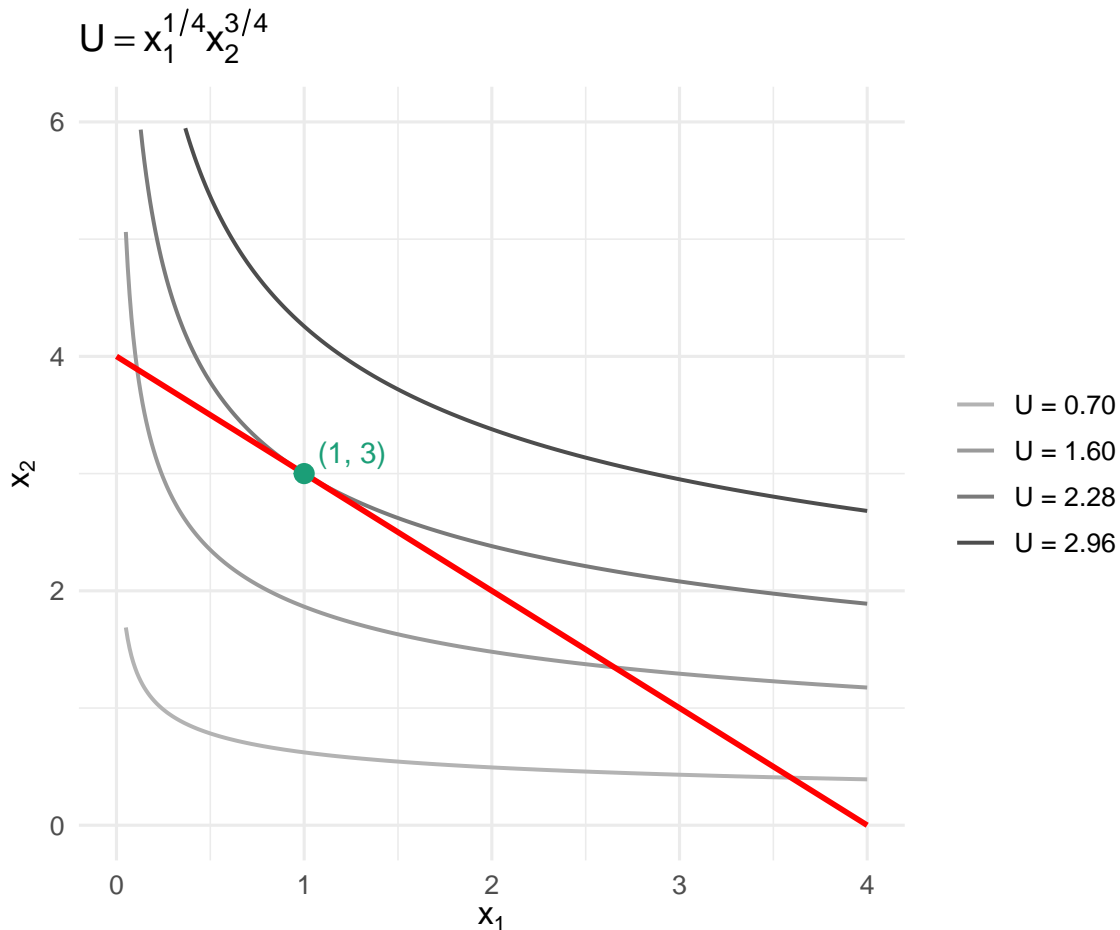


Figura 82: Problema do consumidor para $U = x_1^{1/4} x_2^{3/4}$ com $p_1 = 1$, $p_2 = 1$, $R = 4$. Curvas de indiferença (cinza), reta orçamentária (vermelha) e o ótimo $(x_1^*, x_2^*) = (1, 3)$ (verde), no ponto de tangência.

38.1.4.3 (c) (0,75) — Diferenciação das CPOs e efeito da renda sobre a demanda do bem 1

Diferenciando totalmente o sistema de equilíbrio em relação a R (com p_1, p_2 fixos), as endógenas são (x_1, x_2, λ) :

$$\begin{aligned} \text{(CPO 1): } & U_{11} dx_1 + U_{12} dx_2 - p_1 d\lambda = 0, \\ \text{(CPO 2): } & U_{21} dx_1 + U_{22} dx_2 - p_2 d\lambda = 0, \\ \text{(restrição): } & p_1 dx_1 + p_2 dx_2 = dR. \end{aligned}$$

Em forma matricial (ordem $d\lambda, dx_1, dx_2$), a matriz é o próprio Hessiano orlado \bar{H} :

$$\bar{H} \begin{pmatrix} d\lambda \\ dx_1 \\ dx_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -dR \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Regra de Cramer para x_1 (substituindo a coluna de dx_1 pelo vetor de termos independentes):

$$\frac{\partial x_1}{\partial R} = \frac{1}{|\bar{H}|} \det \begin{pmatrix} 0 & -1 & -p_2 \\ -p_1 & 0 & U_{12} \\ -p_2 & 0 & U_{22} \end{pmatrix} = \frac{p_2 U_{12} - p_1 U_{22}}{|\bar{H}|}.$$

Sinal. Como $U_{12} > 0$ e $U_{22} < 0$, o numerador $p_2 U_{12} - p_1 U_{22} > 0$; e $|\bar{H}| > 0$ pela CSO. Logo:

$$\boxed{\frac{\partial x_1}{\partial R} > 0.}$$

Interpretação. Sob as hipóteses dadas ($U_{12} > 0, U_{ii} < 0$), **o bem 1 é necessariamente normal:** aumentar a renda eleva a demanda. (Em geral o sinal seria ambíguo; aqui as hipóteses de curvatura o fixam positivo.)

38.1.4.4 (d) (1,0) — Cobb-Douglas $U = x_1^{1/4} x_2^{3/4}$: ótimo x_1^*, x_2^*, λ^*

As CPOs $U_1 = \lambda p_1, U_2 = \lambda p_2$ com tangência dão $\frac{U_1}{U_2} = \frac{(1/4)x_2}{(3/4)x_1} = \frac{x_2}{3x_1} = \frac{p_1}{p_2}$, e a demanda Cobb-Douglas conhecida (cada bem absorve uma fração fixa da renda igual ao seu expoente):

$$\boxed{x_1^* = \frac{1}{4} \frac{R}{p_1}, \quad x_2^* = \frac{3}{4} \frac{R}{p_2}.}$$

Multiplicador. $\lambda^* = \frac{U_1(x^*)}{p_1} = \frac{1}{p_1} \cdot \frac{1}{4} (x_1^*)^{-3/4} (x_2^*)^{3/4}$. Substituindo:

$$\lambda^* = \frac{1}{4p_1} \left(\frac{R/(4p_1)}{p_1} \right)^{-3/4} \left(\frac{3R}{4p_2} \right)^{3/4} = \frac{1}{4p_1} \left(\frac{3p_1}{p_2} \right)^{3/4} = \boxed{\frac{3^{3/4}}{4} p_1^{-1/4} p_2^{-3/4}}.$$

Note que λ^* **não depende de R** : para Cobb-Douglas com expoentes somando 1, a utilidade indireta é linear na renda, então a utilidade marginal da renda é constante.

38.1.4.5 (e) (0,75) — Minimização de despesa: problema, CPOs e CSO

Problema dual. Dado um nível-alvo de utilidade \bar{U} :

$$\min_{x_1, x_2} p_1 x_1 + p_2 x_2 \quad \text{s.a.} \quad U(x_1, x_2) = \bar{U}.$$

Lagrangiana. $\mathcal{L} = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \mu (\bar{U} - U(x_1, x_2))$.

CPOs:

$$\boxed{p_1 = \mu U_1, \quad p_2 = \mu U_2, \quad U(x_1, x_2) = \bar{U}.}$$

Dividindo, recupera-se a **mesma tangência** $\frac{U_1}{U_2} = \frac{p_1}{p_2}$ — refletindo a dualidade entre maximizar utilidade e minimizar despesa.

CSO. Com o Hessiano orlado

$$\bar{H}_E = \begin{pmatrix} 0 & -U_1 & -U_2 \\ -U_1 & -\mu U_{11} & -\mu U_{12} \\ -U_2 & -\mu U_{21} & -\mu U_{22} \end{pmatrix},$$

a condição de **mínimo** (com $n = 2$, $m = 1$) é $|\bar{H}_E| < 0$. Como $\mu > 0$ e U é quase-côncava, a condição é satisfeita na solução interior.

38.1.4.6 (f) (1,5) — Cobb-Douglas: demandas hicksianas, função despesa e homogeneidade

Com $U = x_1^{1/4} x_2^{3/4}$, a tangência $\frac{U_1}{U_2} = \frac{(1/4)x_2}{(3/4)x_1} = \frac{x_2}{3x_1} = \frac{p_1}{p_2}$ dá $x_2 = \frac{3p_1}{p_2} x_1$. Substituindo na restrição $x_1^{1/4} x_2^{3/4} = \bar{U}$:

$$x_1^{1/4} \left(\frac{3p_1}{p_2} x_1 \right)^{3/4} = \bar{U} \implies x_1 \left(\frac{3p_1}{p_2} \right)^{3/4} = \bar{U}.$$

Demandas hicksianas (compensadas):

$$\boxed{x_1^* = \bar{U} \left(\frac{p_2}{3p_1} \right)^{3/4}, \quad x_2^* = \bar{U} \left(\frac{3p_1}{p_2} \right)^{1/4} .}$$

Função despesa. $D(p_1, p_2, \bar{U}) = p_1 x_1^* + p_2 x_2^*$.

$$D = p_1 \bar{U} 3^{-3/4} p_1^{-3/4} p_2^{3/4} + p_2 \bar{U} 3^{1/4} p_1^{1/4} p_2^{-1/4} = \bar{U} p_1^{1/4} p_2^{3/4} (3^{-3/4} + 3^{1/4}).$$

Como $3^{1/4} = 3 \cdot 3^{-3/4}$, o fator é $3^{-3/4}(1 + 3) = 4 \cdot 3^{-3/4}$:

$$D(p_1, p_2, \bar{U}) = 4 \cdot 3^{-3/4} \bar{U} p_1^{1/4} p_2^{3/4}.$$

Grau de homogeneidade nos preços. Escalando p_1, p_2 por $t > 0$:

$$D(tp_1, tp_2, \bar{U}) = 4 \cdot 3^{-3/4} \bar{U} (tp_1)^{1/4} (tp_2)^{3/4} = t^{1/4+3/4} D(p_1, p_2, \bar{U}) = tD.$$

Logo D é **homôgenea de grau 1** nos preços — como toda função despesa (dobrar todos os preços dobra o gasto necessário para manter \bar{U}).

38.1.4.7 (g) (0,5) — Lema de Shephard via cálculo direto e via Teorema do Envelope

Cálculo direto. Derivando a função despesa em p_1 :

$$\frac{\partial D}{\partial p_1} = 4 \cdot 3^{-3/4} \bar{U} \cdot \frac{1}{4} p_1^{-3/4} p_2^{3/4} = 3^{-3/4} \bar{U} p_1^{-3/4} p_2^{3/4} = \bar{U} \left(\frac{p_2}{3p_1} \right)^{3/4} = x_1^*.$$

$$\frac{\partial D}{\partial p_1} = x_1^*.$$

Via Teorema do Envelope. Seja $L^* = \mathcal{L}(x_1^*, x_2^*, \mu^*; p_1, p_2, \bar{U})$ a Lagrangeana avaliada no ótimo. O Teorema do Envelope diz que a derivada da função-valor em um parâmetro iguala a derivada **parcial** da Lagrangeana naquele parâmetro, mantendo as escolhas fixas (os efeitos indiretos via x_1^*, x_2^* cancelam-se pelas CPOs):

$$\frac{\partial L^*}{\partial p_1} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_1} \Big|_{\text{ótimo}} = \frac{\partial}{\partial p_1} [p_1 x_1 + p_2 x_2 + \mu(\bar{U} - U)] \Big|_{\text{ótimo}} = x_1^*.$$

Como $L^* = D(p_1, p_2, \bar{U})$ no ótimo (o termo da restrição é nulo), confirma-se

$$\frac{\partial L^*}{\partial p_1} = x_1^* = \frac{\partial D}{\partial p_1}.$$

Os dois caminhos coincidem: o **Lema de Shephard** para o consumidor — derivar a função despesa no preço de um bem recupera a demanda hicksiana por aquele bem — é uma aplicação imediata do Teorema do Envelope.

39 Referências

Chiang, Alpha C., e Kevin Wainwright. 2005. *Fundamental Methods of Mathematical Economics*. 4^o ed. McGraw-Hill.

Leithold, Louis. 1994. *O Cálculo com Geometria Analítica*. 3^o ed. V. 1. Harbra.

Simon, Carl P., e Lawrence Blume. 1994. *Mathematics for Economists*. W. W. Norton & Company.