

Notas de Aula de Macroeconomia para o Mestrado e Doutorado em Economia

MFEE/FGV — Professor Fernando de Holanda Barbosa Filho

Vitor Wilher¹

Versão preliminar — compilada ao longo do curso. Baseada no caderno da disciplina (Julia Comparato), nas listas de exercícios e em Barbosa (2017).

¹Bacharel e Mestre em Economia pela UFF, Candidato ao PhD em Economia pela EPGE/FGV. É Especialista em Ciências de Dados e Inteligência Artificial Generativa pela PUC-Rio. Atualmente, exerce a função de Data Tech Lead na Análise Macro (<http://analisemacro.com.br>). Saiba mais em <https://github.com/vitorwilher>.

Índice

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Introdução | 7 |
| 1.1 | Um curso construído por camadas | 7 |
| 1.2 | As listas de exercícios e seus modelos | 8 |
| 1.3 | O kit matemático que usaremos o tempo todo | 9 |
| 1.3.1 | Expansão de Taylor de 1ª ordem: para que linearizar | 9 |
| 1.3.2 | Logaritmo e diferenças percentuais | 9 |
| 1.3.3 | Logaritmo e derivada em relação ao tempo: taxas de crescimento | 10 |
| 1.4 | Como usar estas notas | 10 |
| 2 | O Longo Prazo: Produto Potencial e Mercado de Fundos | 11 |
| 2.1 | Motivação econômica | 11 |
| 2.2 | A função de produção e o produto potencial | 11 |
| 2.3 | O mercado de trabalho: a demanda como microfundamento | 12 |
| 2.4 | Oferta de trabalho e equilíbrio | 13 |
| 2.5 | Estática comparativa: o que move o produto potencial | 14 |
| 2.5.1 | Avanço tecnológico | 14 |
| 2.5.2 | Imposto sobre a folha de salários | 15 |
| 2.5.3 | Salário mínimo e benefícios | 15 |
| 2.6 | A identidade do produto e o mercado de fundos emprestáveis | 16 |
| 2.6.1 | Reescrevendo como oferta e demanda de fundos | 16 |
| 2.6.2 | Estática comparativa: o <i>crowding out</i> | 17 |
| 2.7 | Exercícios comentados | 18 |
| 3 | O Curto Prazo: IS–LM e a Derivação da Curva IS | 19 |
| 3.1 | Motivação econômica | 19 |
| 3.2 | O mercado de bens e o multiplicador | 19 |
| 3.2.1 | Por que existe um multiplicador? | 19 |
| 3.3 | A curva IS | 20 |
| 3.3.1 | Derivação rigorosa da IS: a expansão de Taylor em ação | 21 |
| 3.4 | A curva LM e o mercado monetário | 23 |
| 3.4.1 | Por que os Bancos Centrais fixam o juro, e não a moeda | 24 |
| 3.5 | Equilíbrio IS–LM e estática comparativa | 24 |
| 3.6 | Exercícios | 25 |
| 4 | A Curva de Phillips: da Fixação de Preços às Expectativas | 27 |
| 4.1 | Motivação econômica | 27 |
| 4.2 | O microfundamento: fixação de preços com <i>markup</i> | 27 |
| 4.2.1 | Do nível à taxa: o truque do log e a derivada temporal | 28 |
| 4.2.2 | Reajuste de salários e a Curva de Phillips | 29 |
| 4.3 | Da inflação–desemprego à inflação–produto: a Lei de Okun | 29 |
| 4.4 | Expectativas: a variável que define a dinâmica | 29 |
| 4.4.1 | Expectativas adaptativas (<i>backward looking</i>) | 30 |
| 4.4.2 | Expectativas racionais (<i>forward looking</i>) | 30 |
| 4.5 | A forma dinâmica: π , inércia e a expansão de Taylor | 30 |
| 4.6 | Exercícios comentados | 31 |
| 5 | O Modelo IS–CP–RPM e o Diagrama de Fases | 33 |
| 5.1 | Motivação econômica | 33 |
| 5.2 | A Regra de Política Monetária (regra de Taylor) | 33 |
| 5.3 | Primeiro modelo: IS–CP–RPM com inércia | 34 |
| 5.3.1 | Reduzindo a um sistema em (y, π) | 34 |
| 5.3.2 | O diagrama de fases | 35 |

| | | |
|---|--|-----------|
| 5.3.3 | Experimento: redução da meta de inflação | 35 |
| 5.4 | Segundo modelo: sem inércia (Phillips <i>forward looking</i>) | 36 |
| 5.5 | Terceiro modelo: o Novo-Keynesiano com IS dinâmica | 36 |
| 5.5.1 | A análise por autovalores: Jacobiano, determinante e traço | 37 |
| 5.6 | Exercícios comentados | 38 |
| Monitorias do Módulo 1 — Resoluções das Listas 1 a 4 | | 39 |
| 6 | Monitoria 1 — Lista 1: IS–CP–RPM básico (com e sem inércia) | 39 |
| 6.1 | Exercício 1 | 39 |
| 6.1.1 | Item 1 — Equilíbrio e dinâmica | 39 |
| 6.1.2 | Item 2 — Redução não antecipada da meta | 40 |
| 6.1.3 | Item 3 — Interpretação de $\phi < 0$ | 41 |
| 6.1.4 | Item 4 — Regra de política monetária sem resposta ao hiato | 42 |
| 6.1.5 | Item 5 — Diferença entre os dois modelos | 43 |
| 6.2 | Exercício 2 | 43 |
| 6.2.1 | Item 1 — Equilíbrio e dinâmica | 44 |
| 6.2.2 | Item 2 — Redução não antecipada da meta | 45 |
| 7 | Monitoria 2 — Lista 2: IS–CP–RPM com regra fiscal e estimativa do juro neutro | 46 |
| 7.1 | Exercício 1 | 46 |
| 7.1.1 | Item 1 — Interpretação das regras | 46 |
| 7.1.2 | Item 2 — Equilíbrio e dinâmica | 47 |
| 7.1.3 | Item 3 — Redução não antecipada da meta | 48 |
| 7.1.4 | Item 4 — Caso $\phi < 0$ | 49 |
| 7.2 | Exercício 2 | 50 |
| 7.2.1 | Item 1 — Consequências de $\bar{\rho} \neq \bar{\rho}^{BC}$ | 50 |
| 7.2.2 | Item 2 — Cenários $\bar{\rho} \leq \bar{\rho}^{BC}$ | 51 |
| 8 | Monitoria 3 — Lista 3: IS dinâmica (Novo-Keynesiano) — o ponto de sela | 53 |
| 8.1 | Exercício 1 | 53 |
| 8.1.1 | Item 1 — Equilíbrio e dinâmica | 53 |
| 8.1.2 | Item 2 — Redução não antecipada da meta de inflação | 55 |
| 8.2 | Exercício 2 | 56 |
| 8.2.1 | Item 1 — Como obter a curva IS | 56 |
| 8.2.2 | Item 2 — A RPM exige variável não observável? | 57 |
| 8.2.3 | Item 3 — Equilíbrio, dinâmica e estabilidade | 57 |
| 8.2.4 | Item 4 — Você recomendaria esta regra? | 58 |
| 9 | Monitoria 4 — Lista 4: IS dinâmica com reversão à média — estabilidade global | 59 |
| 9.1 | Exercício 1 | 59 |
| 9.1.1 | Item 1 — Equilíbrio e dinâmica | 59 |
| 9.1.2 | Item 2 — Aumento não antecipado da meta de inflação | 60 |
| 9.1.3 | Item 3 — O parâmetro ϕ negativo | 61 |
| 9.2 | Exercício 2 | 62 |
| 9.2.1 | Item 1 — Especificação das equações | 63 |
| 9.2.2 | Item 2 — Equilíbrio e dinâmica | 63 |
| 9.2.3 | Item 3 — Redução não antecipada da meta de inflação | 64 |
| 9.2.4 | Item 4 — O parâmetro ϕ negativo | 65 |
| Testes do Módulo 1 — IS–CP–RPM fechado | | 66 |
| 10 | Teste 1 (2026) — Modelo IS–CP–RPM com inércia | 66 |
| 10.1 | Item (a) — Curva $\dot{\pi} = 0$ e curva IS do modelo | 66 |
| 10.2 | Item (b) — Reescrita da RPM | 67 |

| | | |
|---|---|-----------|
| 10.3 | Item (c) — Caso $\phi > 0$ e ponto de estabilidade | 67 |
| 10.4 | Item (d) — Redução não antecipada da meta | 68 |
| 11 | Teste 2 (2026) — IS–CP–RPM dinâmico com Lei de Okun | 69 |
| 11.1 | Item (a) — Equilíbrio e dinâmica no plano (u, π) | 69 |
| 11.2 | Item (b) — Redução não antecipada da meta de inflação | 71 |
| 11.3 | Item (c) — O caso $\phi < 0$ | 72 |
| 12 | Macroeconomia da Economia Aberta | 73 |
| 12.1 | Motivação econômica | 73 |
| 12.2 | Arbitragem de preços: a Paridade do Poder de Compra | 73 |
| 12.2.1 | Câmbio real e competitividade | 73 |
| 12.3 | Arbitragem de juros: a Paridade de Juros | 74 |
| 12.3.1 | Paridade real e a equação que fecha os modelos | 74 |
| 12.4 | A balança comercial: Marshall–Lerner e a curva J | 75 |
| 12.5 | A identidade poupança–investimento e os déficits gêmeos | 75 |
| 12.6 | A IS da economia aberta: derivação | 76 |
| 12.7 | Exercícios comentados | 76 |
| 13 | Regimes Cambiais: o Modelo de Câmbio Fixo e o Modelo de Câmbio Flexível | 78 |
| 14 | O Modelo de Câmbio Fixo (Lista 5) | 78 |
| 14.1 | As equações do modelo | 78 |
| 14.2 | Derivação do sistema dinâmico | 78 |
| 14.3 | Classificação e diagrama de fases | 79 |
| 15 | O Modelo de Câmbio Flexível (Lista 6) | 80 |
| 15.1 | As equações do modelo | 80 |
| 15.2 | Derivação do sistema dinâmico em (ρ, q) | 80 |
| 15.3 | Estática dinâmica: redução da meta e <i>overshooting</i> | 81 |
| 15.4 | Exercícios comentados | 82 |
| Monitorias do Módulo 2 — Resoluções das Listas 5 e 6 | | 83 |
| 16 | Monitoria 5 — Lista 5: Economia aberta — câmbio fixo | 83 |
| 16.1 | Exercício 1 | 83 |
| 16.1.1 | Item 1 — Regime cambial | 83 |
| 16.1.2 | Item 2 — Equilíbrio e dinâmica | 84 |
| 16.2 | Exercício 2 | 86 |
| 16.2.1 | Item 1 — “O câmbio se desvaloriza quando o país cresce mais rápido que os outros” | 87 |
| 16.2.2 | Item 2 — “O câmbio se aprecia quando a moeda cresce mais rápido que a dos outros” | 87 |
| 17 | Monitoria 6 — Lista 6: Economia aberta — câmbio flexível | 88 |
| 17.1 | Exercício 1 | 88 |
| 17.1.1 | Item 1 — Regime cambial | 88 |
| 17.1.2 | Item 2 — Equilíbrio e dinâmica em (ρ, q) | 89 |
| 17.1.3 | Item 3 — ρ e q são sempre negativamente correlacionadas? | 90 |
| 17.1.4 | Item 4 — Aumento da taxa de juros real externa | 90 |
| 17.2 | Exercício 2 | 91 |
| 17.2.1 | Item (a) — Equilíbrio e dinâmica em (ρ, q) | 92 |
| 17.2.2 | Item (b) — Aumento da taxa de juros real externa | 92 |
| 17.2.3 | Item (c) — Equilíbrio e dinâmica em (y, π) | 93 |
| 17.2.4 | Item (d) — Redução da meta de inflação | 94 |
| Teste do Módulo 2 — Economia aberta | | 96 |

| | |
|--|------------|
| 18 Teste 3 (2026) — Economia aberta com câmbio flutuante | 96 |
| 18.1 Item (a) — Regime cambial | 96 |
| 18.2 Item (b) — Equilíbrio e dinâmica no plano (π, y) | 97 |
| 18.3 Item (c) — Redução da meta de inflação | 98 |
| 19 A Restrição Orçamentária do Governo | 100 |
| 19.1 Motivação econômica | 100 |
| 19.2 A restrição consolidada do governo | 100 |
| 19.2.1 Passando para % do PIB: a regra do quociente | 100 |
| 19.3 Sustentabilidade da dívida | 101 |
| 19.3.1 Valor presente: a dívida como ativo e a condição de não-Ponzi | 102 |
| 19.4 Senhoriação e o imposto inflacionário | 103 |
| 19.5 Equivalência ricardiana | 103 |
| 19.6 Teoria fiscal do nível de preços e hiperinflação | 104 |
| 19.6.1 O Modelo de Hiperinflação no diagrama de fases | 104 |
| 19.7 Exercícios comentados | 105 |
| Monitorias do Módulo 3 — Resolução da Lista 7 | 106 |
| 20 Monitoria 7 — Lista 7: Restrição orçamentária e sustentabilidade da dívida | 106 |
| 20.1 Exercício 1 | 106 |
| 20.1.1 Item 1 — Restrição orçamentária em proporção do PIB | 106 |
| 20.1.2 Item 2 — O que ocorre com a dívida/PIB? | 107 |
| 20.1.3 Item 3 — Condição exigida pelo FMI | 107 |
| 20.1.4 Item 4 — Déficit primário variável (com $\rho > \gamma$) | 107 |
| 20.1.5 Item 5 — Déficit primário constante | 108 |
| 20.1.6 Item 6 — Regra $\frac{T - G}{Y} = \alpha b$ | 108 |
| 20.1.7 Item 7 — Regra $\frac{T - G}{Y} = \alpha b$ | 108 |
| 20.2 Exercício 2 — Sustentabilidade da dívida externa | 109 |
| 21 Crescimento Econômico | 110 |
| 21.1 Motivação econômica | 110 |
| 21.2 Harrod–Domar: o ponto de partida e seu problema | 110 |
| 21.3 O modelo de Solow | 110 |
| 21.3.1 Microfundamento: as participações dos fatores | 111 |
| 21.3.2 A equação fundamental: dinâmica do capital por trabalhador | 111 |
| 21.3.3 A regra de ouro e a ineficiência dinâmica | 112 |
| 21.4 Solow com progresso tecnológico | 112 |
| 21.4.1 A velocidade de convergência (log-linearização) | 113 |
| 21.5 Capital humano e crescimento endógeno | 114 |
| 21.6 Contabilidade do crescimento: o resíduo de Solow | 114 |
| 21.7 Exercícios comentados | 114 |
| Monitoria do Módulo 4 — Resolução da Lista 8 | 116 |
| 22 Monitoria 8 — Lista 8: Modelo de Solow | 116 |
| 22.1 Exercício 1 — Solow com Cobb–Douglas | 116 |
| 22.1.1 Item 1 — Estado estacionário k^*, y^*, c^* | 116 |
| 22.1.2 Item 2 — Taxa de poupança da regra de ouro | 117 |
| 22.1.3 Item 3 — A poupança afeta a taxa de crescimento? | 118 |
| 22.2 Exercício 2 — Verdadeiro ou falso (modelo de Solow) | 118 |
| 22.2.1 Item 1 | 119 |
| 22.2.2 Item 2 | 119 |
| 22.2.3 Item 3 | 119 |

| | | |
|--|---|------------|
| 22.2.4 | Item 4 | 119 |
| 22.2.5 | Item 5 | 119 |
| 22.2.6 | Item 6 | 120 |
| 22.2.7 | Item 7 | 120 |
| 22.2.8 | Item 8 | 120 |
| Provas resolvidas | | 121 |
| 23 Prova 1 (2025) — Prova cumulativa da disciplina | | 121 |
| 23.1 | Questão 1 (2,5 pts) — IS-CP-RPM fechado | 121 |
| 23.1.1 | Item (a) — Equilíbrio e dinâmica | 121 |
| 23.1.2 | Item (b) — O BC eleva a meta de inflação | 122 |
| 23.1.3 | Item (c) — O caso $\phi < 0$ | 123 |
| 23.2 | Questão 2 (3,0 pts) — Economia aberta no plano (y, π) | 124 |
| 23.2.1 | Item (a) — Regime cambial | 124 |
| 23.2.2 | Item (b) — Equilíbrio e dinâmica em (y, π) | 124 |
| 23.2.3 | Item (c) — Aumento da meta de inflação | 125 |
| 23.3 | Questão 3 (2,5 pts) — Restrição orçamentária e sustentabilidade da dívida | 126 |
| 23.3.1 | Item (A) — Restrição em proporção do PIB | 126 |
| 23.3.2 | Item (B) — Sustentabilidade com $\dot{M} = 0$ | 126 |
| 23.3.3 | Item (C) — Exercício numérico | 126 |
| 23.4 | Questão 4 (2,0 pts) — Crescimento de Solow (certo, errado ou talvez) | 127 |
| 24 Prova 2 (2025) — Prova cumulativa da disciplina (segunda versão) | | 128 |
| 24.1 | Questão 1 (2,5 pts) — IS-CP-RPM fechado | 128 |
| 24.2 | Questão 2 (3,0 pts) — Economia aberta no plano (ρ, q) | 128 |
| 24.2.1 | Item (a) — Regime cambial | 128 |
| 24.2.2 | Item (b) — ρ e q são sempre negativamente correlacionadas? | 128 |
| 24.2.3 | Item (c) — Aumento da meta de inflação | 129 |
| 24.3 | Questão 3 (2,5 pts) — Sustentabilidade da dívida: caso europeu | 130 |
| 24.3.1 | Item (B') — Diagnóstico | 130 |
| 24.3.2 | Item (C') — Ajuste após a crise | 130 |
| 24.4 | Questão 4 (2,0 pts) — Crescimento de Solow (certo, errado ou talvez) | 130 |
| 25 Referências | | 132 |

1 Introdução

Macroeconomia é o estudo da economia como um todo: o produto agregado, o nível de preços, a inflação, o desemprego, a taxa de juros e a taxa de câmbio. Diferentemente da microeconomia, que parte das decisões individuais de consumidores e firmas, a macroeconomia pergunta como essas decisões se somam — e como o governo, por meio das políticas monetária e fiscal, pode influenciar o resultado agregado.

O objetivo destas notas é **organizar o curso em torno de modelos**, mostrando, a cada passo, três coisas: (i) a **motivação econômica** — que pergunta o modelo responde; (ii) a **derivação matemática** — por que escrevemos cada equação daquela forma e que truques usamos para manipulá-la; e (iii) a **estática comparativa** — o que acontece com o equilíbrio quando um parâmetro ou uma variável de política muda, lido sempre em diagramas e em equações.

A referência central é Barbosa (2017), complementado pela Barbosa (2009) e pelo caderno da disciplina. Ao longo do texto indicamos artigos clássicos — Lucas (1976) sobre a crítica às avaliações de política, Romer (2000) sobre a macroeconomia keynesiana sem a curva LM, Clarida et al. (1999) sobre a perspectiva novo-keynesiana e Taylor (1993) sobre regras de juros.

1.1 Um curso construído por camadas

A ideia-força do curso é que os modelos macroeconômicos formam uma **sequência de complexidade crescente**. Não trocamos de modelo a cada aula por capricho: cada novo conjunto de equações resolve uma limitação do anterior. Vale a pena enxergar o mapa antes de entrar nos detalhes.

1. **Longo prazo (preços flexíveis)**. Começamos com a economia em que todos os mercados se equilibram instantaneamente. O produto é o **produto potencial** \bar{y} , determinado pela tecnologia e pelos fatores de produção; a política monetária é neutra. Aqui aparece o mercado de fundos emprestáveis e a ideia de *crowding out*.
2. **Curto prazo com rigidez de preços: IS–LM**. Introduzimos rigidez nominal. Agora a demanda agregada determina o produto, e há espaço para política de estabilização. Surge o **multiplicador**, a curva **IS** (equilíbrio no mercado de bens) e a curva **LM** (equilíbrio no mercado monetário).
3. **A oferta: Curva de Phillips**. O modelo IS–LM determina a demanda, mas não diz como a inflação se forma. A **Curva de Phillips** — da versão de Lucas (1976) às expectativas adaptativas e racionais — fecha o lado da oferta e introduz a dinâmica da inflação.
4. **O modelo moderno: IS–CP–RPM**. Substituímos a LM por uma **Regra de Política Monetária** (regra de Taylor): o Banco Central fixa a taxa de juros, não a quantidade de moeda. Esse é o arcabouço de Romer (2000) que organiza praticamente todas as listas de exercícios — análise por **diagrama de fases** com a inflação predeterminada.
5. **Economia aberta**. Acrescentamos o resto do mundo: paridade do poder de compra, paridade de juros, o modelo Mundell–Fleming e a dinâmica sob **câmbio fixo** e **câmbio flexível**.
6. **Restrição orçamentária do governo e crescimento**. Por fim, a consolidação das contas do Tesouro e do Banco Central, a equivalência ricardiana e a teoria fiscal do nível de preços; e o crescimento de longo prazo (Solow, regra de ouro, convergência, crescimento endógeno).

💡 Como ler a “evolução da complexidade”

Em cada capítulo, abrimos uma caixa “**Do modelo anterior para este**” que isola exatamente qual hipótese foi relaxada e qual equação foi acrescentada. A complexidade nunca cresce por acaso: cada equação nova **compra um fenômeno novo** (rigidez de preços, formação de expectativas, abertura ao exterior, restrição fiscal). Ao final do curso, o modelo IS–CP–RPM da economia aberta não será “outro” modelo, e sim a última camada de uma construção que começa no mercado de trabalho do Capítulo 2.

1.2 As listas de exercícios e seus modelos

O professor constrói o curso **modelo a modelo**, e cada **lista de exercícios** corresponde a um degrau de complexidade. Estas notas são organizadas para refletir isso: a **teoria** de cada módulo prepara o modelo, e a **resolução completa de cada lista** aparece ao **fim do módulo**, como monitoria. A tabela abaixo é o mapa dessa evolução.

| Lista | Modelo | Novidade em relação à anterior | Resultado-chave |
|-------|--|--|--|
| 1 | IS–CP–RPM básico | IS estática, CP com inércia, regra de Taylor | estável se $\phi > 0$ (princípio de Taylor) |
| 2 | + regra de política fiscal | déficit/gasto na IS; BC usa estimativa $\bar{\rho}^{BC}$ | viés do juro neutro; estabilização fiscal |
| 3 | IS dinâmica (Novo-Keynesiano) | $\dot{y} = \sigma(\rho - \bar{\rho})$ (nível \rightarrow variação) | $\det J < 0$: ponto de sela |
| 4 | IS dinâmica com reversão à média | termo $-\lambda(y - \bar{y})$ e sinal convencional | $\det J > 0$: estabilidade global (nó/foco) |
| 5 | Economia aberta — câmbio fixo | câmbio real, PJD, RPM $s = \bar{s}$ | inflação importada; estável se $\gamma > \alpha\delta$ |
| 6 | Economia aberta — câmbio flexível | RPM = regra de Taylor; câmbio salta | $\det J < 0$: sela ; <i>overshooting</i> |
| 7 | Restrição orçamentária do governo | dinâmica de estoques (dívida/PIB); senhoriagem | efeito bola de neve; dívida estável se $\rho < \gamma$ |
| 8 | Crescimento — modelo de Solow | dinâmica do capital por trabalhador ; lado da oferta no longo prazo | estado estacionário; regra de ouro ; convergência condicional |

! Cobertura desta versão

Estas notas cobrem os **quatro módulos** do curso, indo **até a Lista 8**: Módulos 1 e 2 (IS/LM/Curva de Phillips e Economia Aberta, Listas 1 a 6), Módulo 3 (**Restrição Orçamentária do Governo**, com a resolução completa da Lista 7) e Módulo 4 (**Crescimento — modelo de Solow**, com a resolução completa da Lista 8) — fiel ao princípio de que cada modelo entra junto com a sua lista.

1.3 O kit matemático que usaremos o tempo todo

Três ferramentas reaparecem em quase todas as derivações. Convém entender **por que** as usamos antes de vê-las em ação — é a “lógica matemática por trás das curvas” que o curso enfatiza.

! Estas notas conversam com as Notas de Matemática

Todo conceito matemático que usamos aqui é desenvolvido com rigor nas **Notas de Aula de Matemática para o Mestrado e Doutorado em Economia** (EPGE/FGV, Profa. Silvia Matos). Sempre que aplicarmos uma ferramenta, abriremos uma caixa “**Ferramenta matemática**” que (i) nomeia o conceito, (ii) recorda a fórmula central e (iii) indica o capítulo correspondente das Notas de Matemática. O objetivo é que a macroeconomia seja, de fato, **matemática aplicada a problemas econômicos** — e não fórmulas que caem do céu. Os mapeamentos principais são: maximização de firmas e consumidores → *Otimização (CPO, CSO, Hessiana)*; linearização → *Derivadas (polinômio de Taylor)*; taxas de crescimento → *Função Logaritmo Natural*; dinâmica e diagramas de fase → *Equações Diferenciais Ordinárias*; estabilidade de sistemas → *Álgebra Linear (autovalores) e Funções de Várias Variáveis (Jacobiano)*.

1.3.1 Expansão de Taylor de 1ª ordem: para que linearizar

Quase todas as relações de comportamento são **não-lineares e genéricas**: escrevemos $C(y - T, \rho)$ ou $I(\rho)$ sem especificar a forma funcional. Para trabalhar com elas, aproximamos a função em torno de um ponto de referência — o equilíbrio de longo prazo — por uma reta. A **expansão de Taylor de 1ª ordem** de uma função f em torno de \bar{x} é

$$f(x) \approx f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x - \bar{x}).$$

A leitura econômica é direta: $f(x) - f(\bar{x}) \approx f'(\bar{x})(x - \bar{x})$, ou seja, **o desvio da variável em relação ao seu valor de longo prazo é proporcional ao desvio da causa**, com a derivada (a “sensibilidade marginal”) como fator de proporcionalidade. Linearizar **não é** perda de rigor: é a forma de transformar relações qualitativas em equações de **hiatos** ($y - \bar{y}$, $\rho - \bar{\rho}$) que podemos somar, isolar e desenhar. Toda a curva IS, por exemplo, nasce de uma expansão de Taylor de C e de I . (*O polinômio de Taylor e seu termo de resto são desenvolvidos no capítulo Derivadas das Notas de Matemática.*)

1.3.2 Logaritmo e diferenças percentuais

Variáveis macroeconômicas vivem em **níveis** (R\$ trilhões de PIB), mas pensamos em **variações percentuais** (crescer 2%). O logaritmo faz a ponte. Da aproximação $\ln(1 + x) \approx x$ para x pequeno, segue que

$$\frac{y - \bar{y}}{\bar{y}} \approx \ln\left(1 + \frac{y - \bar{y}}{\bar{y}}\right) = \ln \frac{y}{\bar{y}} = \ln y - \ln \bar{y}.$$

Isto é: o **hiato do produto como fração do potencial** é (aproximadamente) a diferença de logaritmos. Por isso, ao final da derivação da IS, dividimos tudo por \bar{y} e reinterpretemos os hiatos como desvios percentuais — é o passo que dá às curvas a forma “limpa” usada nas listas.

1.3.3 Logaritmo e derivada em relação ao tempo: taxas de crescimento

Quando a variável evolui no tempo, a mesma ideia vira uma **taxa de crescimento**. Derivando $\ln x(t)$ pela regra da cadeia,

$$\frac{d}{dt} \ln x(t) = \frac{\dot{x}(t)}{x(t)} = \text{taxa de crescimento de } x.$$

Esse é o motivo de, repetidamente, **tomarmos o log e depois derivarmos em relação ao tempo**: transformamos uma relação entre níveis numa relação entre taxas de crescimento. É assim que a inflação aparece como $\pi = \dot{p} = \frac{d}{dt} \ln P$, e que a taxa de câmbio real q e sua variação \dot{q} se conectam às inflações doméstica e externa na economia aberta. (*A derivada de $\ln x$, a diferenciação logarítmica e a aproximação $\ln(1+x) \approx x$ estão nos capítulos Função Logaritmo Natural e Derivadas das Notas de Matemática.*)

i Convenção de notação (a mesma das listas e do caderno)

Letras com **barra** denotam valores de **longo prazo / potencial**: \bar{y} (produto potencial), $\bar{\rho}$ (juro real neutro), $\bar{\pi}$ (meta de inflação), \bar{q} (câmbio real de equilíbrio). Um **ponto** sobre a variável é a derivada temporal: $\dot{x} \equiv dx/dt$. **Hiatos** são desvios do valor de longo prazo, como $y - \bar{y}$ (hiato do produto) ou $\rho - \bar{\rho}$ (hiato de juros). As sensibilidades (derivadas) aparecem como C' , I' , ou como os parâmetros gregos $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \phi, \theta$ exatamente como nas listas de exercícios.

1.4 Como usar estas notas

Cada capítulo abre com a **motivação econômica**, desenvolve as **derivações passo a passo** (com os truques matemáticos explicitados), faz a **estática/dinâmica comparativa** em diagramas e fecha com **exercícios** — muitos deles retirados ou adaptados das listas e provas da disciplina. Sempre que possível, ancoramos a teoria em **episódios históricos** (a desinflação dos EUA nos anos 1970–80, o tripé macroeconômico brasileiro, a transição de 2002), porque é o caso concreto que dá sentido ao ferramental.

2 O Longo Prazo: Produto Potencial e Mercado de Fundos

2.1 Motivação econômica

Antes de discutir recessões, inflação e política de estabilização, precisamos de um ponto de referência: **para onde a economia tende quando todos os ajustes já ocorreram**. Esse é o papel do longo prazo. Pense nele não como “daqui a vinte anos”, mas como o estado para o qual a economia gravita uma vez que preços e salários tiveram tempo de se ajustar. A hipótese que o define é uma só, e vale a pena enunciá-la com cuidado, porque tudo o que segue depende dela.

! A hipótese mestra do longo prazo

Preços (e salários) são flexíveis. Se os preços se ajustam livremente, todo mercado está sempre em equilíbrio — não há excesso de demanda nem de oferta. Em particular, o mercado de trabalho se equilibra, e o produto resultante é o **produto potencial** \bar{y} : o máximo que a economia pode produzir **sem gerar pressão inflacionária nem deflacionária**.

O produto potencial não é observável — é uma variável teórica, estimada. Mas sua lógica é clara: ele vem da **tecnologia** e dos **fatores de produção** (capital e trabalho), não da política monetária. Esta é a primeira grande lição do curso: **no longo prazo, a moeda é neutra**. O que o Banco Central faz com os juros afeta o produto no curto prazo, mas não o produto potencial. Guardar essa ideia é fundamental, porque ela será o “âncora” contra a qual mediremos todos os desvios de curto prazo — os hiatos $y - \bar{y}$.

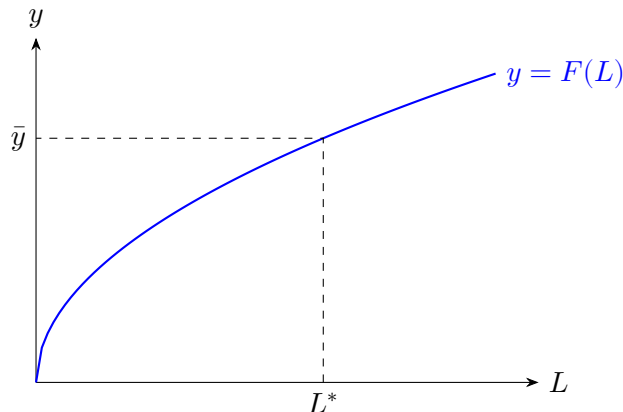
2.2 A função de produção e o produto potencial

A economia produz combinando capital K e trabalho L por meio de uma tecnologia F :

$$y = F(K, L).$$

No longo prazo o estoque de capital está dado, de modo que o produto depende do emprego de equilíbrio, $y = F(L)$. Sobre essa função fazemos duas hipóteses econômicas centrais:

- **Produtividade marginal positiva:** $F'(L) > 0$ — cada trabalhador a mais produz algo a mais;
- **Produtividade marginal decrescente:** $F''(L) < 0$ — esse “algo a mais” diminui à medida que o emprego cresce (com capital fixo, trabalhadores adicionais têm cada vez menos máquinas com que trabalhar).



A concavidade da curva é a tradução geométrica de $F'' < 0$. Falta saber **onde** a economia se posiciona sobre ela — isto é, qual é o L^* . Isso sai do **equilíbrio do mercado de trabalho**.

2.3 O mercado de trabalho: a demanda como microfundamento

A curva de demanda por trabalho é a produtividade marginal do trabalho. Esse é um resultado, não uma suposição — e vale derivá-lo com cuidado, porque é o primeiro exemplo do nosso método: uma decisão ótima individual vira uma curva agregada.

Considere a firma que vende o produto ao preço P e paga salário nominal w . Ela escolhe o emprego L que maximiza o lucro real. Vamos resolver esse problema **passo a passo**.

A firma maximiza o lucro (receita menos folha salarial):

$$\max_L \Pi(L) = P F(L) - w L.$$

A condição de primeira ordem (CPO) deriva o lucro em L e iguala a zero:

$$\Pi'(L) = P F'(L) - w = 0.$$

Isolando, obtemos a regra de contratação:

$$F'(L) = \frac{w}{P}.$$

A leitura econômica é “benefício marginal = custo marginal”: a firma contrata até que a **produtividade marginal do trabalho** $F'(L)$ iguale o **salário real** w/P .

A condição de segunda ordem (CSO) confirma que é máximo:

$$\Pi''(L) = P F''(L) < 0,$$

o que vale automaticamente, pois $F'' < 0$ (rendimentos decrescentes). Não há risco de termos achado um mínimo.

i Ferramenta matemática: otimização sem restrição (CPO e CSO)

Maximizar uma função $\Pi(L)$ é o problema central do capítulo **Otimização sem Restrição** das Notas de Matemática. A receita é:

- **Condição de 1ª ordem (CPO):** $\Pi'(L) = 0$ — candidatos a extremo. Aqui dá “produtividade marginal = salário real”.
- **Condição de 2ª ordem (CSO):** $\Pi''(L) < 0$ garante **máximo** (concavidade local). No caso multivariado (escolher capital e trabalho), a CSO vira a exigência de **Hessiana definida negativa** — ver *Funções de Várias Variáveis* e o critério de Sylvester nas Notas de Matemática.

A economia neoclássica é, em boa medida, a aplicação sistemática dessa receita a firmas e consumidores.

Como $F'' < 0$, a relação $F'(L) = w/P$ é **decrecente** em L : salários reais mais altos reduzem a quantidade demandada de trabalho. Eis a curva de demanda L^d .

i Exemplo 1 — Demanda por trabalho Cobb-Douglas

Seja $F(L) = AL^\gamma$, com $0 < \gamma < 1$ (A é a produtividade total dos fatores).

A firma resolve:

$$\max_L P A L^\gamma - w L.$$

CPO (derivando e igualando a zero):

$$P A \gamma L^{\gamma-1} - w = 0.$$

Isolando $L^{\gamma-1}$:

$$L^{\gamma-1} = \frac{w}{P A \gamma}.$$

Elevando ambos os lados a $\frac{1}{\gamma-1}$ (note que $\gamma - 1 < 0$):

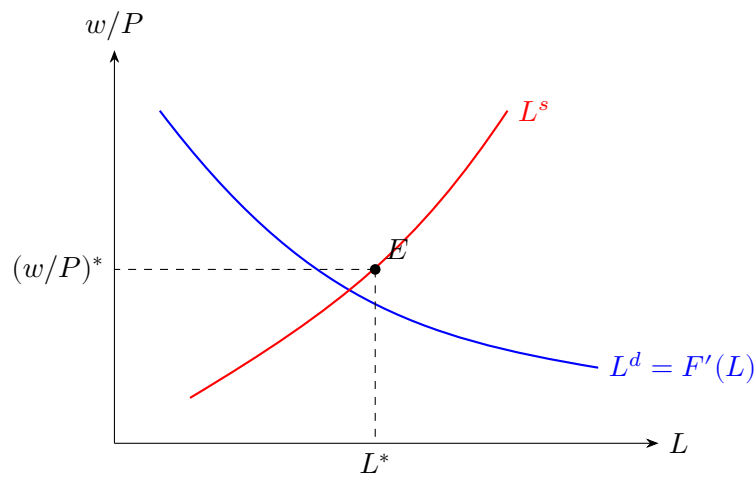
$$L^d = \left(\frac{P A \gamma}{w} \right)^{\frac{1}{1-\gamma}}.$$

Interpretação: a demanda por trabalho **crece** com a produtividade A e com o preço P , e **cai** com o salário nominal w — exatamente o esperado de uma curva de demanda negativamente inclinada em w/P .

2.4 Oferta de trabalho e equilíbrio

Do outro lado, o trabalhador decide quanto ofertar de trabalho comparando o salário real ao valor que atribui ao **lazer**. Para abrir mão de mais horas de lazer, exige salário real maior — por isso a oferta L^s é **crecente** no salário real. (Há um salário de reserva: o mínimo para “sair de casa e trabalhar”.)

O equilíbrio E ocorre onde a demanda encontra a oferta, $L^d = L^s$, determinando o salário real de equilíbrio $(w/P)^*$ e o emprego L^* . O produto potencial é então $\bar{y} = F(L^*)$.

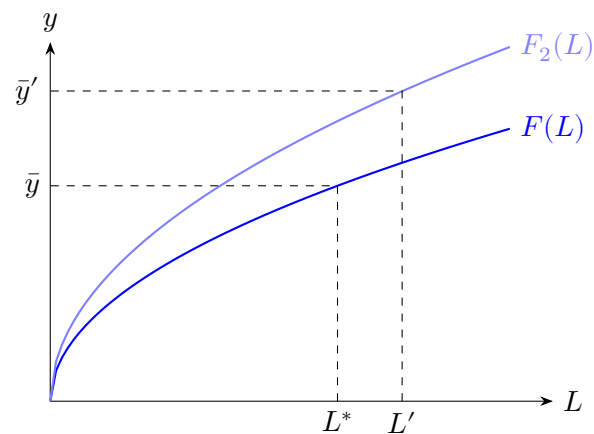


2.5 Estática comparativa: o que move o produto potencial

Como tudo o que altera L^* ou a tecnologia altera \bar{y} , a análise de longo prazo é **estática comparativa do mercado de trabalho**. Vejamos os deslocamentos mais importantes.

2.5.1 Avanço tecnológico

Uma melhora tecnológica eleva $F'(L)$ para todo L : a curva de demanda por trabalho **sobe**, aumentando L^* , e a função de produção se desloca para cima — **mais produto com o mesmo trabalho**. É a fonte primária de crescimento de \bar{y} (tema do Módulo 4).



2.5.2 Imposto sobre a folha de salários

Suponha agora uma alíquota τ sobre a folha. O custo do trabalhador para a firma passa a ser $w(1 + \tau)$. Refaçemos o problema **passo a passo**:

A firma maximiza o lucro com o novo custo:

$$\max_L PF(L) - wL(1 + \tau).$$


CPO:

$$PF'(L) - w(1 + \tau) = 0.$$

Isolando o salário real:

$$\frac{w}{P} = \frac{F'(L)}{1 + \tau}.$$


Interpretação: parte da produtividade marginal é apropriada pelo governo. Para o trabalhador, o salário real cai; para a firma, a demanda por trabalho se desloca para **baixo**. O resultado é menor L^* e menor produto potencial \bar{y} . A conclusão de política é imediata: a **desoneração da folha** (reduzir τ) tende a elevar emprego e produto potencial.

 O modelo no mundo real: a desoneração da folha no Brasil

Entre 2011 e 2014, o governo brasileiro substituiu, em diversos setores, a contribuição patronal sobre a folha (20%) por uma alíquota sobre o faturamento — uma **redução de τ** na linguagem deste modelo. A previsão teórica é clara: deslocar L^d para cima e elevar L^* e \bar{y} . O debate empírico sobre a eficácia da medida gira justamente em torno de **quão sensível** é a demanda por trabalho a τ (a inclinação de L^d) e de como a desoneração foi financiada — exatamente os ingredientes que o diagrama do mercado de trabalho organiza.

2.5.3 Salário mínimo e benefícios

Um **salário mínimo acima do equilíbrio** impede que w/P caia até $(w/P)^*$, gerando desemprego e reduzindo o produto efetivo de longo prazo. **Benefícios** que elevam o salário de reserva (incentivando ficar fora da força de trabalho) deslocam L^s para a esquerda, reduzindo L^* e \bar{y} . Em todos os casos, a lógica é a mesma: o que desloca o equilíbrio do mercado de trabalho desloca o produto potencial.

 Como saber se estamos no produto potencial? A inflação é o termômetro

Como \bar{y} não é observável, usamos a inflação como sinal: **pressão inflacionária** indica produto **acima** do potencial; **desinflação/deflação**, produto **abaixo**. Essa é a ponte para a Regra de Taylor (Capítulo 5): o Banco Central reage ao hiato $y - \bar{y}$ justamente porque ele é inflacionário.

2.6 A identidade do produto e o mercado de fundos emprestáveis

Pela ótica da despesa, numa economia fechada,

$$y = C + I + G.$$

Damos forma às decisões de comportamento, exatamente como no caderno:

- **Consumo:** $C = C(y - T, \rho)$ — crescente na renda disponível $y - T$ e **decrecente** no juro real ρ . Por quê? Porque ρ é o **preço relativo entre consumir hoje e consumir amanhã**: quando ρ sobe, fica mais caro consumir hoje, e as famílias transferem consumo para o futuro, isto é, **poupam** mais.
- **Investimento:** $I = I(\rho)$, **decrecente** no juro real — ρ é o custo de oportunidade de investir; à medida que sobe, menos projetos têm retorno acima dele.
- **Política fiscal:** $G = \bar{G}$ e $T = \bar{T}$ são **variáveis de política** (escolhidas pelo governo), por isso marcadas com barra.

No longo prazo o produto está dado em \bar{y} , e a variável que se ajusta para igualar oferta e demanda no mercado de bens é a **taxa de juros real**. O valor de ρ que equilibra esse mercado é o **juro real neutro** $\bar{\rho}$:

$$\bar{y} = C(\bar{y} - \bar{T}, \rho) + I(\rho) + \bar{G}.$$

2.6.1 Reescrevendo como oferta e demanda de fundos

Vamos transformar essa condição de equilíbrio numa relação entre **poupança** e **investimento** + **déficit**, passo a passo.

Partimos do equilíbrio do mercado de bens no longo prazo:

$$\bar{y} = C(\bar{y} - \bar{T}, \rho) + I(\rho) + \bar{G}.$$

Subtraímos \bar{T} dos dois lados e reorganizamos:

$$\bar{y} - C(\bar{y} - \bar{T}, \rho) - \bar{T} = I(\rho) + (\bar{G} - \bar{T}).$$

O lado esquerdo é a **poupança privada** (renda menos consumo menos impostos), que chamamos de $S_p(\rho)$:

$$S_p(\rho) \equiv \bar{y} - C(\bar{y} - \bar{T}, \rho) - \bar{T}.$$

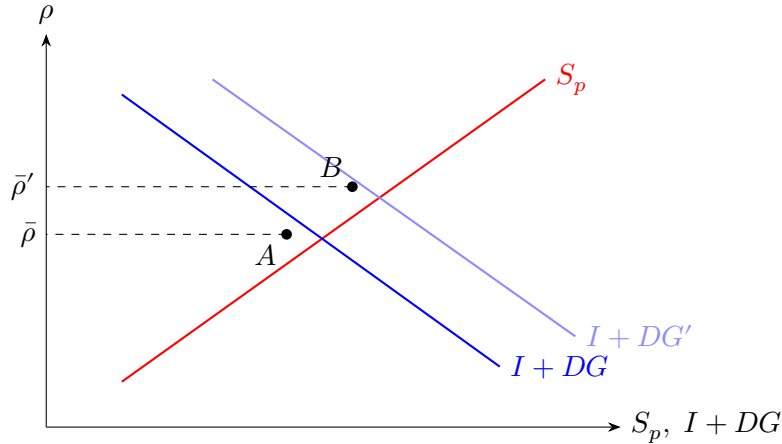
O segundo termo do lado direito é o **déficit público** (gasto menos arrecadação):

$$DG \equiv \bar{G} - \bar{T}.$$

Juntando, obtemos a condição de equilíbrio do **mercado de fundos emprestáveis**:

$$\boxed{S_p(\rho) = I(\rho) + DG.}$$

A leitura é limpa: a **poupança privada** (oferta de fundos, **crescente** em ρ) financia ou o **investimento** privado ($I(\rho)$, **decrecente**) ou o **déficit** do governo (DG).



2.6.2 Estática comparativa: o *crowding out*

Suponha uma **expansão fiscal** permanente: o governo eleva G (ou reduz T), aumentando o déficit DG . Acompanhe o efeito no diagrama:

A curva de demanda por fundos $I + DG$ desloca-se **para a direita** (de A para B), pois $I(\rho)$ não mudou mas somamos um DG maior. Com a poupança limitada, o juro real de equilíbrio **sobe** de $\bar{\rho}$ para $\bar{\rho}'$. Juro mais alto, por sua vez, **reduz o investimento privado** $I(\rho)$: o gasto público “expulsa” (faz *crowding out*) o gasto privado.

No longo prazo o produto não muda — está em \bar{y} , determinado pelo lado da oferta:

$$\bar{y} = \underbrace{C}_{\downarrow} + \underbrace{I}_{\downarrow} + \underbrace{G}_{\uparrow}.$$

i Exemplo 2 — Expansão fiscal e crowding out

Suponha $I(\rho) = I_0 - b\rho$ (com $b > 0$) e poupança privada $S_p(\rho) = s_0 + s_1\rho$ (com $s_1 > 0$). Equilíbrio inicial $S_p = I + DG$:

$$s_0 + s_1\rho = I_0 - b\rho + DG.$$

Isolando o juro neutro:

$$\bar{\rho} = \frac{I_0 + DG - s_0}{s_1 + b}.$$

Diferenciando em relação ao déficit:

$$\frac{d\bar{\rho}}{dDG} = \frac{1}{s_1 + b} > 0.$$

E o efeito sobre o investimento:

$$\frac{dI}{dDG} = -b \frac{d\bar{\rho}}{dDG} = \frac{-b}{s_1 + b} \in (-1, 0).$$

Interpretação: cada real de déficit a mais eleva o juro neutro e reduz o investimento privado em $\frac{b}{s_1 + b}$ reais — *crowding out* **parcial** do investimento, com o restante vindo de mais poupança privada induzida pelo juro mais alto.

O contraste com o curto prazo é o ponto a fixar: aqui, no longo prazo, a expansão fiscal **não** aumenta o PIB (só recompõe sua participação público-privada e eleva o juro). No próximo capítulo veremos que, no **curto prazo**, o mesmo gasto **aumenta** o PIB via multiplicador. Mesma política, efeitos opostos conforme o horizonte — e é a flexibilidade de preços que separa os dois mundos.

💡 Do modelo anterior para este

Este é o ponto de partida do curso; ainda não há “modelo anterior”. O que importa registrar é a **hipótese mestra** — preços flexíveis — e suas duas consequências: (i) o produto é dado pela oferta (\bar{y}); (ii) a moeda é neutra. **Relaxar a flexibilidade de preços** é exatamente o que o próximo capítulo faz para construir o curto prazo, em que a demanda passa a determinar o produto.

2.7 Exercícios comentados

Exercício 1. Com $F(L) = AL^\gamma$ e alíquota τ sobre a folha, mostre que L^* é decrescente em τ e discuta o efeito da desoneração sobre \bar{y} .

Comentário. Da CPO $PA\gamma L^{\gamma-1} = w(1+\tau)$, isole $L^d = \left[\frac{PA\gamma}{w(1+\tau)} \right]^{1/(1-\gamma)}$. Como o expoente $1/(1-\gamma) > 0$ e $(1+\tau)$ está no denominador, L^d cai quando τ sobe. Reduzir τ desloca L^d para cima, eleva L^* e, via $\bar{y} = A(L^*)^\gamma$, eleva o produto potencial.

Exercício 2. Use o diagrama de fundos emprestáveis para mostrar o efeito de um aumento permanente de \bar{G} sobre $\bar{\rho}$, sobre I e sobre a composição do PIB. Por que o produto não muda?

Comentário. $I + DG$ desloca-se à direita; $\bar{\rho}$ sobe; I cai (*crowding out*). O produto permanece em \bar{y} porque, com preços flexíveis, ele é determinado pela oferta (mercado de trabalho + tecnologia), não pela demanda. Muda apenas a composição: mais G , menos C e I .

Exercício 3. Argumente por que uma expansão monetária não afeta \bar{y} no longo prazo. O que ela afeta?

Comentário. \bar{y} vem de $F(L^*)$, que depende de tecnologia e fatores, não de moeda. Uma expansão monetária, com preços flexíveis, eleva proporcionalmente P (e a inflação), deixando as variáveis reais inalteradas — neutralidade da moeda.

Exercício 4. Uma melhora tecnológica aumenta $F'(L)$ para todo L . Mostre, nos diagramas do mercado de trabalho, da função de produção e dos fundos emprestáveis, os efeitos sobre L^* , \bar{y} e $\bar{\rho}$.

Comentário. L^d sobe $\Rightarrow L^* \uparrow$; $F(L)$ sobe $\Rightarrow \bar{y} \uparrow$. No mercado de fundos, maior \bar{y} eleva a poupança privada (desloca S_p à direita), tendendo a **reduzir** $\bar{\rho}$, salvo se a demanda por investimento também subir com a maior produtividade do capital.

3 O Curto Prazo: IS–LM e a Derivação da Curva IS

3.1 Motivação econômica

No longo prazo, preços flexíveis mantêm todos os mercados em equilíbrio e o produto em \bar{y} . Mas a experiência cotidiana é outra: salários são reajustados anualmente, contratos fixam preços por meses, cardápios e tabelas não mudam a cada minuto. Há **rigidez nominal**. A consequência é profunda:

Do modelo anterior para este. Relaxamos a hipótese mestra do Capítulo 1. Com **preços rígidos no curto prazo**, os mercados não se equilibram instantaneamente: pode haver excesso de oferta (recessão) ou de demanda (boom). Agora é a **demanda agregada** que determina o produto — e abre-se espaço para a política de estabilização. Ao conjunto de equações acrescentamos (i) a condição de equilíbrio do mercado de bens com produto endógeno e (ii) o mercado monetário.

Construiremos o curto prazo em três movimentos de complexidade crescente: o **multiplicador** (mercado de bens isolado), a **curva IS** (mercado de bens com juros), e a **curva LM** (mercado monetário). A combinação IS–LM é o primeiro modelo completo de curto prazo.

3.2 O mercado de bens e o multiplicador

A demanda agregada é $DA = C + I + G$. Suponha, por ora, o consumo com uma parte **autônoma** a e uma parte que varia com a renda disponível:

$$C = a + c(y - T), \quad 0 < c < 1,$$

em que c é a **propensão marginal a consumir** (de cada real a mais de renda disponível, a fração c vira consumo). O equilíbrio exige oferta igual a demanda, $y = DA$:

$$y = a + c(y - T) + I + G.$$

Isolando y :

$$y - cy = a + I + G - cT \implies \boxed{y = \frac{1}{1-c} [a + I + G] - \frac{c}{1-c} T.}$$

O produto depende **positivamente** de a , I e G e **negativamente** de T . O fator $\frac{1}{1-c}$ é o **multiplicador dos gastos**.

3.2.1 Por que existe um multiplicador?

Um aumento ΔG eleva diretamente a renda em ΔG . Mas essa renda extra vira consumo na fração c , gerando $c \Delta G$ de nova demanda; que vira renda de outrem, consumida na fração c , gerando $c^2 \Delta G$; e assim por diante. Somando a **progressão geométrica**:

$$\Delta y = \Delta G + c \Delta G + c^2 \Delta G + \dots = \Delta G \sum_{k=0}^{\infty} c^k = \frac{1}{1-c} \Delta G.$$

Como $0 < c < 1$, a série converge e $\frac{1}{1-c} > 1$: o efeito final supera o impulso inicial. O multiplicador é finito, contudo — não basta “gastar mais” para enriquecer indefinidamente, pois cada rodada vaza pela poupança.

i Ferramenta matemática: soma da série geométrica

A soma $\sum_{k=0}^{\infty} c^k = \frac{1}{1-c}$ vale **se e somente se** $|c| < 1$ — exatamente a hipótese econômica $0 < c < 1$ sobre a propensão marginal a consumir. A convergência da progressão geométrica (e o critério $|\text{razão}| < 1$) é tratada no estudo de séries; a função exponencial e seus limites estão no capítulo *Funções Exponenciais* das Notas de Matemática. Economicamente, a razão $c < 1$ é o que garante que o “vazamento” pela poupança em cada rodada torna o multiplicador **finito**.

💡 Exemplo 1 — Multiplicador numérico

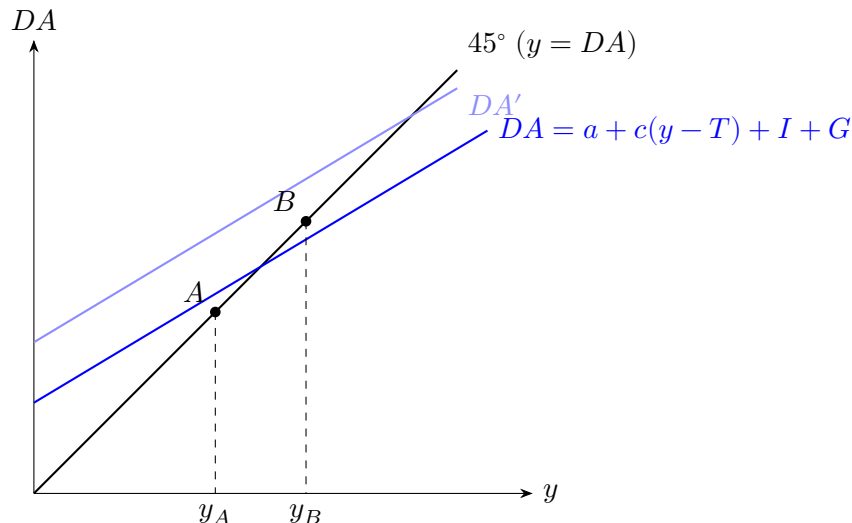
Seja $c = 0,8$. Então o multiplicador é

$$\frac{1}{1-c} = \frac{1}{1-0,8} = 5.$$

Um aumento de gasto de $\Delta G = 20$ bilhões eleva o produto em

$$\Delta y = 5 \times 20 = 100 \text{ bilhões.}$$

As primeiras rodadas do efeito são $20 + 16 + 12,8 + 10,24 + \dots$, somando 100. Se houver imposto proporcional $t = 0,25$, o multiplicador cai para $\frac{1}{1-0,8(1-0,25)} = \frac{1}{0,4} = 2,5$ — metade: o imposto é mais um vazamento.



Um deslocamento da demanda agregada para cima (de DA para DA') move o equilíbrio de A para B , com $\Delta y > \Delta(\text{gasto})$ pelo efeito multiplicador.

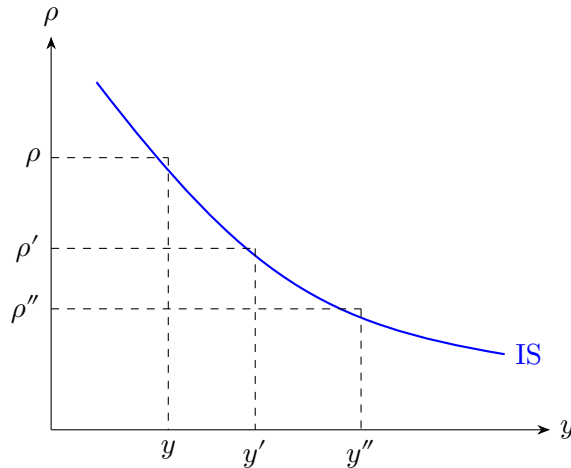
3.3 A curva IS

A demanda também depende do **juro real** ρ , via investimento $I(\rho)$ (e via consumo). Como $I'(\rho) < 0$, um juro menor eleva DA , deslocando a reta para cima e aumentando o produto de

equilíbrio. Varrendo todos os valores de ρ , obtemos uma relação **decrecente** entre juro real e produto:

A **curva IS** é o conjunto de combinações (y, ρ) que equilibram o **mercado de bens** ($y = DA$). É negativamente inclinada: juro real menor \Rightarrow mais investimento e consumo \Rightarrow produto maior.

A IS se desloca **para a direita** quando a demanda autónoma aumenta (mais G , menos T , mais a) e para a esquerda no caso contrário.



3.3.1 Derivação rigorosa da IS: a expansão de Taylor em ação

A versão linear acima é útil para a intuição, mas as relações $C(\cdot)$ e $I(\cdot)$ são genéricas. A derivação rigorosa — a que aparece nas listas — parte da identidade no curto prazo e da identidade no longo prazo e **subtrai uma da outra**, linearizando com Taylor. É o exemplo paradigmático do nosso kit matemático.

Mercado de bens, curto e longo prazo:

$$y = C(y - T, \rho) + I(\rho) + G, \quad \bar{y} = C(\bar{y} - \bar{T}, \rho) + I(\bar{\rho}) + \bar{G}.$$

Subtraindo a segunda da primeira, organizamos tudo em **hiatos**:

$$y - \bar{y} = \underbrace{[C(y - T, \rho) - C(\bar{y} - \bar{T}, \rho)]}_A + \underbrace{[I(\rho) - I(\bar{\rho})]}_B + (G - \bar{G}). \quad (\text{I})$$

Passo 1 — linearizar com Taylor de 1ª ordem. Aproximamos cada função em torno do ponto de longo prazo. Com $C' \equiv \partial C / \partial (y - T) > 0$ e $I' \equiv \partial I / \partial \rho < 0$:

$$A \approx C' [(y - T) - (\bar{y} - \bar{T})] = C' [(y - \bar{y}) - (T - \bar{T})], \quad B \approx I' (\rho - \bar{\rho}).$$

Por que Taylor? Porque transforma diferenças de funções desconhecidas em **múltiplos dos hiatos**, com as derivadas (sensibilidades marginais) como coeficientes — exatamente o que permite isolar $y - \bar{y}$.

i Ferramenta matemática: polinômio de Taylor de 1ª ordem

Do capítulo *Derivadas* das Notas de Matemática, a aproximação linear de f em torno de \bar{x} é

$$f(x) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x - \bar{x}) + \underbrace{R_1(x)}_{\text{resto } O((x-\bar{x})^2)}.$$

Desprezamos o resto R_1 porque trabalhamos com **hiatos pequenos** (x próximo de \bar{x}): perto do equilíbrio de longo prazo, o erro é de segunda ordem. Numa função de duas variáveis, como $C(y - T, \rho)$, usamos a versão com **derivadas parciais** (capítulo *Funções de Várias Variáveis*):

$$C(y - T, \rho) \approx C(\bar{y} - \bar{T}, \bar{\rho}) + C_1[(y - T) - (\bar{y} - \bar{T})] + C_2(\rho - \bar{\rho}),$$

com $C_1 = \partial C / \partial (y - T)$ e $C_2 = \partial C / \partial \rho$. Por simplicidade de exposição mantemos só o canal da renda disponível no termo A ; o canal do juro entra via investimento.

Passo 2 — substituir em (I) e isolar o hiato do produto.

$$\begin{aligned} (y - \bar{y}) &= C'[(y - \bar{y}) - (T - \bar{T})] + I'(\rho - \bar{\rho}) + (G - \bar{G}). \\ (1 - C')(y - \bar{y}) &= -C'(T - \bar{T}) + I'(\rho - \bar{\rho}) + (G - \bar{G}), \\ (y - \bar{y}) &= \frac{-C'}{1 - C'}(T - \bar{T}) + \frac{I'}{1 - C'}(\rho - \bar{\rho}) + \frac{1}{1 - C'}(G - \bar{G}). \end{aligned} \quad (\text{II})$$

Reaparece o multiplicador, agora $\frac{1}{1 - C'}$.

Passo 3 — agrupar imposto e gasto no déficit primário. Defina o **déficit** $f \equiv G - T$ (e $\bar{f} \equiv \bar{G} - \bar{T}$). Some e subtraia $\frac{C'}{1 - C'}(G - \bar{G})$ no termo do imposto:

$$\frac{-C'}{1 - C'}(T - \bar{T}) = \frac{C'}{1 - C'}[(G - T) - (\bar{G} - \bar{T})] - \frac{C'}{1 - C'}(G - \bar{G}) = \frac{C'}{1 - C'}(f - \bar{f}) - \frac{C'}{1 - C'}(G - \bar{G}).$$

Levando a (II), os termos em $(G - \bar{G})$ se combinam:

$$\left[\frac{1}{1 - C'} - \frac{C'}{1 - C'} \right] (G - \bar{G}) = \frac{1 - C'}{1 - C'} (G - \bar{G}) = (G - \bar{G}),$$

de modo que

$$(y - \bar{y}) = \frac{C'}{1 - C'}(f - \bar{f}) + \frac{I'}{1 - C'}(\rho - \bar{\rho}) + (G - \bar{G}). \quad (\text{III})$$

Passo 4 — o truque do log: expressar em % do PIB. Dividimos (III) por \bar{y} e usamos $\frac{y - \bar{y}}{\bar{y}} \approx \ln y - \ln \bar{y}$ (e idem para as demais variáveis), reinterpretando cada termo como **desvio percentual em relação ao potencial**. Chega-se à forma canônica da IS:

$$\boxed{(y - \bar{y}) = -\alpha(\rho - \bar{\rho}) + \beta(f - \bar{f}) + (G - \bar{G})},$$

com

$$\alpha = -\frac{1}{\bar{y}} \frac{I'}{1 - C'} > 0 \quad (\text{pois } I' < 0), \quad \beta = \frac{C'}{1 - C'} > 0.$$

i Ferramenta matemática: diferenciação logarítmica e a aproximação de $\ln(1+x)$

O “truque do log” usa dois fatos do capítulo *Função Logaritmo Natural* das Notas de Matemática:

1. $\ln(1+x) \approx x$ para x pequeno (é a expansão de Taylor de $\ln(1+x)$ em torno de $x=0$).

Daí

$$\frac{y-\bar{y}}{\bar{y}} \approx \ln\left(1 + \frac{y-\bar{y}}{\bar{y}}\right) = \ln \frac{y}{\bar{y}} = \ln y - \ln \bar{y}.$$

2. Em **tempo contínuo**, $\frac{d}{dt} \ln x = \dot{x}/x$ é a **taxa de crescimento** — o que usaremos para reescrever a dinâmica em variações percentuais.

A vantagem é interpretativa: dividir por \bar{y} converte hiatos em **percentuais do PIB potencial**, que é como economistas reportam o hiato do produto (“a economia opera 2% acima do potencial”).

💡 Exemplo 2 — Calculando os coeficientes da IS

Suponha $C' = 0,6$ (propensão a consumir) e que a sensibilidade do investimento ao juro seja $I' = -2$ (em bilhões por ponto de juro real), com $\bar{y} = 100$.

Coefficiente do juro:

$$\alpha = -\frac{1}{\bar{y}} \frac{I'}{1-C'} = -\frac{1}{100} \cdot \frac{-2}{1-0,6} = \frac{2}{100 \cdot 0,4} = 0,05.$$

Coefficiente do déficit:

$$\beta = \frac{C'}{1-C'} = \frac{0,6}{0,4} = 1,5.$$

Logo $(y-\bar{y}) = -0,05(\rho-\bar{\rho}) + 1,5(f-\bar{f}) + (G-\bar{G})$: um aumento de 1 ponto no juro real reduz o hiato em 0,05 (5% do potencial), e um real de déficit acima do normal o eleva em 1,5.

Leitura. O hiato do produto é **positivo** (economia aquecida) quando: (i) o juro real está **abaixo** do neutro, $\rho < \bar{\rho}$; (ii) o déficit está **acima** do normal, $f > \bar{f}$ (política fiscal expansionista); ou (iii) o gasto está acima do usual, $G > \bar{G}$. O sinal de $\rho - \bar{\rho}$ é o que o Banco Central monitora: quanto mais positivo o hiato, mais **contracionista** precisa ser a política monetária. Esta é a IS que usaremos no modelo IS-CP-RPM (Capítulo 4).

3.4 A curva LM e o mercado monetário

Além do mercado de bens, há o **mercado de moeda**. A demanda real por moeda depende positivamente da renda (motivo transação) e **negativamente** do juro **nominal** r (custo de oportunidade de reter moeda em vez de aplicá-la):

$$\frac{M^d}{P} = L(y, r), \quad L_y > 0, L_r < 0.$$

Em equilíbrio, oferta iguala demanda, $M/P = L(y, r)$. Linearizando L (de novo, Taylor) em torno do pleno emprego, escrevemos a demanda real $m \equiv M/P$ como

$$m = \alpha_m y - \beta_m r,$$

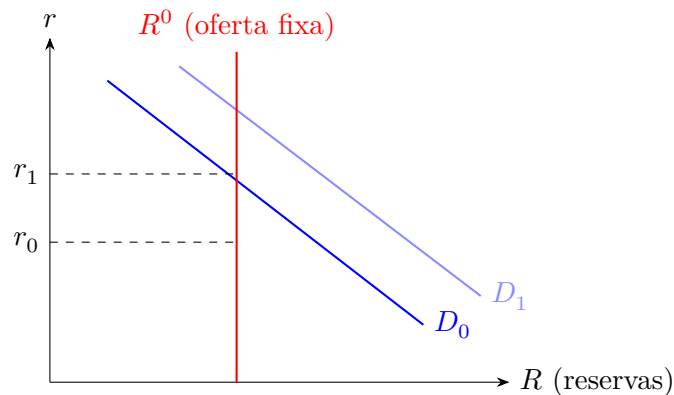
com $\alpha_m, \beta_m > 0$ as sensibilidades à renda e ao juro. No pleno emprego, $\bar{m} = \alpha_m \bar{y} - \beta_m \bar{r}$; subtraindo,

$$\boxed{m - \bar{m} = \alpha_m (y - \bar{y}) - \beta_m (r - \bar{r})} \quad (\text{LM})$$

Para uma dada oferta de moeda, a LM é **crescente** em (y, r) : se a renda sobe, a demanda por moeda sobe e, com oferta fixa, o juro nominal de equilíbrio precisa subir. Uma **expansão monetária** (mais M) desloca a LM para a direita: para cada nível de renda, o juro de equilíbrio é menor.

3.4.1 Por que os Bancos Centrais fixam o juro, e não a moeda

Na prática, o Banco Central administra o **mercado de reservas bancárias**. Se ele fixasse a **quantidade** de moeda, oscilações na demanda por reservas se traduziriam em **forte volatilidade do juro** — um problema, porque incerteza sobre a taxa de juros trava investimento e crédito. Por isso, como argumenta Poole (1970), é preferível fixar a **taxa de juros** (no Brasil, a Selic) e deixar a quantidade de reservas se ajustar endogenamente: quando a taxa tende a subir, o BC compra títulos (injeta liquidez) e a derruba; quando tende a cair, vende títulos.



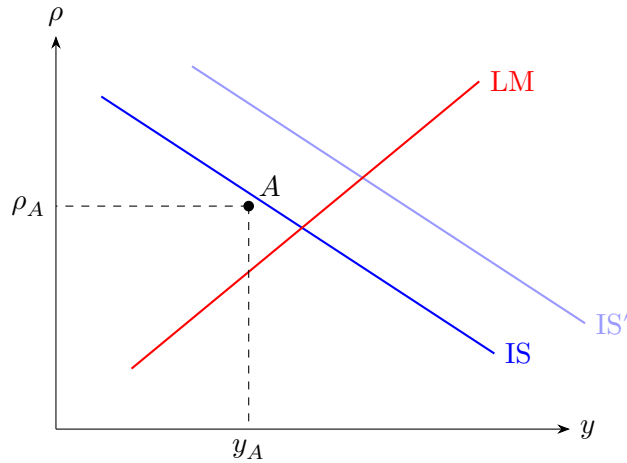
Esse ponto é decisivo: ele justifica **substituir a curva LM por uma regra de juros** — a Regra de Política Monetária (Capítulo 4). Mas, para entender a transição histórica, vejamos primeiro o IS–LM completo.

3.5 Equilíbrio IS–LM e estática comparativa

A IS traz a **política fiscal**; a LM, a **política monetária**. Qualquer cruzamento das duas é um equilíbrio **simultâneo** nos mercados de bens e de moeda. Há uma sutileza de variáveis: a IS é função do juro **real** ρ , a LM do juro **nominal** r , ligados por Fisher,

$$r = \rho + \pi^e,$$

onde π^e é a inflação esperada. Quando $\pi^e = 0$, $r = \rho$ e podemos traçar ambas no mesmo plano (y, ρ) .



- **Política fiscal expansionista** (aumentar G ou reduzir T): a **IS desloca-se para a direita**. No curto prazo, **produto e juro real sobem**. (No longo prazo, lembre o Capítulo 1: o produto volta a \bar{y} e resta apenas o juro mais alto — *crowding out*.)
- **Política monetária expansionista** (aumentar M ou reduzir a taxa): a **LM desloca-se para a direita; produto sobe e juro cai**.
- **Política monetária contracionista** (subir o juro): **LM para a esquerda, com queda do PIB e juro mais alto**.

No longo prazo, como o produto está dado em \bar{y} , a política monetária não o afeta — apenas determina o nível de preços e a inflação. É a neutralidade reaparecendo.

💡 Do modelo anterior para este — síntese e o caminho das listas

Saímos de **uma** equação (\bar{y} dado pela oferta, Capítulo 2) para **duas curvas** (IS e LM) e um produto **endógeno**. O preço dessa riqueza é a hipótese de rigidez nominal.

A próxima camada de complexidade fará duas coisas: (i) trocar a LM pela **Regra de Política Monetária** (regra de Taylor — mais realista e analiticamente mais simples, à la Romer (2000)); e (ii) acrescentar a **Curva de Phillips** para endogenizar a inflação, transformando o modelo estático num sistema **dinâmico** analisado por diagrama de fases.

É exatamente esse o fio das listas de exercícios. O professor usa as listas para *aprofundar, modelo a modelo*, o arcabouço visto em sala: cada lista acrescenta uma equação ou relaxa uma hipótese (IS estática → IS dinâmica; economia fechada → aberta; câmbio fixo → flexível). Sinalizaremos esse encadeamento ao final de cada capítulo na caixa “Do modelo anterior para este”.

3.6 Exercícios

1. Multiplicador com impostos proporcionais. Seja $T = tY$ (imposto proporcional à renda) e $C = a + c(Y - T)$. (a) Mostre que $Y = \frac{a + I + G}{1 - c(1 - t)}$. (b) Compare o multiplicador $\frac{1}{1 - c(1 - t)}$ com o caso de imposto *lump-sum*. Por que o imposto proporcional **reduz** o multiplicador?

2. Derivação da IS (passo a passo). Refaça a derivação via expansão de Taylor partindo de (I), explicitando: (a) onde a hipótese $I' < 0$ entra no sinal de α ; (b) por que o coeficiente de $(G - \bar{G})$

acaba sendo exatamente 1; (c) qual o papel do truque $\frac{y-\bar{y}}{\bar{y}} \approx \ln y - \ln \bar{y}$.

3. IS–LM e composição de políticas. Mostre, no diagrama (y, ρ) , uma combinação de política fiscal expansionista com política monetária contracionista que **mantenha o produto constante** e eleve o juro. Que recomposição do PIB isso gera?

4. Volatilidade de juros (Poole). Explique, usando o mercado de reservas, por que fixar a quantidade de moeda gera volatilidade do juro diante de choques de demanda por moeda, e por que fixar a taxa de juros estabiliza esse mercado. Relacione com a escolha de instrumento de política monetária.

5. Fisher e o plano de fases. Usando $r = \rho + \pi^e$, discuta o que acontece com a posição da LM no plano (y, ρ) quando a inflação esperada π^e aumenta, mantida a oferta de moeda.

4 A Curva de Phillips: da Fixação de Preços às Expectativas

4.1 Motivação econômica

O modelo IS–LM do capítulo anterior determina **quanto** a economia produz dada a taxa de juros — mas é silencioso sobre **como a inflação se forma**. Falta o lado da **oferta**. A peça que o completa é a **Curva de Phillips**, a relação empírica, descoberta por A. W. Phillips em 1958, entre inflação e desemprego: quando o desemprego cai (economia aquecida), a inflação sobe.

💡 Do modelo anterior para este

Acrescentamos uma equação: a **Curva de Phillips**, que endogeniza a inflação. No IS–LM a inflação era pano de fundo; agora ela responde ao **hiato do produto** $y - \bar{y}$. Essa é a equação que, somada à IS e a uma regra de juros, fará o modelo deixar de ser estático e virar **dinâmico** (Capítulo 5). A complexidade nova que compramos é a **dinâmica inflacionária**.

Vamos construí-la em três níveis de profundidade, do microfundamento à forma dinâmica usada nas listas: (i) a relação inflação–desemprego a partir da **fixação de preços com markup**; (ii) a tradução para inflação–produto via **Lei de Okun**; e (iii) a versão em **tempo contínuo** ($\dot{\pi}$), com e sem inércia, derivada por expansão de Taylor.

4.2 O microfundamento: fixação de preços com markup

Por que os preços sobem quando a economia aquece? Porque as firmas têm **poder de mercado** e fixam o preço como uma margem (*markup*) sobre o custo marginal. Vamos derivar isso.

Uma firma com poder de mercado enfrenta uma demanda $P(y)$ e maximiza o lucro:

$$\max_y P(y)y - C(y).$$

A condição de primeira ordem (derivar em y , regra do produto no termo de receita):

$$\frac{\partial P}{\partial y} y + P(y) - C'(y) = 0.$$

Colocando $P(y)$ em evidência e introduzindo a **elasticidade-preço da demanda** $\varepsilon = \frac{\partial y}{\partial P} \frac{P}{y} < 0$:

$$P(y) \left[1 + \frac{1}{\varepsilon} \right] = C'(y).$$

Isolando o preço, obtemos a regra de **markup**:

$$P = (1 + k) C'(y), \quad 1 + k = \frac{|\varepsilon|}{|\varepsilon| - 1}.$$

O preço é o custo marginal multiplicado por uma margem $1 + k$ que depende do poder de mercado (quanto **menos** elástica a demanda, maior o *markup*).

Usando só trabalho na função de produção, $y = F(L)$, o custo marginal é o salário dividido pela produtividade marginal:

$$C'(y) = \frac{w}{F'(L)} = \frac{w}{\text{PmgL}}.$$

Logo, a equação de preços fica:

$$P = (1 + k) \frac{w}{\text{PmgL}}.$$

4.2.1 Do nível à taxa: o truque do log e a derivada temporal

Queremos a **inflação** ($\pi = \dot{P}/P$), não o nível de preços. Aqui aplicamos a ferramenta favorita do curso.

Tomamos o logaritmo da equação de preços (transforma produto em soma):

$$\ln P = \ln(1 + k) + \ln w - \ln(\text{PmgL}).$$

Derivamos em relação ao tempo (cada $\frac{d}{dt} \ln x = \dot{x}/x$ é uma taxa de crescimento):

$$\frac{\dot{P}}{P} = \underbrace{\frac{d}{dt} \ln(1 + k)}_{=0 \text{ (} k \text{ constante)}} + \frac{\dot{w}}{w} - \frac{\dot{\text{PmgL}}}{\text{PmgL}}.$$

Como o *markup* é constante, o primeiro termo zera, e chegamos à inflação como diferença entre crescimento do salário e da produtividade:

$$\boxed{\pi = \frac{\dot{w}}{w} - \frac{\dot{\text{PmgL}}}{\text{PmgL}}.} \quad (\text{A})$$

A inflação sobe quando o salário cresce **acima** do ganho de produtividade.

i Ferramenta matemática: diferenciação logarítmica no tempo

Este é o mesmo truque da Introdução, agora central: para passar de uma relação **multiplicativa** entre níveis ($P = (1 + k) w/\text{PmgL}$) para uma relação **aditiva** entre taxas de crescimento, tome \ln e derive em t . As regras usadas — derivada do \log ($\frac{d}{dt} \ln x = \dot{x}/x$) e derivada de constante (zero) — estão nos capítulos *Função Logaritmo Natural* e *Derivadas* das Notas de Matemática. Note como a hipótese econômica (“*markup* constante”) vira a hipótese matemática (“derivada de constante = 0”).

4.2.2 Reajuste de salários e a Curva de Phillips

Falta modelar como os salários crescem. O reajuste nominal incorpora a **inflação esperada** π^e , repõe a produtividade, e responde ao **desemprego** μ (mercado de trabalho apertado pressiona salários):

$$\frac{\dot{w}}{w} = \pi^e + \frac{\dot{\overline{\text{PmgL}}}}{\overline{\text{PmgL}}} - a(\mu - \mu_N),$$

em que μ_N é o desemprego natural e $a > 0$. Reorganizando:

$$\frac{\dot{w}}{w} - \frac{\dot{\overline{\text{PmgL}}}}{\overline{\text{PmgL}}} = \pi^e - a(\mu - \mu_N). \quad (\text{B})$$

Substituindo (B) em (A), obtemos a **Curva de Phillips**:

$$\pi = \pi^e - a(\mu - \mu_N).$$

A inflação é igual à esperada mais um termo de **hiato de desemprego**: quando $\mu < \mu_N$ (desemprego abaixo do natural, economia aquecida), a inflação supera a esperada.

4.3 Da inflação–desemprego à inflação–produto: a Lei de Okun

As listas trabalham com o **produto**, não o desemprego. A ponte é a **Lei de Okun**, a relação empírica negativa entre hiato do produto e hiato de desemprego:

$$(y - \bar{y}) = -b(\mu - \mu_N), \quad b > 0.$$

Quando o produto está acima do potencial, o desemprego está abaixo do natural. Substituindo na Curva de Phillips:

$$\pi = \pi^e - a \left[-\frac{1}{b}(y - \bar{y}) \right] = \pi^e + \frac{a}{b}(y - \bar{y}).$$

Definindo $\gamma \equiv a/b > 0$ e acrescentando um **choque de oferta** ε (com $E[\varepsilon] = 0$):

$$\pi_t = \pi_t^e + \gamma(y_t - \bar{y}) + \varepsilon_t.$$

Esta é a Curva de Phillips aceleracionista: a inflação tem um componente **inercial** (π^e), um de **demanda** ($\gamma(y - \bar{y})$) e um de **oferta** (ε).

i Sinais dos choques de oferta

Um choque **positivo** de oferta (safra abundante, queda do petróleo) **reduz** a inflação: $\varepsilon < 0$.
Um choque **negativo** (seca, alta do petróleo) a eleva: $\varepsilon > 0$. Como $E[\varepsilon] = 0$, tudo o que é antecipado já entra em π^e ; só o **inesperado** é choque.

4.4 Expectativas: a variável que define a dinâmica

Tudo gira em torno de **como se forma** π^e . Há duas hipóteses, e a diferença entre elas é o coração da política monetária moderna.

4.4.1 Expectativas adaptativas (*backward looking*)

A expectativa é uma correção da expectativa anterior pelo erro de previsão:

$$\pi_t^e = \pi_{t-1}^e + \nu(\pi_{t-1} - \pi_{t-1}^e).$$

No caso $\nu = 1$, $\pi_t^e = \pi_{t-1}$: a expectativa de hoje é a inflação de ontem. As expectativas **olham só para o passado**.

! O modelo no mundo real: a estagflação dos anos 1970

Com expectativas adaptativas, combater a inflação **custa caro**. Para reduzir π , o Banco Central precisa elevar o desemprego acima do natural (recessão), e a inflação só cede **depois**. A razão entre o desemprego extra e a queda de inflação é a **taxa de sacrifício**. Foi a experiência dos EUA nos anos 1970: choques do petróleo (1973, 1979) e expectativas desancoradas geraram **estagflação** — inflação e desemprego altos simultaneamente, algo que a Phillips original (sem π^e) não previa. Manter o desemprego abaixo de μ_N por muito tempo só gera inflação cada vez maior — a **teoria aceleracionista** de Friedman e Phelps.

4.4.2 Expectativas racionais (*forward looking*)

Os agentes usam toda a informação disponível I_t para prever a inflação:

$$\pi_t^e = E[\pi | I_t].$$

A consequência é poderosa: se o Banco Central **anuncia de forma crível** uma desinflação, π^e cai **antes** mesmo da recessão, barateando o custo de desinflar.

! O modelo no mundo real: Volcker, a crítica de Lucas e o tripé brasileiro

Volcker (EUA, 1979–82) elevou fortemente o juro real e, ao manter publicamente o compromisso de derrubar a inflação, ajudou a ancorar π^e — a desinflação foi dura, mas a credibilidade reduziu o custo. É também o pano de fundo da **crítica de Lucas (1976)**: os parâmetros das relações estimadas mudam quando a política muda, porque os agentes reotimizam — não se pode avaliar uma nova política supondo expectativas fixas. No **Brasil**, o “tripé macroeconômico” montado em 1999 (câmbio flexível, metas de inflação e superávit primário) institucionaliza a ancoragem de expectativas; em **2002**, a manutenção do compromisso (Meirelles no BC) ajudou a reancorar expectativas após o susto eleitoral. Bancos centrais “*hawkish*” (intolerantes à inflação) ancoram mais facilmente que “*dovish*”.

4.5 A forma dinâmica: $\dot{\pi}$, inércia e a expansão de Taylor

As listas usam a Curva de Phillips em **tempo contínuo**, escrita como $\dot{\pi} = \delta(y - \bar{y})$. De onde vem esse $\dot{\pi}$? Da combinação da Phillips discreta com uma hipótese sobre π^e , linearizada por **Taylor**. Vamos derivar com cuidado — é mais um exemplo do método.

Partimos da Phillips com $\pi(t) = \pi_t^e + \gamma(y_t - \bar{y})$ e da hipótese **backward looking** $\pi_t^e = \pi(t-h)$ (a expectativa é a inflação de um instante atrás):

$$\pi(t) = \pi(t-h) + \gamma(y_t - \bar{y}).$$

Aproximamos $\pi(t-h)$ por Taylor de 1ª ordem em torno de t :

$$\pi(t-h) \approx \pi(t) + \dot{\pi}(t-h-t) = \pi(t) - h\dot{\pi}.$$

Substituindo:

$$\pi(t) = \pi(t) - h\dot{\pi} + \gamma(y_t - \bar{y}).$$

Cancelando $\pi(t)$ e isolando $\dot{\pi}$ (com $\delta \equiv \gamma/h$):

$$\dot{\pi} = \delta(y_t - \bar{y}) \quad (\text{com inércia, backward looking}).$$

A inflação **não salta**: ela é predeterminada e só varia gradualmente com o hiato. Isto é a **inércia inflacionária**.

Se, em vez disso, a expectativa for **forward looking**, $\pi_t^e = \pi(t+h)$, o mesmo procedimento (agora $\pi(t+h) \approx \pi(t) + h\dot{\pi}$) dá:

$$\dot{\pi} = -\delta(y_t - \bar{y}) \quad (\text{sem inércia, forward looking}).$$

i Ferramenta matemática: Taylor para discretizar/continuar o tempo + EDO

O passo $\pi(t \pm h) \approx \pi(t) \pm h\dot{\pi}$ é a expansão de Taylor de 1ª ordem aplicada ao **tempo** — a mesma do capítulo *Derivadas*. Ela converte uma equação a diferenças (com defasagem h) numa **equação diferencial** (capítulo *Equações Diferenciais Ordinárias* das Notas de Matemática). A integral $\pi(t) = \pi(t-h) + \int_{t-h}^t \delta(y - \bar{y}) dv$ mostra que a inflação corrente é a soma acumulada dos hiatos passados — daí a inércia: para derrubar π , é preciso acumular hiato **negativo** (recessão).

A diferença entre as duas versões é decisiva e antecipa o próximo capítulo: com **inércia**, desinflar custa recessão; **sem inércia** (forward looking), uma desinflação anunciada pode ser indolor. Guardaremos essa distinção ao montar o modelo completo.

4.6 Exercícios comentados

Exercício 1. Derive a Curva de Phillips $\pi = \pi^e - a(\mu - \mu_N)$ a partir da fixação de preços com *markup*, explicitando onde entra a hipótese de *markup* constante.

Comentário. Veja a Seção do microfundamento: a constância de k zera $\frac{d}{dt} \ln(1+k)$ na diferenciação logarítmica, deixando $\pi = \dot{w}/w - (\text{prod.})$; o reajuste salarial fecha em $\pi = \pi^e - a(\mu - \mu_N)$.

Exercício 2. Use a Lei de Okun para passar de $\pi = \pi^e - a(\mu - \mu_N)$ para $\pi = \pi^e + \gamma(y - \bar{y})$. Qual o sinal e o significado de γ ?

Comentário. Com $(y - \bar{y}) = -b(\mu - \mu_N)$, segue $\gamma = a/b > 0$: é a sensibilidade da inflação ao hiato do produto (inclinação da Phillips no plano (y, π)).

Exercício 3. Mostre, por expansão de Taylor, que a hipótese *backward looking* gera $\dot{\pi} = \delta(y - \bar{y})$ e a *forward looking* gera $\dot{\pi} = -\delta(y - \bar{y})$. Interprete a diferença em termos de inércia e custo de desinflação.

Exercício 4 (taxa de sacrifício). Com $\pi_t = \pi_{t-1} + \gamma(y_t - \bar{y})$, suponha que o BC queira reduzir a inflação em 1 ponto. Quanto de hiato acumulado é necessário? Relacione com a taxa de sacrifício e com o papel da credibilidade (expectativas racionais) em reduzi-la.

5 O Modelo IS–CP–RPM e o Diagrama de Fases

5.1 Motivação econômica

Reunimos agora as peças. Temos a **demanda** (curva IS, Capítulo 3) e a **oferta/dinâmica da inflação** (Curva de Phillips, Capítulo 4). Falta a **política monetária**. No Capítulo 3 vimos, com o argumento de Poole (1970), que os Bancos Centrais modernos fixam o **juro**, não a quantidade de moeda. Seguindo Romer (2000), **substituímos a curva LM por uma Regra de Política Monetária (RPM)** — a regra de Taylor.

💡 Do modelo anterior para este — e o papel das listas

Trocamos **uma curva por uma regra**: sai a LM, entra a RPM (regra de Taylor). Combinada à IS e à CP dinâmica ($\dot{\pi} = \delta(y - \bar{y})$), ela produz um **sistema de equações diferenciais** — o modelo deixa de ser estático e passa a ser resolvido por **diagrama de fases**. **Este é o modelo das Listas 1 a 4**. Cada lista o aprofunda: muda o sinal da IS, acrescenta uma regra de política fiscal, torna a IS dinâmica, retira a inércia da Phillips. Trataremos essas variações como uma **escada de complexidade** (três modelos), exatamente como o professor as constrói.

5.2 A Regra de Política Monetária (regra de Taylor)

Todo Banco Central opera com uma regra que diz **como o juro nominal r deve reagir** à inflação e à atividade:

$$r = \bar{\rho} + \pi + \phi(\pi - \bar{\pi}) + \theta(y - \bar{y}), \quad \phi, \theta > 0.$$

O juro nominal depende: do juro neutro $\bar{\rho}$; da inflação corrente π (para preservar o juro real); do desvio da inflação à meta ($\pi - \bar{\pi}$); e do hiato do produto ($y - \bar{y}$).

Como $\rho = r - \pi$, subtraímos π para obter o **juro real**:

$$\rho - \bar{\rho} = \phi(\pi - \bar{\pi}) + \theta(y - \bar{y}).$$

O Banco Central sobe o juro real acima do neutro quando a inflação está acima da meta **ou** o produto acima do potencial — e vice-versa. No longo prazo, $\pi = \bar{\pi}$ e $y = \bar{y}$, de modo que $\rho = \bar{\rho}$ e $r = \bar{\rho} + \bar{\pi}$.

❗ O princípio de Taylor (por que ϕ positivo é crucial)

Reescreva a RPM agrupando a inflação: $r = \bar{\rho} + \bar{\pi} + (1 + \phi)(\pi - \bar{\pi}) + \theta(y - \bar{y})$. O coeficiente sobre a inflação é $(1 + \phi)$: quando a inflação sobe 1 ponto, o juro **nominal** sobe $(1 + \phi)$ pontos — **mais que um por um** —, de modo que o juro **real** sobe. Essa é a condição que estabiliza a inflação (o **princípio de Taylor**). Se $\phi < 0$, o juro real **cai** quando a inflação sobe, desestabilizando a economia. Veremos que o sinal de ϕ decide a estabilidade de todo o sistema. Em termos históricos, presidentes do BC mais tolerantes (“*dovish*”) operam com ϕ menor.

5.3 Primeiro modelo: IS–CP–RPM com inércia

O modelo completo, com a Curva de Phillips **com inércia** (Capítulo 4):

$$\text{IS: } y - \bar{y} = -\alpha(\rho - \bar{\rho}) + \beta(f - \bar{f}) + (G - \bar{G})$$

$$\text{CP: } \dot{\pi} = \delta(y - \bar{y})$$

$$\text{RPM: } r = \bar{\rho} + \pi + \phi(\pi - \bar{\pi}) + \theta(y - \bar{y})$$

$$\text{CI: } \rho(0), \pi(0) \text{ dados}$$

As variáveis **endógenas** são juros, inflação e produto; as **exógenas** (de política fiscal) são gasto e déficit. A inflação π é **predeterminada** (não salta), pela inércia.

5.3.1 Reduzindo a um sistema em (y, π)

A estratégia é substituir a RPM na IS para eliminar o juro e ficar com uma relação entre produto e inflação. Acompanhe passo a passo.

Levamos $(\rho - \bar{\rho}) = \phi(\pi - \bar{\pi}) + \theta(y - \bar{y})$ à IS:

$$y - \bar{y} = -\alpha[\phi(\pi - \bar{\pi}) + \theta(y - \bar{y})] + Z, \quad Z \equiv \beta(f - \bar{f}) + (G - \bar{G}).$$

Agrupamos os termos em $(y - \bar{y})$:

$$(1 + \alpha\theta)(y - \bar{y}) = -\alpha\phi(\pi - \bar{\pi}) + Z.$$

Isolando, obtemos a **curva de demanda agregada** do modelo (relação $y-\pi$):

$$(y - \bar{y}) = \frac{-\alpha\phi}{1 + \alpha\theta}(\pi - \bar{\pi}) + \frac{Z}{1 + \alpha\theta}.$$

Reescrevendo com π no eixo vertical (forma usada no diagrama de fases):

$$\pi = \bar{\pi} - \frac{1 + \alpha\theta}{\alpha\phi}(y - \bar{y}) + \frac{Z}{\alpha\phi}.$$

Para $\phi > 0$, essa curva D é **negativamente inclinada** no plano (y, π) .

O sistema dinâmico é, então:

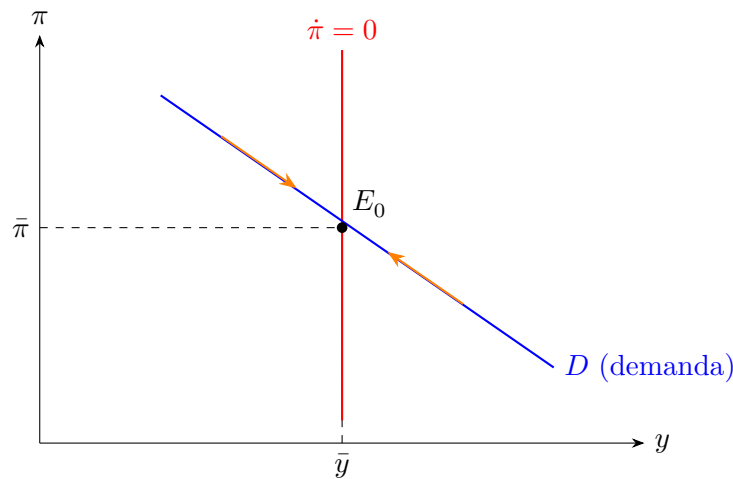
$$\begin{cases} (y - \bar{y}) = \frac{-\alpha\phi}{1 + \alpha\theta}(\pi - \bar{\pi}) + \frac{Z}{1 + \alpha\theta} & \text{(demanda } D) \\ \dot{\pi} = \delta(y - \bar{y}) & \text{(CP)} \end{cases}$$

5.3.2 O diagrama de fases

As isóclinas são duas:

- $\dot{\pi} = 0 \iff y = \bar{y}$: reta **vertical** (a inflação só fica constante quando o produto está no potencial). À direita ($y > \bar{y}$), $\dot{\pi} > 0$; à esquerda, $\dot{\pi} < 0$.
- A curva de demanda D , negativamente inclinada (para $\phi > 0$), por onde a economia sempre está (é a relação contemporânea $y-\pi$).

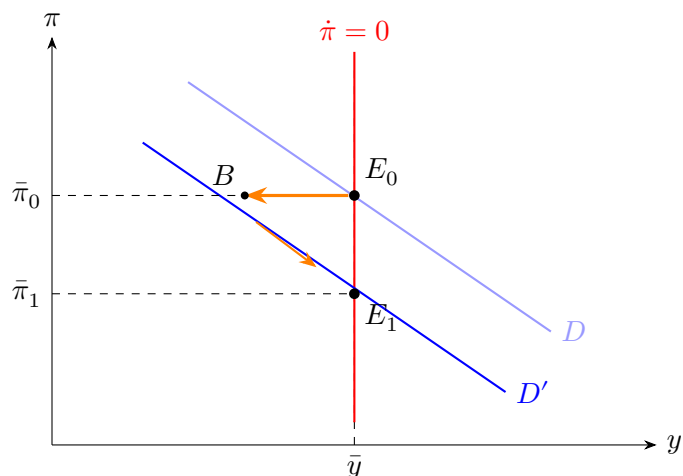
O equilíbrio $E_0 = (\bar{y}, \bar{\pi})$ está na interseção.



Estabilidade. Como π é predeterminada e a economia está sempre sobre D , o movimento é ao longo de D em direção a E_0 : se $y > \bar{y}$, então $\dot{\pi} > 0$, a inflação sobe, o BC sobe o juro real, a demanda cai e o produto retorna a \bar{y} . Para $\phi > 0$ o equilíbrio é **estável** (ponto atrator); para $\phi < 0$, a curva D fica positivamente inclinada e o equilíbrio é **instável** — qualquer desvio de inflação se autoalimenta. **A estabilidade depende inteiramente da reação do BC à inflação (ϕ)** — o princípio de Taylor em ação.

5.3.3 Experimento: redução da meta de inflação

Suponha que o BC reduza a meta de $\bar{\pi}_0$ para $\bar{\pi}_1 < \bar{\pi}_0$. A curva D se desloca para baixo (novo $E_1 = (\bar{y}, \bar{\pi}_1)$). Como a inflação é predeterminada, ela **não salta**: a economia salta horizontalmente para o ponto B sobre a nova curva (recessão imediata — o BC sobe o juro real, $(\rho - \bar{\rho}) = \phi(\bar{\pi}_0 - \bar{\pi}_1) > 0$, o produto cai). Com $y < \bar{y}$, $\dot{\pi} < 0$: a inflação cede gradualmente, o juro real volta a $\bar{\rho}$, e a economia desliza até E_1 .



A desinflação é **custosa** (passa por recessão) — porque há **inércia**. Esse é o conteúdo direto das Listas 3 e 4.

i Regra de política fiscal anticíclica (uma variação das listas)

Algumas listas acrescentam uma **regra fiscal** $(f - \bar{f}) = -\psi(y - \bar{y})$, com $\psi > 0$: o governo reduz o déficit quando o produto está acima do potencial (e vice-versa — pense no seguro-desemprego). Substituindo na IS, a curva de demanda fica $\pi = \bar{\pi} - \frac{1+\alpha\theta+\beta\psi}{\alpha\phi}(y - \bar{y})$: a política fiscal anticíclica torna D **mais inclinada**, reforçando a estabilização. Com $\psi = 0$ recupera-se o modelo sem regra fiscal.

5.4 Segundo modelo: sem inércia (Phillips *forward looking*)

Se a Curva de Phillips for *forward looking*, $\dot{\pi} = -\delta(y - \bar{y})$, a inflação **pode saltar**. O sistema muda de natureza: o que era um equilíbrio estável/instável (nó) torna-se um problema de **sela**, e a desinflação anunciada pode ser **indolor** (a inflação salta direto para a nova meta, sem recessão). É a contrapartida da diferença que destacamos no Capítulo 4: inércia \Rightarrow custo; ausência de inércia \Rightarrow possibilidade de desinflação sem custo.

5.5 Terceiro modelo: o Novo-Keynesiano com IS dinâmica

A última camada de complexidade torna a **própria IS dinâmica**, com microfundamento de escolha intertemporal de consumo (equação de Euler):

$$\begin{aligned} \text{IS dinâmica: } \dot{y} &= \sigma(r - \pi - \bar{\rho}) = \sigma(\rho - \bar{\rho}), & \sigma > 0 \\ \text{CP (forward): } \dot{\pi} &= -\delta(y - \bar{y}) \\ \text{RPM: } r &= \bar{\rho} + \pi + \phi(\pi - \bar{\pi}) + \theta(y - \bar{y}) \end{aligned}$$

A diferença para a IS anterior: lá, $y - \bar{y}$ dependia **do nível** de $\rho - \bar{\rho}$; aqui, é a **variação** \dot{y} que responde ao juro real. A interpretação é intertemporal: se $\rho > \bar{\rho}$, vale a pena poupar hoje e consumir amanhã, então o produto **cresce** ($\dot{y} > 0$).

Substituindo $(\rho - \bar{\rho}) = \phi(\pi - \bar{\pi}) + \theta(y - \bar{y})$, chega-se a um **sistema 2×2** em (y, π) :

$$\begin{cases} \dot{y} = \sigma\phi(\pi - \bar{\pi}) + \sigma\theta(y - \bar{y}) \\ \dot{\pi} = -\delta(y - \bar{y}) \end{cases}$$

5.5.1 A análise por autovalores: Jacobiano, determinante e traço

A estabilidade de um sistema linear $\dot{x} = Jx$ é lida nos **autovalores** de J — equivalentemente, no seu determinante e traço. O Jacobiano aqui é

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} & \frac{\partial \dot{y}}{\partial \pi} \\ \frac{\partial \dot{\pi}}{\partial y} & \frac{\partial \dot{\pi}}{\partial \pi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma\theta & \sigma\phi \\ -\delta & 0 \end{pmatrix},$$

$$\det J = \sigma\phi\delta, \quad \text{tr } J = \sigma\theta.$$

A classificação segue as regras de estabilidade de sistemas 2×2:

$$\begin{aligned} \phi > 0: \quad \det J > 0, \text{ tr } J > 0 &\Rightarrow \text{instável (fonte);} \\ \phi < 0: \quad \det J < 0 &\Rightarrow \text{ponto de sela.} \end{aligned}$$

i Ferramenta matemática: sistemas de EDO, Jacobiano e autovalores

A receita usada aqui está em três capítulos das Notas de Matemática:

- **Funções de Várias Variáveis** — o **Jacobiano** J é a matriz das derivadas parciais do campo vetorial $(\dot{y}, \dot{\pi})$.
- **Álgebra Linear** — os **autovalores** $\lambda_{1,2}$ de J resolvem $\lambda^2 - (\text{tr } J)\lambda + \det J = 0$. Eles governam $e^{\lambda t}$: parte real negativa \Rightarrow converge.
- **Equações Diferenciais Ordinárias** — a tradução para o **diagrama de fases**: $\det J < 0 \Rightarrow$ autovalores reais de sinais opostos \Rightarrow **sela** (uma única trajetória — a variedade estável — leva ao equilíbrio); $\det J > 0$ com $\text{tr } J < 0 \Rightarrow$ **sumidouro estável**; $\det J > 0$ com $\text{tr } J > 0 \Rightarrow$ **fonte instável**. O discriminante $\text{tr}^2 J - 4\det J$ separa nó (monótono) de foco (espiral).

Note a **inversão** em relação ao primeiro modelo: lá, $\phi > 0$ dava estabilidade; aqui, com a IS dinâmica e a CP forward, é $\phi < 0$ que gera a sela cuja variedade estável a economia “escolhe” (a inflação salta para o braço estável). É a mesma análise que aplicamos nas Listas 3, 4, 5 e 6 — em particular, o sinal de $\det J$ determina sela vs. nó, e o de $\text{tr } J$ a estabilidade.

💡 Do modelo anterior para este — a escada completa do Módulo 1

A progressão de complexidade do Módulo 1, modelo a modelo:

1. **IS–LM** (estático) \rightarrow determina demanda;
2. **+ Curva de Phillips** \rightarrow endogeniza inflação;
3. **IS–CP–RPM com inércia** (1º modelo) \rightarrow dinâmica com $\dot{\pi} = \delta(y - \bar{y})$; estabilidade

depende de $\phi > 0$; desinflação custosa;

4. **sem inércia** (2º modelo, CP forward) → inflação salta; sela; desinflação anunciada indolor;
5. **Novo-Keynesiano** (3º modelo) → IS **dinâmica** microfundada; sistema 2×2 ; análise por Jacobiano.

Cada degrau relaxa uma hipótese e ganha um fenômeno. **As Listas 1–4 percorrem exatamente esses degraus**; o Módulo 2 acrescenta a dimensão externa (câmbio), e as Listas 5–6 são a versão aberta deste mesmo modelo.

5.6 Exercícios comentados

Exercício 1 (princípio de Taylor). Mostre que a RPM equivale a $r = \bar{\rho} + \bar{\pi} + (1 + \phi)(\pi - \bar{\pi}) + \theta(y - \bar{y})$ e explique por que $\phi > 0$ garante que o juro real sobe quando a inflação ultrapassa a meta.

Exercício 2 (redução de \bar{y} via choque de oferta). No modelo com inércia, mostre, no diagrama de fases, o efeito de um choque que reduz \bar{y} . O que acontece com a inflação no curto e no longo prazo?

Exercício 3 (Jacobiano). Para o modelo Novo-Keynesiano, calcule $\det J$ e $\text{tr } J$ e classifique o equilíbrio para $\phi > 0$ e $\phi < 0$. Esboce o diagrama de fases em cada caso, indicando a variedade estável quando houver sela.

Exercício 4 (conexão com as listas). Compare o sinal de $\det J$ no modelo com inércia (estabilidade depende de $\phi > 0$) e no Novo-Keynesiano (sela quando $\phi < 0$). Por que a “inércia” muda a natureza do equilíbrio? Relacione com as Listas 3 (sela) e 4 (sumidouro estável).

Monitorias do Módulo 1 — Resoluções das Listas 1 a 4

As monitorias deste módulo são as **resoluções completas das Listas 1 a 4**, que percorrem a evolução de complexidade do modelo IS–CP–RPM: do modelo básico (Lista 1) à IS com regra fiscal (Lista 2), à IS dinâmica de sela (Lista 3) e à IS dinâmica com reversão à média (Lista 4).

6 Monitoria 1 — Lista 1: IS–CP–RPM básico (com e sem inércia)

Resolução completa da Lista 1 (enunciado original em `Lista_1.pdf`; a resolução também é distribuída separadamente como `Lista01_Resolucao`). Esta é a monitoria do módulo: o modelo da lista, resolvido passo a passo.

6.1 Exercício 1

Enunciado. Considere o seguinte modelo:

$$\begin{aligned}\text{IS: } & y - \bar{y} = -\alpha(r - \pi - \bar{\rho}) \\ \text{CP: } & \dot{\pi} = \delta(y - \bar{y}) \\ \text{RPM: } & r = \bar{\rho} + \pi + \phi(\pi - \bar{\pi}) + \theta(y - \bar{y}) \\ \text{CI: } & p(0), \pi(0)\end{aligned}$$

em que y é o produto real, \bar{y} é o produto potencial, \dot{x} é a derivada da variável x com relação ao tempo, dx/dt , ρ é a taxa de juros real, $\bar{\rho}$ é a taxa de juros real de longo prazo, r é a taxa de juros nominal, π é a taxa de inflação, $\bar{\pi}$ é a meta de inflação e α , δ , ϕ e θ são parâmetros positivos.

Observe que a condição inicial inclui $\pi(0)$: a inflação é variável **predeterminada**, isto é, a CP $\dot{\pi} = \delta(y - \bar{y})$ tem **inércia** (cf. caderno, p. 24, derivação da CP com inércia via expansão de Taylor de $\pi_t^e = \pi(t-h)$).

6.1.1 Item 1 — Equilíbrio e dinâmica

Pergunta. Analise o equilíbrio e a dinâmica deste modelo num diagrama de fases, com a taxa de inflação π no eixo vertical e o produto real y no eixo horizontal.

Curva de demanda agregada (DD). Como $\rho = r - \pi$, a RPM dá

$$\rho - \bar{\rho} = \phi(\pi - \bar{\pi}) + \theta(y - \bar{y}).$$

Substituindo na IS, $y - \bar{y} = -\alpha(\rho - \bar{\rho})$, obtemos

$$(1 + \alpha\theta)(y - \bar{y}) = -\alpha\phi(\pi - \bar{\pi}),$$

de modo que

$$\boxed{y - \bar{y} = -\frac{\alpha\phi}{1 + \alpha\theta}(\pi - \bar{\pi})} \iff \pi = \bar{\pi} - \frac{1 + \alpha\theta}{\alpha\phi}(y - \bar{y}).$$

Com $\phi > 0$, a DD é **negativamente inclinada** no plano (y, π) .

Lugar geométrico $\dot{\pi} = 0$. Pela CP, $\dot{\pi} = 0 \iff y = \bar{y}$: reta vertical em \bar{y} .

Equilíbrio de longo prazo. Interseção da DD com $\dot{\pi} = 0$:

$$E^* = (\bar{y}, \bar{\pi}), \quad r^* = \bar{\rho} + \bar{\pi}, \quad \rho^* = \bar{\rho}.$$

Sistema reduzido. Como y é determinado contemporaneamente pela DD, basta uma EDO em π :

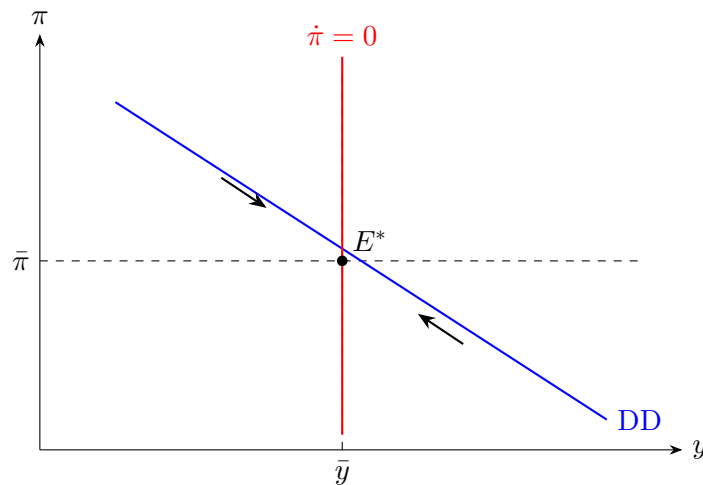
$$\dot{\pi} = \delta(y - \bar{y}) = -\frac{\alpha\phi\delta}{1 + \alpha\theta}(\pi - \bar{\pi}),$$

com autovalor

$$\lambda = -\frac{\alpha\phi\delta}{1 + \alpha\theta} < 0 \quad (\phi > 0).$$

Logo, o equilíbrio é **estável** e π converge **monotonicamente** a $\bar{\pi}$. Como π tem inércia, a economia se move ao longo da DD em direção a E^* (não há salto).

Diagrama de fases.



À direita de $\dot{\pi} = 0$ ($y > \bar{y}$): $\dot{\pi} > 0$; à esquerda: $\dot{\pi} < 0$. Sobre a DD, as trajetórias convergem para E^* (cf. caderno, pp. 26-27).

6.1.2 Item 2 — Redução não antecipada da meta

Pergunta. Mostre o que acontece neste modelo, com o diagrama de fases, quando o Banco Central reduz a meta da taxa de inflação de forma não antecipada.

Suponha que em t_0 o BC anuncia, sem aviso prévio, $\bar{\pi}_0 \rightarrow \bar{\pi}_1 < \bar{\pi}_0$.

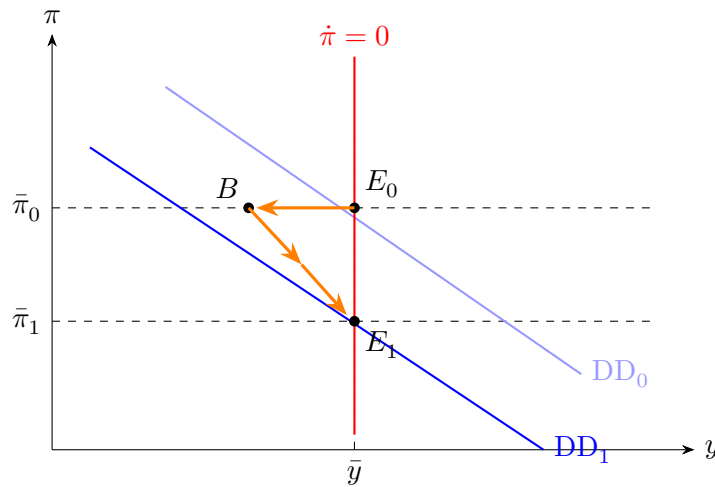
- A reta $\dot{\pi} = 0$ (vertical em \bar{y}) **não se altera**.
- A DD desloca-se **para baixo**: a nova DD passa por $(\bar{y}, \bar{\pi}_1)$ e tem equação $y - \bar{y} = -\frac{\alpha\phi}{1 + \alpha\theta}(\pi - \bar{\pi}_1)$.

Como π é predeterminada (tem inércia), em t_0^+ a inflação permanece em $\pi(t_0) = \bar{\pi}_0$. A economia **se desloca horizontalmente** (sobre $\pi = \bar{\pi}_0$) do $E_0 = (\bar{y}, \bar{\pi}_0)$ para o ponto B sobre a nova DD com mesma inflação:

$$y_B - \bar{y} = -\frac{\alpha\phi}{1 + \alpha\theta}(\bar{\pi}_0 - \bar{\pi}_1) < 0.$$

Há **recessão imediata** ($y_B < \bar{y}$). A intuição via RPM: como $\pi > \bar{\pi}_1$, o BC eleva o juro real ($\rho - \bar{\rho} = \phi(\pi - \bar{\pi}_1) + \theta(y - \bar{y}) > 0$), e a IS implica queda do produto.

A partir de B , com $y < \bar{y}$ a CP dá $\dot{\pi} < 0$: a inflação cai gradualmente. À medida que π cai, o juro real recua e y se recupera. A trajetória se dá ao longo da nova DD até atingir $E_1 = (\bar{y}, \bar{\pi}_1)$.



Conclusão. A desinflação é **custosa** neste modelo: gera recessão transitória ($y < \bar{y}$) ao longo do ajuste. O custo vem da inércia: como π não pode pular, é preciso forçar y para baixo de \bar{y} para que π caia via CP (cf. caderno, pp. 28-29).

6.1.3 Item 3 — Interpretação de $\phi < 0$

Pergunta. Qual a interpretação da regra de política monetária se o parâmetro ϕ for negativo?

Pela RPM, somando e subtraindo π ,

$$r - \pi = \bar{\rho} + \phi(\pi - \bar{\pi}) + \theta(y - \bar{y}) \iff \rho - \bar{\rho} = \phi(\pi - \bar{\pi}) + \theta(y - \bar{y}).$$

Se $\phi < 0$, quando $\pi > \bar{\pi}$ o BC **reduz** o juro real (mantido o hiato): a autoridade monetária responde a desvios da inflação **na direção errada**. Em termos da taxa nominal, reescrevendo a RPM,

$$r = \bar{\rho} + \bar{\pi} + (1 + \phi)(\pi - \bar{\pi}) + \theta(y - \bar{y}),$$

a sensibilidade de r a desvios de π é $(1 + \phi) < 1$: a taxa nominal reage **menos do que proporcionalmente** à inflação — inclusive caindo, se $\phi \leq -1$ — de modo que o juro real cai (cf. caderno, p. 28).

Na dinâmica, o autovalor reduzido passa a ser

$$\lambda = -\frac{\alpha\phi\delta}{1+\alpha\theta} > 0,$$

ou seja, **explosivo**. A DD inverte de inclinação (fica positivamente inclinada): $\pi > \bar{\pi} \Rightarrow \rho < \bar{\rho} \Rightarrow y > \bar{y} \Rightarrow \dot{\pi} > 0$, e a inflação acelera indefinidamente. Com inércia inflacionária e $\phi < 0$, **não há ancoragem da inflação** (cf. caderno, pp. 27 e 31). A estabilidade do modelo exige $\phi > 0$.

6.1.4 Item 4 — Regra de política monetária sem resposta ao hiato

Pergunta. Considere a seguinte regra de política monetária:

$$r = \bar{\rho} + \pi + \phi(\pi - \bar{\pi})$$

Analise o equilíbrio e a dinâmica deste modelo em um diagrama de fases, com a taxa de inflação π no eixo vertical e o produto real y no eixo horizontal.

Esta é a especialização $\theta = 0$ da RPM original. Substituindo na IS:

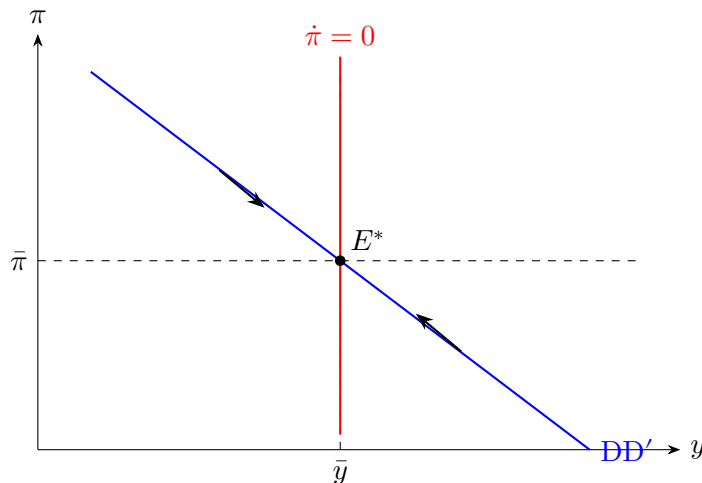
$$\rho - \bar{\rho} = \phi(\pi - \bar{\pi}) \implies y - \bar{y} = -\alpha\phi(\pi - \bar{\pi}) \quad (DD').$$

Equivalentemente, $\pi = \bar{\pi} - \frac{1}{\alpha\phi}(y - \bar{y})$. A DD' é **negativamente inclinada** (para $\phi > 0$) e passa por $E^* = (\bar{y}, \bar{\pi})$. O lugar $\dot{\pi} = 0$ continua sendo a vertical $y = \bar{y}$.

A EDO reduzida fica

$$\dot{\pi} = \delta(y - \bar{y}) = -\alpha\phi\delta(\pi - \bar{\pi}),$$

com autovalor $\lambda' = -\alpha\phi\delta < 0$: equilíbrio **estável**, com convergência monotônica de π a $\bar{\pi}$ ao longo da DD'. A análise de uma redução não antecipada de $\bar{\pi}$ é qualitativamente idêntica à do Item 2: deslocamento horizontal de E_0 para B sobre a nova DD' (recessão imediata), seguido de ajuste ao longo da nova DD' até E_1 .



A estabilidade exige $\phi > 0$; com $\phi < 0$, a análise do Item 3 se aplica (sistema explosivo).

6.1.5 Item 5 — Diferença entre os dois modelos

Pergunta. Explique a diferença entre os dois modelos.

Chame de **modelo 1** o dos Itens 1-3 (RPM com termo de hiato, $\theta > 0$) e **modelo 2** o do Item 4 (RPM sem termo de hiato, $\theta = 0$). Ambos têm o mesmo equilíbrio $(\bar{y}, \bar{\pi})$ e, para $\phi > 0$, são qualitativamente **estáveis**. As diferenças são:

1. **Inclinação da DD.**

$$\left. \frac{\partial \pi}{\partial y} \right|_{DD} = -\frac{1 + \alpha\theta}{\alpha\phi} \quad (\text{modelo 1}) \quad \text{vs.} \quad \left. \frac{\partial \pi}{\partial y} \right|_{DD'} = -\frac{1}{\alpha\phi} \quad (\text{modelo 2}).$$

A DD do modelo 1 é **mais íngreme** (em valor absoluto): a presença de $\theta > 0$ reduz a sensibilidade do hiato a desvios de π , pois o BC já reage ao próprio hiato.

2. **Velocidade de ajuste.**

$$|\lambda| = \frac{\alpha\phi\delta}{1 + \alpha\theta} \quad (\text{modelo 1}) \quad < \quad |\lambda'| = \alpha\phi\delta \quad (\text{modelo 2}).$$

O modelo **com** θ converge mais lentamente: ao também combater o hiato negativo durante a desinflação, o BC modera a queda do produto, o que retarda o ajuste de π via CP.

3. **Profundidade da recessão de transição.** Para a mesma redução $\bar{\pi}_0 - \bar{\pi}_1$, o salto inicial em y no Item 2 vs. modelo do Item 4 é:

$$|y_B - \bar{y}|_{\text{mod. 1}} = \frac{\alpha\phi}{1 + \alpha\theta}(\bar{\pi}_0 - \bar{\pi}_1) \quad < \quad |y_B - \bar{y}|_{\text{mod. 2}} = \alpha\phi(\bar{\pi}_0 - \bar{\pi}_1).$$

A recessão inicial é **menor** no modelo 1 (com $\theta > 0$).

Síntese. No modelo 1, o BC responde também ao hiato e suaviza a recessão de transição, ao custo de uma desinflação mais lenta. No modelo 2 ($\theta = 0$), o BC só responde a π : a recessão inicial é mais profunda, mas a convergência é mais rápida. Há, portanto, um *trade-off* entre profundidade da recessão e velocidade do ajuste: o termo de hiato na regra **suaviza** a queda do produto mas **retarda** o ajuste da inflação.

A álgebra das DDs do modelo 1 está no caderno (pp. 26-27); o modelo do Item 4 é a especialização $\theta = 0$. A comparação formal dos dois autovalores não aparece literalmente, mas a intuição “o BC modera a queda do produto, retardando o ajuste” segue o argumento da p. 28.

6.2 Exercício 2

Enunciado. Considere o seguinte modelo:

$$\begin{aligned} \text{IS:} \quad & y - \bar{y} = -\alpha(r - \pi - \bar{\rho}) \\ \text{CP:} \quad & \dot{\pi} = -\delta(y - \bar{y}) \\ \text{RPM:} \quad & r = \bar{\rho} + \pi + \phi(\pi - \bar{\pi}) + \theta(y - \bar{y}) \\ \text{CI:} \quad & p(0) \end{aligned}$$

em que y é o produto real, \bar{y} é o produto potencial, \dot{x} é a derivada da variável x com relação ao tempo, dx/dt , ρ é a taxa de juros real, $\bar{\rho}$ é a taxa de juros real de longo prazo, r é a taxa de juros nominal, π é a taxa de inflação, $\bar{\pi}$ é a meta de inflação e α , δ , ϕ e θ são parâmetros positivos.

Em relação ao Exercício 1, há **duas** diferenças no enunciado:

- (i) o sinal de δ na CP é trocado ($-\delta$ em vez de $+\delta$); e
- (ii) a CI inclui apenas $p(0)$, **não** inclui $\pi(0)$.

Esses dois fatos juntos caracterizam a CP **sem inércia**: $\pi(0)$ não é dado pelo passado, de modo que π é uma variável **de salto**. O nível de preços continua predeterminado ($p(0)$ dado), mas a taxa $\pi = \dot{p}/p$ pode saltar. A derivação do sinal trocado de δ , via expansão de Taylor de $\pi_t^e = \pi(t+h)$ (expectativa olhando para frente), está no caderno (p. 25).

6.2.1 Item 1 — Equilíbrio e dinâmica

Pergunta. Analise o equilíbrio e a dinâmica deste modelo num diagrama de fases, com a taxa de inflação π no eixo vertical e o produto real y no eixo horizontal.

A derivação da DD depende apenas da IS e da RPM — é **idêntica** à do Exercício 1:

$$\boxed{y - \bar{y} = -\frac{\alpha\phi}{1 + \alpha\theta}(\pi - \bar{\pi})} \quad (\text{DD, negativamente inclinada para } \phi > 0).$$

O lugar $\dot{\pi} = 0$ é, de novo, a vertical $y = \bar{y}$, e o equilíbrio é $E^* = (\bar{y}, \bar{\pi})$.

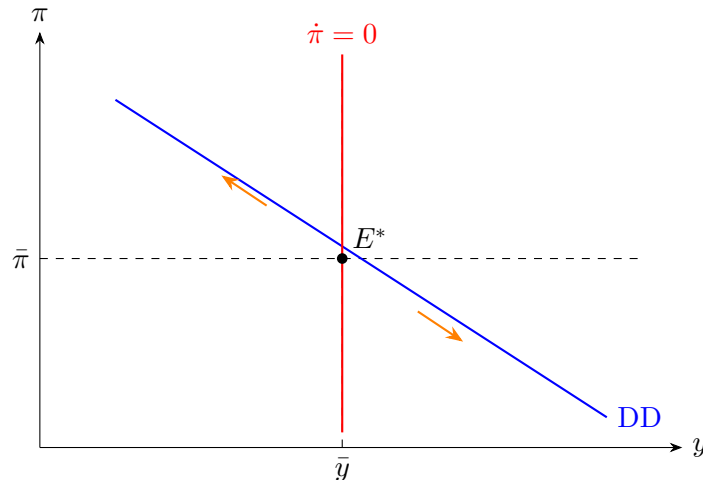
A diferença está na **dinâmica de π** . Substituindo a DD na CP:

$$\dot{\pi} = -\delta(y - \bar{y}) = +\frac{\alpha\phi\delta}{1 + \alpha\theta}(\pi - \bar{\pi}),$$

com autovalor

$$\lambda = +\frac{\alpha\phi\delta}{1 + \alpha\theta} > 0.$$

Dinâmica explosiva em torno de E^* : sobre a DD, à direita de $\dot{\pi} = 0$ ($y > \bar{y}$) tem-se $\dot{\pi} < 0$; à esquerda, $\dot{\pi} > 0$, e as trajetórias se afastam do equilíbrio.



Como π é variável de salto e a dinâmica é instável, a **única trajetória que não diverge** é o próprio ponto fixo:

$$\pi(t) = \bar{\pi} \quad \text{e} \quad y(t) = \bar{y} \quad \forall t.$$

Em qualquer instante, π pula imediatamente para a meta e y permanece em \bar{y} (cf. caderno, p. 33, “2º modelo — IS-RPM-CP sem inércia”).

6.2.2 Item 2 — Redução não antecipada da meta

Pergunta. Mostre o que acontece neste modelo, com o diagrama de fases, quando o Banco Central reduz a meta da taxa de inflação de forma não antecipada.

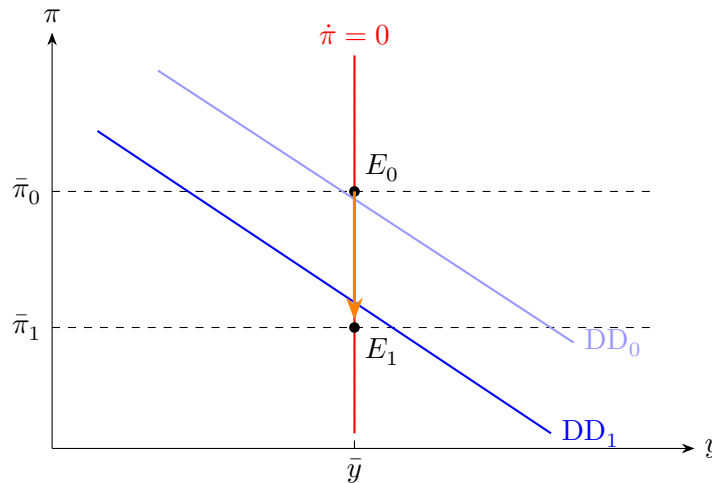
No instante t_0 , sem aviso prévio, $\bar{\pi}_0 \rightarrow \bar{\pi}_1 < \bar{\pi}_0$.

- A reta $\dot{\pi} = 0$ (vertical em \bar{y}) **não se desloca**.
- A DD desloca-se para baixo: nova DD passa por $(\bar{y}, \bar{\pi}_1)$.
- O novo equilíbrio é $E_1 = (\bar{y}, \bar{\pi}_1)$.

Como π é variável **de salto** (sem inércia) e o sistema é **explosivo** em torno do novo E_1 , a única trajetória que não diverge é o salto direto para o novo equilíbrio:

$$\pi(t_0^+) = \bar{\pi}_1, \quad y(t_0^+) = \bar{y}.$$

A inflação **salta verticalmente** de $\bar{\pi}_0$ para $\bar{\pi}_1$ no plano (y, π) (mesmo $y = \bar{y}$, π varia), e o produto permanece em \bar{y} . **Não há recessão**: a desinflação é **sem custo**.



Contraste com o Ex. 1. As duas diferenças entre os enunciados — o **sinal de δ na CP** e a ausência de $\pi(0)$ na CI — refletem uma única hipótese econômica: presença ou ausência de inércia inflacionária. Com inércia (Ex. 1), $\pi(0)$ é dado e π não pode pular; a desinflação exige recessão transitória ($y_B < \bar{y}$) e ajuste gradual. Sem inércia (Ex. 2), π pula livremente e o produto permanece em \bar{y} ; a desinflação é instantânea e indolor. A análise da redução não antecipada da meta no caso sem inércia segue diretamente o caderno (p. 33).

7 Monitoria 2 — Lista 2: IS–CP–RPM com regra fiscal e estimativa do juro neutro

Resolução completa da Lista 2 (enunciado original em *Lista_2.pdf*; a resolução também é distribuída separadamente como *Lista02_Resolucao*). Esta é a monitoria do módulo: o modelo da lista, resolvido passo a passo.

7.1 Exercício 1

Enunciado. Considere o seguinte modelo:

$$\begin{aligned}\text{IS: } & y - \bar{y} = -\alpha(r - \pi - \bar{\rho}) + \beta(f - \bar{f}) + (g - \bar{g}) \\ \text{CP: } & \dot{\pi} = \delta(y - \bar{y}) \\ \text{RPM: } & r = \bar{\rho} + \pi + \phi(\pi - \bar{\pi}) + \theta(y - \bar{y}) \\ \text{CI: } & p(0), \pi(0) \\ \text{RPF 1: } & (f - \bar{f}) = -\varphi_1(y - \bar{y}) \\ \text{RPF 2: } & (g - \bar{g}) = -\varphi_2(y - \bar{y})\end{aligned}$$

em que y é o produto real, \bar{y} é o produto potencial, \dot{x} é a derivada da variável x com relação ao tempo, dx/dt , ρ é a taxa de juros real, $\bar{\rho}$ é a taxa de juros real de longo prazo, r é a taxa de juros nominal, π é a taxa de inflação, $\bar{\pi}$ é a meta de inflação e α , β , δ , ϕ e θ são parâmetros positivos. Além disso, f é o déficit público, \bar{f} é o déficit público de pleno emprego, g é o gasto do governo, \bar{g} é o gasto do governo de pleno emprego e os parâmetros das regras de políticas fiscais são positivos ($\varphi_1, \varphi_2 > 0$).

A estrutura agregada com $Z = \beta(f - \bar{f}) + (g - \bar{g})$ na IS está em Barbosa (2017) e no caderno (p. 26). Como a CI inclui $\pi(0)$, a inflação é variável **predeterminada** (CP com inércia).

7.1.1 Item 1 — Interpretação das regras

Pergunta. Como você interpreta as regras de política monetária e de política fiscal?

Regra de Política Monetária (RPM). Reescrevendo em termos da taxa de juros real $\rho = r - \pi$:

$$\rho - \bar{\rho} = \phi(\pi - \bar{\pi}) + \theta(y - \bar{y}).$$

A RPM é uma **regra de Taylor**: o BC eleva o juro real quando (i) a inflação supera a meta ($\phi > 0$ é o **princípio de Taylor**) e/ou (ii) o produto está acima do potencial ($\theta > 0$, *output gap targeting*). Os dois canais agem como estabilizadores: choques inflacionários e de demanda são contrabalanceados por aperto monetário.

Regra de Política Fiscal 1 (RPF 1) — déficit.

$$f - \bar{f} = -\varphi_1(y - \bar{y}), \quad \varphi_1 > 0.$$

O déficit público se desvia do *déficit estrutural* (\bar{f} , déficit de pleno emprego) na **direção contracíclica**: quando a economia está aquecida ($y > \bar{y}$), o déficit observado fica **abaixo** do estrutural (governo

poupa); na recessão ($y < \bar{y}$), o déficit fica **acima** do estrutural (governo se endivida). É uma regra de **estabilização automática** sobre o resultado fiscal — equivalente, em espírito, a uma **regra de superávit estrutural** (modelo brasileiro pós-2000, com a Lei de Responsabilidade Fiscal) ou aos *automatic stabilizers* via tributação cíclica.

Regra de Política Fiscal 2 (RPF 2) — gasto.

$$g - \bar{g} = -\varphi_2(y - \bar{y}), \quad \varphi_2 > 0.$$

O gasto do governo é contracíclico: contrai-se em booms e expande-se em recessões. É a versão fiscal de uma “regra de Taylor” do lado do gasto. Note que ambas RPF reagem ao mesmo hiato de produto, então funcionam como **complementos** ao termo $\theta(y - \bar{y})$ da RPM no que diz respeito à estabilização do produto.

7.1.2 Item 2 — Equilíbrio e dinâmica

Pergunta. Analise o equilíbrio e a dinâmica deste modelo num diagrama de fases, com a taxa de inflação π no eixo vertical e o produto real y no eixo horizontal.

Curva de demanda agregada (DD). Substituindo as RPF na IS:

$$y - \bar{y} = -\alpha(\rho - \bar{\rho}) + \beta[-\varphi_1(y - \bar{y})] + [-\varphi_2(y - \bar{y})],$$

ou seja,

$$[1 + \beta\varphi_1 + \varphi_2](y - \bar{y}) = -\alpha(\rho - \bar{\rho}).$$

Pela RPM, $\rho - \bar{\rho} = \phi(\pi - \bar{\pi}) + \theta(y - \bar{y})$. Substituindo:

$$\begin{aligned} [1 + \beta\varphi_1 + \varphi_2](y - \bar{y}) &= -\alpha[\phi(\pi - \bar{\pi}) + \theta(y - \bar{y})], \\ \underbrace{[1 + \beta\varphi_1 + \varphi_2 + \alpha\theta]}_{\equiv \Omega > 0}(y - \bar{y}) &= -\alpha\phi(\pi - \bar{\pi}). \end{aligned}$$

Definindo $\Omega \equiv 1 + \beta\varphi_1 + \varphi_2 + \alpha\theta$, obtém-se a **DD**:

$$\boxed{y - \bar{y} = -\frac{\alpha\phi}{\Omega}(\pi - \bar{\pi})} \quad \Leftrightarrow \quad \pi = \bar{\pi} - \frac{\Omega}{\alpha\phi}(y - \bar{y}).$$

Com $\phi > 0$, a DD é **negativamente inclinada** no plano (y, π) . Note que $\Omega > 1 + \alpha\theta$: as regras fiscais tornam a DD **mais íngreme** que no modelo da Lista 1 (a estabilização fiscal “amortece” a resposta do produto a desvios da inflação).

Lugar geométrico $\dot{\pi} = 0$. Pela CP, $\dot{\pi} = 0 \Leftrightarrow y = \bar{y}$, vertical em \bar{y} .

Equilíbrio de longo prazo. $E^* = (\bar{y}, \bar{\pi})$, com $\rho^* = \bar{\rho}$, $f = \bar{f}$, $g = \bar{g}$.

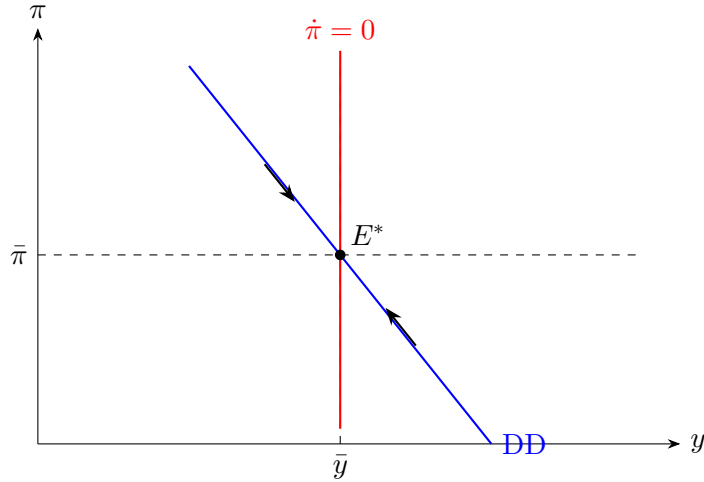
Sistema dinâmico reduzido. Como y é determinado pela DD,

$$\dot{\pi} = \delta(y - \bar{y}) = -\frac{\alpha\phi\delta}{\Omega}(\pi - \bar{\pi}),$$

com autovalor

$$\lambda = -\frac{\alpha\phi\delta}{\Omega} < 0 \quad (\phi > 0).$$

O equilíbrio é **estável** (atrator). A presença das regras fiscais **diminui** a velocidade de convergência ($|\lambda|$ é menor que no modelo sem RPF), porque as RPF amortecem a queda do produto na desinflação — o ajuste da inflação via CP, que depende do hiato, fica mais lento (cf. caderno, pp. 26 e 31).



7.1.3 Item 3 — Redução não antecipada da meta

Pergunta. Mostre o que acontece neste modelo, com o diagrama de fases, quando o Banco Central reduz a meta da taxa de inflação de forma não antecipada.

No instante t_0 , $\bar{\pi}_0 \rightarrow \bar{\pi}_1 < \bar{\pi}_0$ sem aviso prévio.

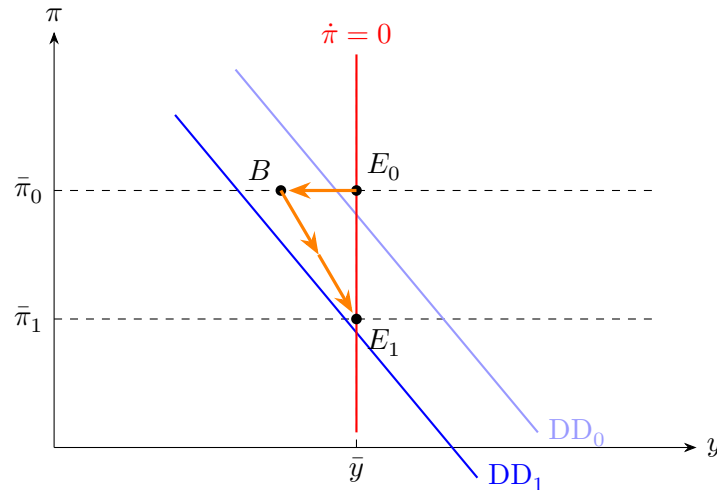
- $\dot{\pi} = 0$ (vertical em \bar{y}) **não se altera**.
- A DD desloca-se para baixo: nova DD $y - \bar{y} = -\frac{\alpha\phi}{\Omega}(\pi - \bar{\pi}_1)$, passa por $(\bar{y}, \bar{\pi}_1)$.

Como a CP tem **inércia** (CI inclui $\pi(0)$), a inflação **não pula**. Em t_0^+ , $\pi = \bar{\pi}_0$ e a economia **se desloca horizontalmente** (sobre $\pi = \bar{\pi}_0$) de $E_0 = (\bar{y}, \bar{\pi}_0)$ até o ponto B sobre a nova DD:

$$y_B - \bar{y} = -\frac{\alpha\phi}{\Omega}(\bar{\pi}_0 - \bar{\pi}_1) < 0.$$

Recessão imediata, mas **menor** que no modelo da Lista 1: como $\Omega > 1 + \alpha\theta$, $|y_B - \bar{y}|$ é menor para a mesma magnitude de redução de $\bar{\pi}$. As regras fiscais entram em ação: com $y_B < \bar{y}$, $f - \bar{f} > 0$ (déficit acima do estrutural) e $g - \bar{g} > 0$ (gasto acima do estrutural) — política fiscal **expansionista contracíclica** que amortece a queda do produto.

A partir de B , $y < \bar{y}$ implica $\dot{\pi} < 0$. A inflação cai gradualmente; à medida que cai, o juro real recua e y se recupera ao longo da nova DD até $E_1 = (\bar{y}, \bar{\pi}_1)$.



Conclusão. A desinflação continua **custosa**, mas o sacrifício de produto é **menor** do que num modelo apenas com regra monetária: a política fiscal contracíclica complementa a estabilização. Por outro lado, a convergência de π para $\bar{\pi}_1$ é **mais lenta**, justamente porque o hiato é menor a cada instante (cf. caderno, pp. 28-29).

7.1.4 Item 4 — Caso $\phi < 0$

Pergunta. O que acontece neste modelo se o parâmetro ϕ for negativo?

A taxa de juros real, pela RPM, satisfaz

$$\rho - \bar{\rho} = \phi(\pi - \bar{\pi}) + \theta(y - \bar{y}).$$

Se $\phi < 0$, o BC reduz o juro real quando $\pi > \bar{\pi}$ — viola o **princípio de Taylor**.

O autovalor do sistema reduzido fica

$$\lambda = -\frac{\alpha\phi\delta}{\Omega} > 0,$$

sempre positivo, pois $\Omega > 0$. Ou seja, **as regras fiscais não conseguem salvar o sistema da instabilidade gerada por uma política monetária acomodatória**. A intuição é direta: as RPF reagem ao hiato $y - \bar{y}$ (mesma variável a que θ responde), portanto contribuem para amortecer flutuações **do produto**, mas não fornecem ancoragem da **inflação**. A âncora nominal vem necessariamente de $\phi > 0$ na RPM.

Na DD, $\phi < 0$ inverte a inclinação: ela passa a ser **positivamente inclinada**. Combinada com a CP $\dot{\pi} = \delta(y - \bar{y})$, qualquer desvio inicial $\pi(0) \neq \bar{\pi}$ se amplifica: $\pi > \bar{\pi} \Rightarrow \rho < \bar{\rho} \Rightarrow y > \bar{y} \Rightarrow \dot{\pi} > 0 \Rightarrow$ inflação acelera. **Modelo divergente**. A presença das RPF apenas **reduz a velocidade de divergência** (via aumento de Ω), sem alterar o sinal de λ (cf. caderno, pp. 27 e 31).

7.2 Exercício 2

Enunciado. Considere o seguinte modelo:

$$\begin{aligned} \text{IS: } & y - \bar{y} = -\alpha(r - \pi - \bar{\rho}) \\ \text{CP: } & \dot{\pi} = \delta(y - \bar{y}) \\ \text{RPM: } & r = \bar{\rho}^{BC} + \pi + \phi(\pi - \bar{\pi}) + \theta(y - \bar{y}) \\ \text{CI: } & p(0), \pi(0) \end{aligned}$$

em que y é o produto real, \bar{y} é o produto potencial, \dot{x} é a derivada da variável x com relação ao tempo, dx/dt , ρ é a taxa de juros real, $\bar{\rho}$ é a taxa de juros real de longo prazo, r é a taxa de juros nominal, π é a taxa de inflação, $\bar{\pi}$ é a meta de inflação e α , δ , ϕ e θ são parâmetros positivos.

A diferença em relação ao Exercício 1 (e ao modelo da Lista 1) é que, na RPM, o BC utiliza uma **estimativa** $\bar{\rho}^{BC}$ da taxa de juros real de equilíbrio — estimativa esta que pode diferir do valor verdadeiro $\bar{\rho}$ que aparece na IS.

7.2.1 Item 1 — Consequências de $\bar{\rho} \neq \bar{\rho}^{BC}$

Pergunta. Quais as consequências, tanto no curto como no longo prazo, de $\bar{\rho} \neq \bar{\rho}^{BC}$?

Curva de demanda. A taxa de juros real é $\rho = r - \pi$. Pela RPM:

$$\rho = \bar{\rho}^{BC} + \phi(\pi - \bar{\pi}) + \theta(y - \bar{y}) \implies \rho - \bar{\rho} = (\bar{\rho}^{BC} - \bar{\rho}) + \phi(\pi - \bar{\pi}) + \theta(y - \bar{y}).$$

Substituindo na IS $y - \bar{y} = -\alpha(\rho - \bar{\rho})$:

$$y - \bar{y} = -\alpha(\bar{\rho}^{BC} - \bar{\rho}) - \alpha\phi(\pi - \bar{\pi}) - \alpha\theta(y - \bar{y}),$$

$$\boxed{y - \bar{y} = -\frac{\alpha}{1 + \alpha\theta}(\bar{\rho}^{BC} - \bar{\rho}) - \frac{\alpha\phi}{1 + \alpha\theta}(\pi - \bar{\pi}).}$$

A DD é igual à da Lista 1 acrescida de um **deslocamento horizontal** de magnitude $-\frac{\alpha}{1 + \alpha\theta}(\bar{\rho}^{BC} - \bar{\rho})$. O lugar $\dot{\pi} = 0$ continua sendo a vertical $y = \bar{y}$.

Equilíbrio de longo prazo. Em $\dot{\pi} = 0$, $y = \bar{y}$. Da DD com $y = \bar{y}$:

$$0 = -\frac{\alpha}{1 + \alpha\theta}(\bar{\rho}^{BC} - \bar{\rho}) - \frac{\alpha\phi}{1 + \alpha\theta}(\pi^* - \bar{\pi}),$$

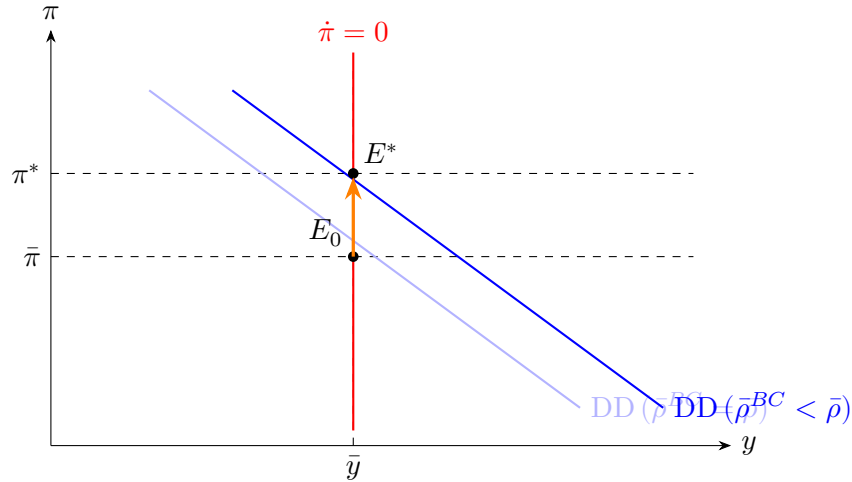
$$\boxed{\pi^* = \bar{\pi} + \frac{\bar{\rho} - \bar{\rho}^{BC}}{\phi}.}$$

E, como $y^* = \bar{y}$, da RPM segue $r^* = \bar{\rho}^{BC} + \pi^* + \phi(\pi^* - \bar{\pi}) = \bar{\rho} + \pi^*$, i.e., $\rho^* = \bar{\rho}$ (a taxa de juros real verdadeira efetivamente realizada é a “natural”, como tem que ser quando $y = \bar{y}$).

Curto prazo. A dinâmica reduzida é

$$\dot{\pi} = \delta(y - \bar{y}) = -\frac{\alpha\delta}{1 + \alpha\theta}(\bar{\rho}^{BC} - \bar{\rho}) - \frac{\alpha\phi\delta}{1 + \alpha\theta}(\pi - \bar{\pi}),$$

com autovalor $\lambda = -\frac{\alpha\phi\delta}{1 + \alpha\theta} < 0$ ($\phi > 0$). O sistema **converge** monotonicamente, mas não para $(\bar{y}, \bar{\pi})$ — e sim para (\bar{y}, π^*) , com $\pi^* \neq \bar{\pi}$ sempre que $\bar{\rho}^{BC} \neq \bar{\rho}$. A inflação observada **converge**, mas para um valor diferente da meta anunciada.



Resumo.

| Horizonte | y | π | ρ |
|-------------|-----------------------|---|-----------------------|
| Curto prazo | dinâmica de transição | dinâmica de transição | varia |
| Longo prazo | $y^* = \bar{y}$ | $\pi^* = \bar{\pi} + \frac{\bar{\rho} - \bar{\rho}^{BC}}{\phi}$ | $\rho^* = \bar{\rho}$ |

A dinâmica do produto continua perfeitamente ancorada em \bar{y} no longo prazo (o coeficiente θ é inelutável). O preço a pagar pelo erro de medida do BC aparece **inteiramente na inflação**: o desvio sistemático de π em relação à meta é proporcional a $\bar{\rho} - \bar{\rho}^{BC}$ e inversamente proporcional à reação ϕ do BC (cf. caderno, p. 30).

7.2.2 Item 2 — Cenários $\bar{\rho} \leq \bar{\rho}^{BC}$

Pergunta. Como você interpretaria o cenário em que $\bar{\rho} \leq \bar{\rho}^{BC}$? E o caso em que $\bar{\rho} \geq \bar{\rho}^{BC}$?

7.2.2.1 Caso $\bar{\rho} \leq \bar{\rho}^{BC}$ (BC superestima a taxa natural)

Como $\bar{\rho}^{BC} > \bar{\rho}$, da expressão acima: $\pi^* < \bar{\pi}$.

Interpretação. O BC acredita que a taxa neutra é mais alta do que de fato é (por exemplo, falha em reconhecer um declínio secular da produtividade ou da taxa de juros de equilíbrio — *secular stagnation*). A RPM passa a fixar uma taxa nominal $r = \bar{\rho}^{BC} + \pi + \dots$ **mais alta** do que a apropriada para atingir $\bar{\pi}$ no longo prazo. O resultado é uma economia **sistematicamente apertada**: a inflação observada flutua em torno de um valor **abaixo da meta** e o BC, para fazer π subir até $\bar{\pi}$, teria que cortar mais juros do que sua regra prescreve. É a leitura típica do diagnóstico do BCE/BoJ pós-2008: o erro de medida do $\bar{\rho}$ contribuiu para inflação cronicamente abaixo da meta.

7.2.2.2 Caso $\bar{\rho} \geq \bar{\rho}^{BC}$ (BC subestima a taxa natural)

Agora $\bar{\rho}^{BC} < \bar{\rho}$, e $\pi^* > \bar{\pi}$.

Interpretação. O BC acredita que a taxa neutra é mais baixa do que a verdadeira (por exemplo, não percebe um aumento da taxa neutra causado por choque permanente de produtividade, expansão fiscal estrutural ou inflação importada de longo prazo). A política monetária resultante é **frouxa**: $r = \bar{\rho}^{BC} + \pi + \dots$ é menor do que o necessário para entregar $\bar{\pi}$. A inflação observada se acomoda **acima da meta** sistematicamente. Esta é uma narrativa frequente para a **Grande Inflação** dos anos 1970 nos EUA: o Fed subestimou a alta da taxa neutra de equilíbrio (e/ou superestimou o produto potencial), o que gerou política excessivamente expansionista e inflação cronicamente alta.

Mensagem geral. Quando o BC erra na estimativa do $\bar{\rho}$, sua regra de Taylor introduz um **viés permanente** no nível de inflação — mesmo com $\phi > 0$ e o princípio de Taylor satisfeito. O hiato de produto fecha no longo prazo, mas a inflação não converge para a meta anunciada: converge para um nível enviesado pelo erro de percepção. Isso ressalta a importância empírica de medidas confiáveis de $\bar{\rho}$ (ou, alternativamente, de regras de política que não dependam de $\bar{\rho}^{BC}$, na forma de *difference rules*).

8 Monitoria 3 — Lista 3: IS dinâmica (Novo-Keynesiano) — o ponto de sela

Resolução completa da Lista 3 (enunciado original em *Lista_3.pdf*; a resolução também é distribuída separadamente como *Lista03_Resolucao*). Esta é a monitoria do módulo: o modelo da lista, resolvido passo a passo.

8.1 Exercício 1

Enunciado. Considere o seguinte modelo:

$$\begin{aligned}\mathbf{IS:} \quad & \dot{y} = \sigma(r - \pi - \bar{\rho}) \\ \mathbf{CP:} \quad & \dot{\pi} = \delta(y - \bar{y}) \\ \mathbf{RPM:} \quad & r = \bar{\rho} + \pi + \phi(\pi - \bar{\pi}) + \theta(y - \bar{y}) \\ \mathbf{CI:} \quad & p(0), \pi(0)\end{aligned}$$

em que y é o produto real, \bar{y} é o produto potencial, \dot{x} é a derivada da variável x com relação ao tempo, dx/dt , ρ é a taxa de juros real, $\bar{\rho}$ é a taxa de juros real de longo prazo, r é a taxa de juros nominal, π é a taxa de inflação, $\bar{\pi}$ é a meta de inflação e σ , δ , ϕ e θ são parâmetros positivos.

A diferença essencial em relação às Listas 1 e 2 é que a **IS agora é dinâmica**: não fixa o *nível* do produto, e sim a sua *taxa de variação* \dot{y} em função do desvio da taxa de juros real $\rho = r - \pi$ face à neutra $\bar{\rho}$. É uma IS de inspiração **wickselliana** — o produto se acelera enquanto o juro real estiver “desalinhado”. Como veremos, isso transforma a estrutura: o equilíbrio deixa de ser um atrator global e passa a ser um **ponto de sela**.

8.1.1 Item 1 — Equilíbrio e dinâmica

Pergunta. Analise o equilíbrio e a dinâmica deste modelo num diagrama de fases, com a taxa de inflação π no eixo vertical e o produto real y no eixo horizontal.

Sistema dinâmico em (y, π) . A taxa de juros real é $\rho = r - \pi$. Pela RPM,

$$\rho - \bar{\rho} = \phi(\pi - \bar{\pi}) + \theta(y - \bar{y}).$$

Substituindo na IS, $\dot{y} = \sigma(\rho - \bar{\rho})$, e mantendo a CP, o modelo se reduz ao sistema autônomo de duas equações:

$$\begin{cases} \dot{y} = \sigma\theta(y - \bar{y}) + \sigma\phi(\pi - \bar{\pi}), \\ \dot{\pi} = \delta(y - \bar{y}). \end{cases}$$

Equilíbrio de longo prazo. $\dot{\pi} = 0 \iff y = \bar{y}$; levando à primeira equação, $\dot{y} = 0 \iff \pi = \bar{\pi}$. Logo $E^* = (\bar{y}, \bar{\pi})$, com $\rho^* = \bar{\rho}$ e $r^* = \bar{\rho} + \bar{\pi}$.

Lugares geométricos (isóclinas nulas).

- $\dot{\pi} = 0$: reta **vertical** $y = \bar{y}$.

- $\dot{y} = 0$: $\sigma\theta(y - \bar{y}) + \sigma\phi(\pi - \bar{\pi}) = 0$, ou seja

$$\pi - \bar{\pi} = -\frac{\theta}{\phi}(y - \bar{y}),$$

reta **negativamente inclinada** (inclinação $-\theta/\phi$) passando por E^* .

Classificação do equilíbrio. O Jacobiano avaliado em E^* é

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} & \frac{\partial \dot{y}}{\partial \pi} \\ \frac{\partial \dot{\pi}}{\partial y} & \frac{\partial \dot{\pi}}{\partial \pi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma\theta & \sigma\phi \\ \delta & 0 \end{pmatrix},$$

de modo que

$$\text{tr } J = \sigma\theta > 0, \quad \det J = -\sigma\phi\delta < 0.$$

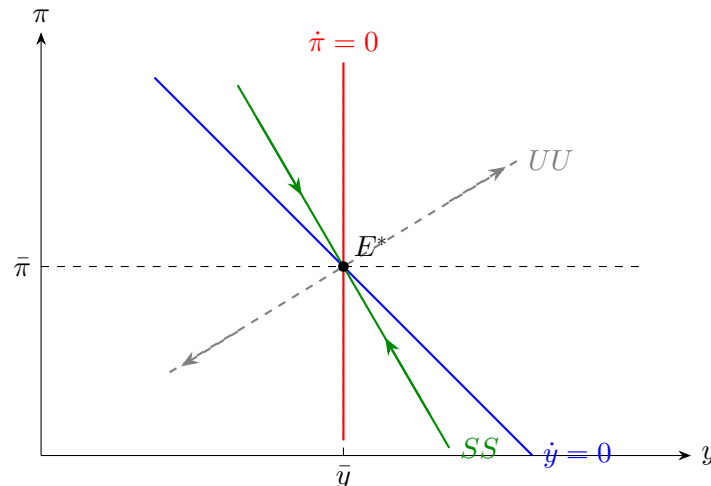
Como $\det J < 0$, os autovalores são **reais e de sinais opostos**: E^* é um **ponto de sela**. Explicitamente,

$$\lambda_{1,2} = \frac{\sigma\theta \pm \sqrt{(\sigma\theta)^2 + 4\sigma\phi\delta}}{2}, \quad \lambda_1 > 0, \quad \lambda_2 < 0.$$

Observação (papel do sinal da IS). É justamente o sinal **positivo** de σ na IS que produz $\det J < 0$ e, portanto, a sela. Caso a IS tivesse o sinal convencional $\dot{y} = -\sigma(\rho - \bar{\rho})$, teríamos $\text{tr } J = -\sigma\theta < 0$ e $\det J = +\sigma\phi\delta > 0$ — um equilíbrio **globalmente estável** (nó/foco atrator), como nas Listas 1 e 2. Resolvemos o modelo **tal como enunciado**.

Variável predeterminada vs. de salto. A condição inicial fornece $p(0)$ e $\pi(0)$ — mas **não** $y(0)$. Assim, a inflação é **predeterminada** (CP com inércia: não pula), enquanto o produto é a variável **livre (de salto)**: dado $\pi(0)$, y se posiciona instantaneamente sobre o **braço estável** (a trajetória de sela SS), única órbita que converge a E^* . Toda condição inicial fora de SS é levada à divergência pelo braço instável (UU , autovalor $\lambda_1 > 0$).

A inclinação dos braços, no plano (y, π) , vem da segunda linha de J ($\delta v_y = \lambda v_\pi$): $\left. \frac{d\pi}{dy} \right|_\lambda = \frac{\delta}{\lambda}$. Logo SS ($\lambda_2 < 0$) é **negativamente inclinada** e UU ($\lambda_1 > 0$) **positivamente inclinada**.



Leitura da dinâmica. As setas de movimento seguem de: $\dot{\pi} > 0$ à direita da vertical ($y > \bar{y}$) e $\dot{\pi} < 0$ à esquerda; $\dot{y} > 0$ acima/à direita da reta $\dot{y} = 0$ e $\dot{y} < 0$ abaixo/à esquerda. O resultado é o padrão típico de sela: apenas sobre SS a economia caminha em direção a E^* ; em qualquer outra trajetória, afasta-se.

8.1.2 Item 2 — Redução não antecipada da meta de inflação

Pergunta. Mostre o que acontece neste modelo, com o diagrama de fases, quando o Banco Central reduz a meta da taxa de inflação de forma não antecipada.

Em t_0 , sem aviso prévio, $\bar{\pi}_0 \rightarrow \bar{\pi}_1 < \bar{\pi}_0$ (de forma permanente).

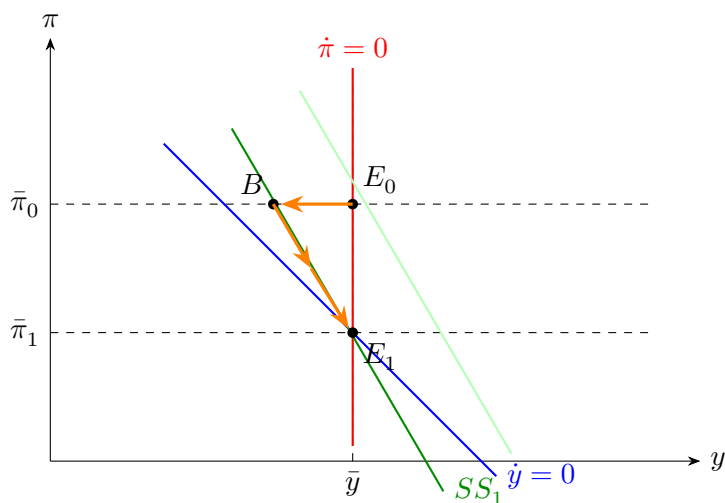
Como se deslocam as isóclinas.

- $\dot{\pi} = 0$ (vertical em \bar{y}) **não se altera.**
- $\dot{y} = 0$ desloca-se **para baixo**: passa a $\pi - \bar{\pi}_1 = -\frac{\theta}{\phi}(y - \bar{y})$, cruzando o eixo em $E_1 = (\bar{y}, \bar{\pi}_1)$.
- A trajetória de sela SS **acompanha** o novo equilíbrio: surge SS_1 , negativamente inclinada, passando por E_1 .

O salto. Como π é predeterminada (inércia da CP), no instante t_0^+ a inflação permanece em $\bar{\pi}_0$. Quem se ajusta é o **produto**, que salta de $E_0 = (\bar{y}, \bar{\pi}_0)$ horizontalmente até o ponto B , sobre a nova sela SS_1 , na altura $\pi = \bar{\pi}_0$. Como SS_1 é negativamente inclinada e passa por E_1 (abaixo de E_0), o ponto B está **à esquerda** de \bar{y} :

$$y_B < \bar{y} \quad (\text{recessão imediata}).$$

A transição. A partir de B , a economia desliza **ao longo de SS_1** rumo a E_1 : com $y < \bar{y}$, a CP dá $\dot{\pi} < 0$, a inflação cai gradualmente em direção a $\bar{\pi}_1$; à medida que π recua, o juro real cede e o produto se recupera de volta a \bar{y} .



Conclusão. A desinflação é **custosa**: produz uma recessão de impacto (salto do produto para baixo da trajetória de sela) seguida de recuperação gradual à medida que a inflação converge para a nova meta. O resultado é qualitativamente o mesmo da desinflação clássica com inflação inercial — há um **custo de produto (razão de sacrifício)** —, mas aqui ele aparece como um **salto da variável livre y sobre o braço estável**, e não como deslocamento ao longo de uma curva DD estável. A ancoragem só é possível porque $\pi(0)$ é dado e y pode saltar para SS_1 .

8.2 Exercício 2

Enunciado. Considere o seguinte modelo:

$$\begin{aligned} \text{IS: } & u - \bar{u} = \alpha(\rho - \bar{\rho}) \\ \text{CP: } & \dot{\pi} = -\delta(u - \bar{u}) \\ \text{RPM: } & \dot{r} = \phi(\pi - \bar{\pi}) - \theta i \\ \text{CI: } & p(0), \pi(0) \end{aligned}$$

em que u é a taxa de desemprego, \bar{u} é a taxa de desemprego natural, \dot{x} é a derivada da variável x com relação ao tempo, dx/dt , ρ é a taxa de juros real, $\bar{\rho}$ é a taxa de juros real de longo prazo, r é a taxa de juros nominal, π é a taxa de inflação, $\bar{\pi}$ é a meta de inflação e α , δ , ϕ e θ são parâmetros positivos.

8.2.1 Item 1 — Como obter a curva IS

Pergunta. Como você obteria a curva IS deste modelo?

Parte-se da **IS convencional em hiato do produto** e da **Lei de Okun**. A IS do mercado de bens relaciona o hiato do produto negativamente ao juro real:

$$y - \bar{y} = -\sigma(\rho - \bar{\rho}), \quad \sigma > 0.$$

A Lei de Okun liga o hiato de desemprego ao hiato do produto de forma **inversa**:

$$u - \bar{u} = -\frac{1}{\kappa}(y - \bar{y}), \quad \kappa > 0.$$

Combinando as duas (eliminando $y - \bar{y}$):

$$u - \bar{u} = \frac{\sigma}{\kappa}(\rho - \bar{\rho}) \equiv \alpha(\rho - \bar{\rho}), \quad \alpha \equiv \frac{\sigma}{\kappa} > 0.$$

Ou seja, a IS em desemprego é a IS de bens “traduzida” por Okun: um juro real acima do neutro ($\rho > \bar{\rho}$) deprime a demanda, reduz o produto e, por Okun, **eleva** o desemprego acima da natural ($u > \bar{u}$). O sinal $\alpha > 0$ é exatamente isso.

8.2.2 Item 2 — A RPM exige variável não observável?

Pergunta. A regra de política monetária necessita informação de alguma variável não observável?

Não. A regra

$$\dot{r} = \phi(\pi - \bar{\pi}) - \theta \dot{u}$$

reage a: (i) o **desvio da inflação** face à meta, $\pi - \bar{\pi}$ — ambas observáveis ($\bar{\pi}$ é escolha de política); e (ii) a **variação da taxa de desemprego**, \dot{u} — também observável.

O ponto crucial é que a regra responde à **taxa de desemprego** apenas através de sua **variação** \dot{u} , e **nunca ao hiato** $u - \bar{u}$. Logo, **dispensa o conhecimento da taxa natural** \bar{u} (a NAIRU) — uma variável **não observável** que precisa ser estimada com grande incerteza. Tampouco precisa de $\bar{\rho}$. Trata-se de uma **regra de diferença** (*difference rule / speed-limit rule*): sua principal virtude prática é ser **robusta ao erro de medida de variáveis latentes** (\bar{u} , $\bar{\rho}$, produto potencial). Isso conecta-se diretamente ao tema da Lista 2 (consequências de $\bar{\rho} \neq \bar{\rho}^{BC}$): a regra de diferença foi desenhada para **contornar** esse problema.

8.2.3 Item 3 — Equilíbrio, dinâmica e estabilidade

Pergunta. Analise o equilíbrio e a dinâmica deste modelo num diagrama de fase com a inflação e a taxa de desemprego nos eixos. Este modelo é estável?

(Adota a inflação π no eixo horizontal e o desemprego u no eixo vertical.)

Redução a um sistema (π, u) . Diferenciando a IS no tempo, $\dot{u} = \alpha(\dot{r} - \dot{\pi})$, isto é $\dot{r} = \dot{u}/\alpha + \dot{\pi}$. Substituindo na RPM:

$$\frac{\dot{u}}{\alpha} + \dot{\pi} = \phi(\pi - \bar{\pi}) - \theta \dot{u} \implies \dot{u} \frac{1 + \alpha\theta}{\alpha} = \phi(\pi - \bar{\pi}) - \dot{\pi}.$$

Como a CP dá $\dot{\pi} = -\delta(u - \bar{u})$, segue $-\dot{\pi} = \delta(u - \bar{u})$, e portanto o sistema reduzido é

$$\begin{cases} \dot{\pi} = -\delta(u - \bar{u}), \\ \dot{u} = \frac{\alpha\phi}{1 + \alpha\theta}(\pi - \bar{\pi}) + \frac{\alpha\delta}{1 + \alpha\theta}(u - \bar{u}). \end{cases}$$

Equilíbrio. $\dot{\pi} = 0 \iff u = \bar{u}$; daí $\dot{u} = 0 \iff \pi = \bar{\pi}$. Logo $E^* = (\bar{\pi}, \bar{u})$, com $\rho^* = \bar{\rho}$ e $r^* = \bar{\rho} + \bar{\pi}$.

Isóclinas nulas (plano com π na horizontal, u na vertical):

- $\dot{\pi} = 0$: reta **horizontal** $u = \bar{u}$.
- $\dot{u} = 0$: $\delta(u - \bar{u}) = -\phi(\pi - \bar{\pi}) \implies u - \bar{u} = -\frac{\phi}{\delta}(\pi - \bar{\pi})$, reta **negativamente inclinada** por E^* .

Estabilidade. O Jacobiano em E^* (ordem (π, u)) é

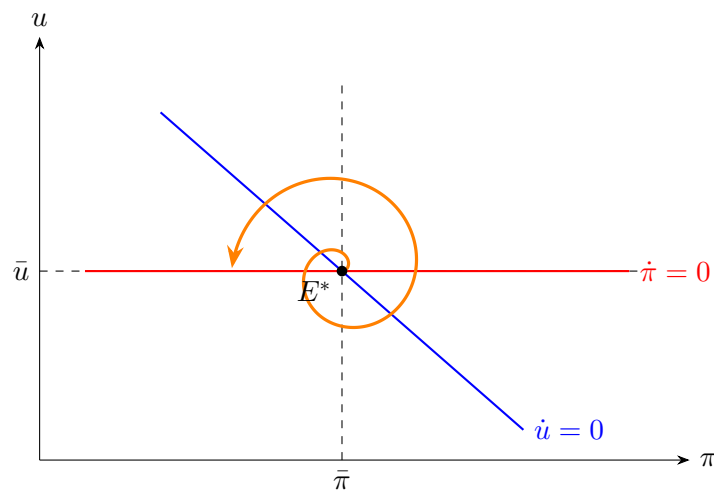
$$J = \begin{pmatrix} 0 & -\delta \\ \frac{\alpha\phi}{1 + \alpha\theta} & \frac{\alpha\delta}{1 + \alpha\theta} \end{pmatrix},$$

com

$$\text{tr } J = \frac{\alpha\delta}{1 + \alpha\theta} > 0, \quad \det J = \frac{\alpha\phi\delta}{1 + \alpha\theta} > 0.$$

Como $\text{tr } J > 0$ e $\det J > 0$, **ambos os autovalores têm parte real positiva**: o equilíbrio é **instável** (fonte). O discriminante $\text{tr}^2 - 4\det$ decide a forma: se negativo (tipicamente ϕ grande), tem-se um **foco instável** (espiral divergente); se positivo, um **nó instável**. Em qualquer caso, o **modelo NÃO é estável** — as trajetórias se afastam de E^* .

A raiz do problema está no termo $\partial\dot{u}/\partial u = \frac{\alpha\delta}{1 + \alpha\theta} > 0$: há **retroalimentação positiva** no desemprego. Por reagir apenas à *variação* \dot{u} (e não ao *nível* $u - \bar{u}$), a regra **não ancora** o nível de atividade; combinada à CP, isso gera dinâmica explosiva.



8.2.4 Item 4 — Você recomendaria esta regra?

Pergunta. Você recomendaria o uso desta regra de política monetária?

Não. Há um *trade-off* claro:

- **A favor (Item 2).** A regra é **robusta a variáveis não observáveis**: por usar \dot{u} em vez de $u - \bar{u}$, dispensa a estimativa da NAIRU \bar{u} (e de $\bar{\rho}$), evitando o viés que erros nessas estimativas introduzem — precisamente a fragilidade explorada na Lista 2.
- **Contra (Item 3).** Essa mesma escolha **custa a estabilidade**: $\text{tr } J > 0$ e $\det J > 0$ tornam o equilíbrio uma **fonte instável**. Inflação e desemprego **divergem** da meta/natural; a regra não cumpre a função primordial de um regime de metas, que é *ancorar*.

O critério decisivo de uma regra monetária é garantir a **determinação e a estabilidade** do equilíbrio (princípio de Taylor incluído). Uma regra que desestabiliza o sistema é **inutilizável na prática**, por melhor que seja sua robustez informacional. Portanto, **não a recomendaria**: a propriedade desejável (independência de \bar{u}) não compensa a perda de estabilidade. Uma alternativa seria preservar o espírito de *difference rule* mas **reintroduzir um feedback de nível** (sobre $u - \bar{u}$ ou sobre a própria inflação acumulada) calibrado para tornar $\text{tr } J < 0$, recuperando a convergência.

9 Monitoria 4 — Lista 4: IS dinâmica com reversão à média — estabilidade global

Resolução completa da Lista 4 (enunciado original em *Lista_4.pdf*; a resolução também é distribuída separadamente como *Lista04_Resolucao*). Esta é a monitoria do módulo: o modelo da lista, resolvido passo a passo.

9.1 Exercício 1

Enunciado. Considere o seguinte modelo:

$$\begin{aligned}\text{IS: } & \dot{y} = -\lambda(y - \bar{y}) - \alpha(r - \pi - \bar{\rho}) \\ \text{CP: } & \dot{\pi} = \delta(y - \bar{y}) \\ \text{RPM: } & r = \bar{\rho} + \pi + \phi(\pi - \bar{\pi}) + \theta(y - \bar{y}) \\ \text{CI: } & p(0), \pi(0)\end{aligned}$$

em que y é o produto real, \bar{y} é o produto potencial, \dot{x} é a derivada da variável x com relação ao tempo, dx/dt , ρ é a taxa de juros real, $\bar{\rho}$ é a taxa de juros real de longo prazo, r é a taxa de juros nominal, π é a taxa de inflação, $\bar{\pi}$ é a meta de inflação e α , λ , δ , ϕ e θ são parâmetros positivos.

A IS é **dinâmica** (como na Lista 3), mas com duas diferenças decisivas: (i) o efeito do juro real tem o **sinal convencional** $-\alpha(\rho - \bar{\rho})$ — juro real acima do neutro **desacelera** o produto; e (ii) há um termo de **reversão à média** $-\lambda(y - \bar{y})$, uma força autônoma que empurra o produto de volta ao potencial (capacidade/ajuste do mercado de bens), independentemente da política monetária. Veremos que isso torna o equilíbrio **globalmente estável**.

9.1.1 Item 1 — Equilíbrio e dinâmica

Pergunta. Analise o equilíbrio e a dinâmica deste modelo num diagrama de fases, com a taxa de inflação π no eixo vertical e o produto real y no eixo horizontal.

Sistema dinâmico em (y, π) . Com $\rho = r - \pi$, a RPM dá $\rho - \bar{\rho} = \phi(\pi - \bar{\pi}) + \theta(y - \bar{y})$. Substituindo na IS:

$$\dot{y} = -\lambda(y - \bar{y}) - \alpha[\phi(\pi - \bar{\pi}) + \theta(y - \bar{y})],$$

ou seja,

$$\begin{cases} \dot{y} = -(\lambda + \alpha\theta)(y - \bar{y}) - \alpha\phi(\pi - \bar{\pi}), \\ \dot{\pi} = \delta(y - \bar{y}). \end{cases}$$

Equilíbrio. $\dot{\pi} = 0 \iff y = \bar{y}$; daí $\dot{y} = 0 \iff \pi = \bar{\pi}$. Logo $E^* = (\bar{y}, \bar{\pi})$, com $\rho^* = \bar{\rho}$ e $r^* = \bar{\rho} + \bar{\pi}$.

Isóclinas nulas.

- $\dot{\pi} = 0$: reta **vertical** $y = \bar{y}$.
- $\dot{y} = 0$: $\pi - \bar{\pi} = -\frac{\lambda + \alpha\theta}{\alpha\phi}(y - \bar{y})$, reta **negativamente inclinada** por E^* .

Classificação. O Jacobiano em E^* é

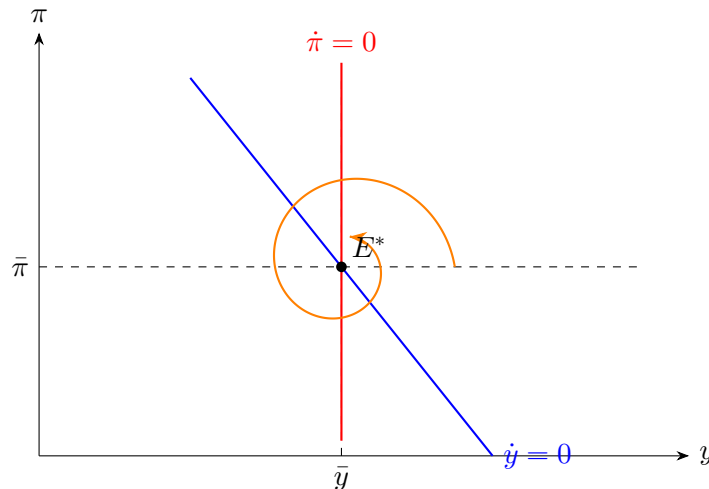
$$J = \begin{pmatrix} -(\lambda + \alpha\theta) & -\alpha\phi \\ \delta & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{tr } J = -(\lambda + \alpha\theta) < 0, \quad \det J = \alpha\phi\delta > 0.$$

Como $\text{tr } J < 0$ e $\det J > 0$, os dois autovalores têm **parte real negativa**: E^* é **assintoticamente estável**. O discriminante

$$\Delta = \text{tr}^2 J - 4 \det J = (\lambda + \alpha\theta)^2 - 4\alpha\phi\delta$$

decide a forma: $\Delta > 0 \Rightarrow$ **nó estável** (convergência monótona); $\Delta < 0 \Rightarrow$ **foco estável** (convergência com oscilações amortecidas). Note que o termo de reversão λ não só **acelera** a convergência (torna $\text{tr } J$ mais negativo) como **favorece o nó** (aumenta Δ), atenuando oscilações.

Diferentemente da Lista 3 (cujo sinal positivo na IS gerava uma **sela**), aqui $\det J > 0$: a economia converge a E^* a partir de **qualquer** condição inicial — tanto π quanto y são predeterminadas e não há necessidade de salto.



Leitura da dinâmica. O fluxo gira no sentido **anti-horário** em torno de E^* : à direita da vertical ($y > \bar{y}$) tem-se $\dot{\pi} > 0$; acima da reta $\dot{y} = 0$ tem-se $\dot{y} < 0$. As trajetórias **convergem** para o equilíbrio (em espiral, no caso de foco).

9.1.2 Item 2 — Aumento não antecipado da meta de inflação

Pergunta. Mostre o que acontece neste modelo, com o diagrama de fases, quando o Banco Central aumenta a meta da taxa de inflação de forma não antecipada.

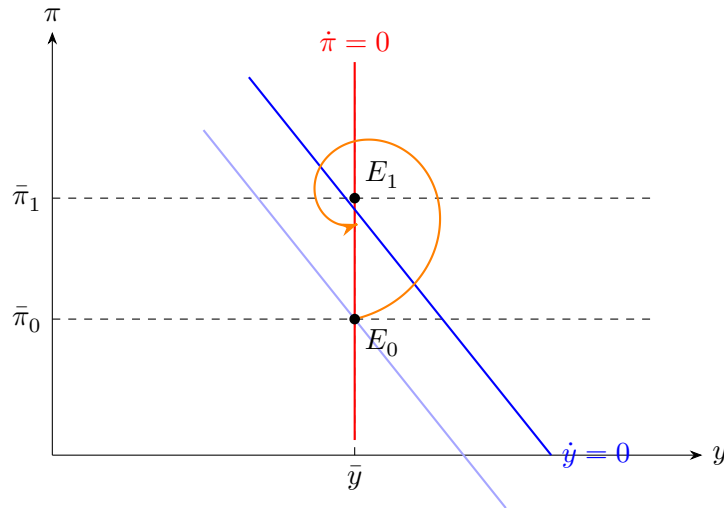
Em t_0 , sem aviso prévio, $\bar{\pi}_0 \rightarrow \bar{\pi}_1 > \bar{\pi}_0$ (permanente).

- $\dot{\pi} = 0$ (vertical em \bar{y}) **não se altera**.
- $\dot{y} = 0$ desloca-se **para cima**: passa a $\pi - \bar{\pi}_1 = -\frac{\lambda + \alpha\theta}{\alpha\phi}(y - \bar{y})$, por $E_1 = (\bar{y}, \bar{\pi}_1)$.

Como o sistema é **estável** (e não uma sela), **não há salto** de y : a inflação é predeterminada e o produto evolui continuamente. No instante t_0^+ a economia ainda está em $E_0 = (\bar{y}, \bar{\pi}_0)$, agora **abaixo** do novo equilíbrio. O movimento inicial do produto é

$$\dot{y}|_{t_0^+} = -\alpha\phi(\bar{\pi}_0 - \bar{\pi}_1) = \alpha\phi(\bar{\pi}_1 - \bar{\pi}_0) > 0.$$

Expansão imediata: a meta mais alta reduz o juro real (a RPM passa a tolerar mais inflação), $\rho < \bar{\rho}$, e o produto sobe acima do potencial. Com $y > \bar{y}$, a CP dá $\dot{\pi} > 0$ e a inflação sobe gradualmente rumo a $\bar{\pi}_1$. A economia descreve uma trajetória **anti-horária**, convergindo a E_1 (com possíveis oscilações amortecidas, se foco).



Conclusão. O aumento da meta gera um **boom transitório** (produto acima do potencial) acompanhado de **elevação gradual da inflação** até a nova meta; o produto retorna a \bar{y} no longo prazo. É o espelho da desinflação: aqui a “reinflação” tem ganho de produto de curto prazo, mas o único efeito permanente é uma inflação de equilíbrio mais alta ($\bar{\pi}_1$). A neutralidade de longo prazo se mantém: $y^* = \bar{y}$ e $\rho^* = \bar{\rho}$.

9.1.3 Item 3 — O parâmetro ϕ negativo

Pergunta. O que acontece neste modelo se o parâmetro ϕ for negativo? Qual a interpretação da regra de política monetária neste caso?

Interpretação da RPM. Em termos do juro real, $\rho - \bar{\rho} = \phi(\pi - \bar{\pi}) + \theta(y - \bar{y})$. Com $\phi < 0$, quando a inflação sobe acima da meta o BC **reduz** o juro real — exatamente o oposto do que estabiliza. A regra **viola o princípio de Taylor**: é uma política monetária **acomodatícia/desestabilizadora**, sem âncora nominal.

Efeito sobre a dinâmica. A estrutura do Jacobiano não muda, mas

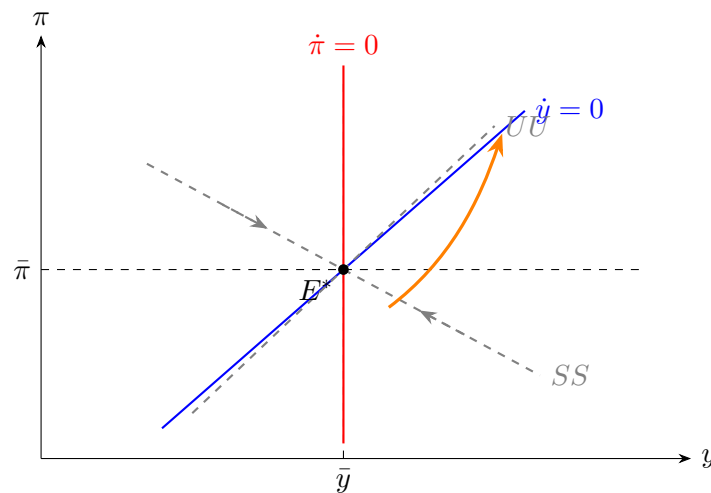
$$\det J = \alpha\phi\delta < 0 \quad (\phi < 0),$$

com $\text{tr } J = -(\lambda + \alpha\theta) < 0$ ainda negativo. Como $\det J < 0$, os autovalores são **reais de sinais opostos**: E^* deixa de ser estável e torna-se um **ponto de sela**. A reta $\dot{y} = 0$ passa a ser **positivamente inclinada** ($-\frac{\lambda + \alpha\theta}{\alpha\phi} > 0$, pois $\phi < 0$).

Estabilidade. A economia **perde a estabilidade** que tinha sob o princípio de Taylor. Como tanto π quanto y são predeterminadas (no caso $\phi > 0$ o sistema era um sumidouro e convergia **sem saltos**), uma condição inicial genérica **não** se encontra sobre a variedade estável: o sistema **diverge** ao longo do braço instável. Qualquer desvio inicial da inflação se autoalimenta:

$$\pi > \bar{\pi} \Rightarrow \rho < \bar{\rho} \Rightarrow \dot{y} > 0 \Rightarrow y > \bar{y} \Rightarrow \dot{\pi} > 0 \Rightarrow \text{inflação acelera.}$$

O termo de reversão λ apenas **mitiga a velocidade** de divergência, mas **não altera o sinal** de $\det J$: não consegue substituir a âncora nominal, que vem necessariamente de $\phi > 0$.



9.2 Exercício 2

Enunciado. Considere o seguinte modelo:

$$\mathbf{IS:} \quad \dot{y} = -\alpha(r - \pi - \bar{\rho})$$

$$\mathbf{CP:} \quad \dot{\pi} = \delta(y - \bar{y})$$

$$\mathbf{RPM:} \quad r = \bar{\rho} + \pi + \phi(\pi - \bar{\pi}) + \theta(y - \bar{y})$$

$$\mathbf{CI:} \quad p(0), \pi(0)$$

em que y é o produto real, \bar{y} é o produto potencial, \dot{x} é a derivada da variável x com relação ao tempo, dx/dt , ρ é a taxa de juros real, $\bar{\rho}$ é a taxa de juros real de longo prazo, r é a taxa de juros nominal, π é a taxa de inflação, $\bar{\pi}$ é a meta de inflação e α , δ , ϕ e θ são parâmetros positivos.

É o modelo do Exercício 1 **sem** o termo de reversão à média ($\lambda = 0$).

9.2.1 Item 1 — Especificação das equações

Pergunta. Discuta a especificação de cada uma das equações do modelo.

IS dinâmica — $\dot{y} = -\alpha(\rho - \bar{\rho})$. É uma IS **wickselliana**: o produto **se acelera ou desacelera** conforme o juro real $\rho = r - \pi$ esteja abaixo ou acima da taxa neutra $\bar{\rho}$. Não há um nível de produto instantaneamente determinado pela taxa de juros (como nas Listas 1–2); o que se determina é a **taxa de variação** do produto. Em $\rho = \bar{\rho}$ o produto fica estacionário (mas não necessariamente em \bar{y}).

Curva de Phillips — $\dot{\pi} = \delta(y - \bar{y})$. É uma CP **aceleracionista com inércia**: a inflação **varia** (não o seu nível) proporcionalmente ao hiato do produto. Como a CI fornece $\pi(0)$, a inflação é **predeterminada** — não pula, refletindo expectativas adaptativas/rigidez (cf. derivação da CP com inércia no caderno).

RPM — $r = \bar{\rho} + \pi + \phi(\pi - \bar{\pi}) + \theta(y - \bar{y})$. É uma **regra de Taylor**: em termos reais, $\rho - \bar{\rho} = \phi(\pi - \bar{\pi}) + \theta(y - \bar{y})$. O BC sobe o juro real quando a inflação supera a meta ($\phi > 0$, **princípio de Taylor**) e/ou quando o produto excede o potencial ($\theta > 0$, estabilização do hiato). O intercepto $\bar{\rho} + \pi$ garante que, no equilíbrio, a taxa nominal entregue exatamente a taxa real neutra.

Condição inicial — $p(0), \pi(0)$. Fixa o nível de preços e a inflação iniciais: ambos **predeterminados**. É a hipótese de **rigidez nominal** que dá sentido à dinâmica.

9.2.2 Item 2 — Equilíbrio e dinâmica

Pergunta. Analise o equilíbrio e a dinâmica deste modelo num diagrama de fases, com a taxa de inflação π no eixo vertical e o produto real y no eixo horizontal.

Com $\rho - \bar{\rho} = \phi(\pi - \bar{\pi}) + \theta(y - \bar{y})$, o sistema reduzido é

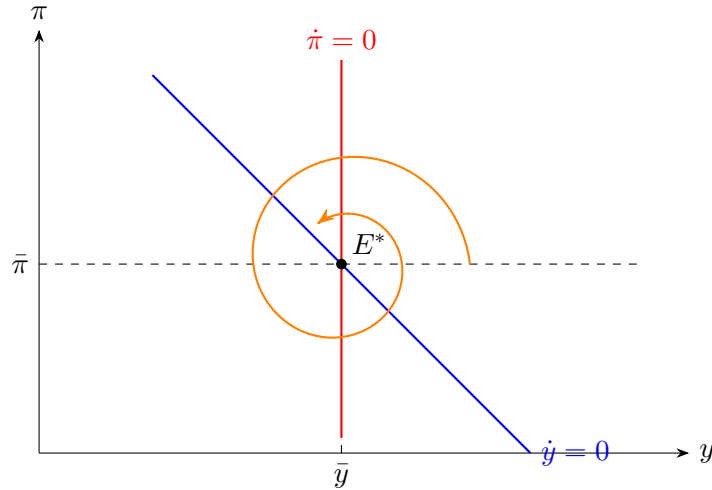
$$\begin{cases} \dot{y} = -\alpha\theta(y - \bar{y}) - \alpha\phi(\pi - \bar{\pi}), \\ \dot{\pi} = \delta(y - \bar{y}). \end{cases}$$

Equilíbrio. $E^* = (\bar{y}, \bar{\pi})$. **Isóclinas:** $\dot{\pi} = 0$ é a vertical $y = \bar{y}$; $\dot{y} = 0$ é $\pi - \bar{\pi} = -\frac{\theta}{\phi}(y - \bar{y})$, negativamente inclinada.

Classificação. O Jacobiano é

$$J = \begin{pmatrix} -\alpha\theta & -\alpha\phi \\ \delta & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{tr } J = -\alpha\theta < 0, \quad \det J = \alpha\phi\delta > 0.$$

Novamente $\text{tr } J < 0$ e $\det J > 0$: equilíbrio **assintoticamente estável** (nó se $\Delta = (\alpha\theta)^2 - 4\alpha\phi\delta > 0$; foco se $\Delta < 0$). Em relação ao Exercício 1, a ausência do termo λ deixa $\text{tr } J$ **menos negativo** — a convergência é **mais lenta e mais propensa a oscilações** (foco).



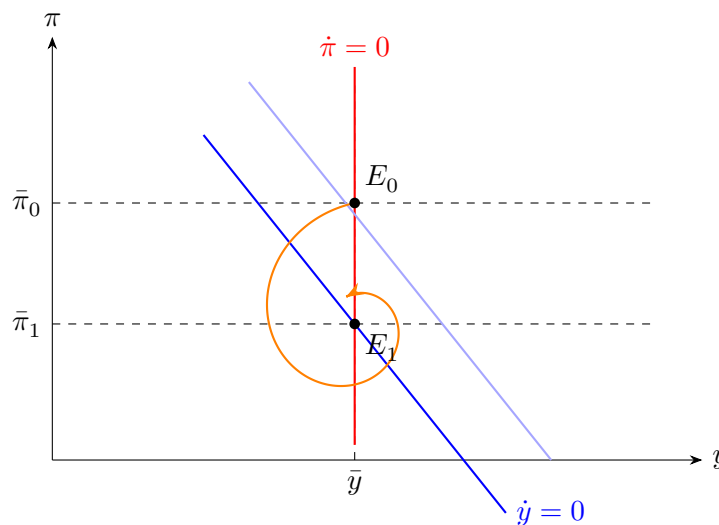
9.2.3 Item 3 — Redução não antecipada da meta de inflação

Pergunta. Mostre o que acontece neste modelo, com o diagrama de fases, quando o Banco Central reduz a meta da taxa de inflação de forma não antecipada.

Em t_0 , $\bar{\pi}_0 \rightarrow \bar{\pi}_1 < \bar{\pi}_0$. A reta $\dot{y} = 0$ desloca-se **para baixo** (por $E_1 = (\bar{y}, \bar{\pi}_1)$); $\dot{\pi} = 0$ não muda. Como o sistema é **estável, não há salto**: a economia parte de $E_0 = (\bar{y}, \bar{\pi}_0)$, agora **acima** do novo equilíbrio. O movimento inicial é

$$\dot{y}|_{t_0^+} = -\alpha\phi(\bar{\pi}_0 - \bar{\pi}_1) < 0.$$

Recessão imediata: a meta menor exige juro real mais alto, $\rho > \bar{\rho}$, e o produto cai abaixo do potencial. Com $y < \bar{y}$, a CP dá $\dot{\pi} < 0$ e a inflação recua gradualmente até $\bar{\pi}_1$; o produto retorna a \bar{y} . A trajetória é **anti-horária** e convergente (com oscilações amortecidas, se foco).



Conclusão. A desinflação é **custosa** (recessão de transição), mas, ao contrário da Lista 3, o ajuste é **suave e contínuo** — não há salto do produto, porque o equilíbrio é estável, e não uma sela. O custo aparece como uma **fase recessiva** ao longo da convergência (eventualmente com sobre-reação amortecida), não como um salto instantâneo sobre um braço de sela.

9.2.4 Item 4 — O parâmetro ϕ negativo

Pergunta. O que acontece nesse modelo se o parâmetro ϕ for negativo?

Idêntico, em essência, ao Item 3 do Exercício 1. Com $\phi < 0$,

$$\det J = \alpha\phi\delta < 0, \quad \text{tr } J = -\alpha\theta < 0,$$

de modo que E^* passa de estável a **ponto de sela**: a economia **perde a estabilidade**. Como ambas as variáveis são predeterminadas (o caso $\phi > 0$ convergia sem saltos), uma condição inicial genérica diverge ao longo do braço instável. A RPM com $\phi < 0$ **viola o princípio de Taylor** — o BC corta o juro real diante de inflação acima da meta, alimentando-a —, e a inflação deixa de ser ancorada. Aqui, sem o termo de reversão λ , **nada** amortece a divergência: a instabilidade é ainda mais “limpa” que no Exercício 1.

Testes do Módulo 1 — IS–CP–RPM fechado

Os testes a seguir são avaliações resolvidas que cobrem o modelo fechado deste módulo: o **Teste 1** trata da versão com inflação predeterminada e dinâmica unidimensional em π ; o **Teste 2**, da versão dinâmica bidimensional em (u, π) com Lei de Okun.

10 Teste 1 (2026) — Modelo IS–CP–RPM com inércia

Resolução completa do Primeiro Teste de 2026 (enunciado e resolução também distribuídos em Teste01_2026). Avalia o modelo de referência fechado do Módulo 1: dinâmica unidimensional da inflação predeterminada e custo de desinflação.

Enunciado. Considere as equações do modelo abaixo:

$$\begin{aligned} \mathbf{IS:} \quad & y - \bar{y} = -\alpha(r - \pi - \bar{\rho}) \\ \mathbf{CP:} \quad & \dot{\pi} = \delta(y - \bar{y}) \\ \mathbf{RPM:} \quad & r = \bar{\rho} + \pi + \phi(\pi - \bar{\pi}) + \theta(y - \bar{y}) \\ \mathbf{CI:} \quad & y(0), \pi(0) \end{aligned}$$

com $\alpha, \delta, \theta > 0$.

Estrutura do modelo. É o modelo de referência da disciplina (IS-CP-RPM com inércia). A **IS** é uma relação estática que liga o hiato do produto $(y - \bar{y})$ negativamente ao hiato da taxa de juros real $\rho - \bar{\rho}$, com $\rho = r - \pi$. A **CP** é *backward-looking* (com inércia): como a CI fixa $\pi(0)$, a inflação é variável **predeterminada** — não pula. A **RPM** é uma regra de Taylor.

Observação sobre a CI. O enunciado fornece $y(0), \pi(0)$. Estritamente, y não é variável de estado independente: é determinado contemporaneamente pela curva reduzida (DD). A condição inicial que importa é $\pi(0)$ (inflação predeterminada pela inércia da CP); $y(0)$ decorre da DD avaliada em $\pi(0)$. (Adoto, no diagrama em (π, y) , a convenção usual da disciplina: y no eixo horizontal e π no eixo vertical.)

10.1 Item (a) — Curva $\dot{\pi} = 0$ e curva IS do modelo

Curva $\dot{\pi} = 0$. Direto da CP: $\delta(y - \bar{y}) = 0 \iff y = \bar{y}$. É a reta **vertical** em \bar{y} .

Curva IS do modelo (DD). A “curva IS” relevante no plano (y, π) não é a IS isolada (que envolve r, π, ρ), e sim a relação reduzida que combina **IS + RPM**. Como $\rho = r - \pi$, a RPM em termos reais dá

$$\rho - \bar{\rho} = \phi(\pi - \bar{\pi}) + \theta(y - \bar{y}).$$

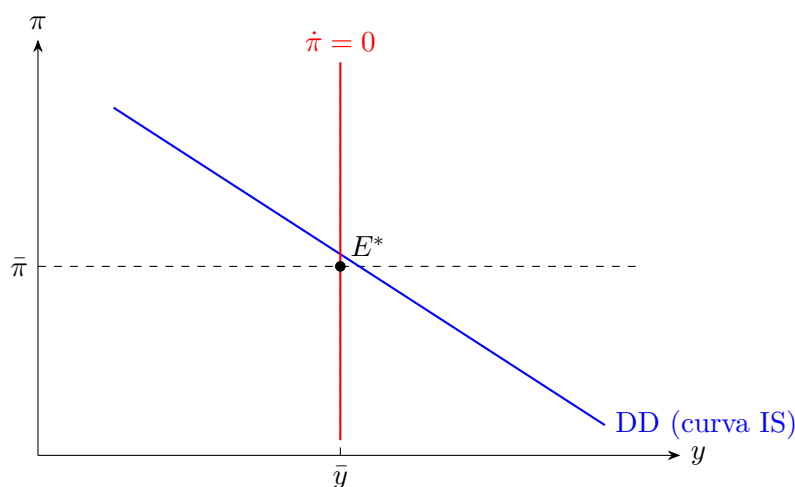
Substituindo na IS $y - \bar{y} = -\alpha(\rho - \bar{\rho})$:

$$y - \bar{y} = -\alpha[\phi(\pi - \bar{\pi}) + \theta(y - \bar{y})] \iff (1 + \alpha\theta)(y - \bar{y}) = -\alpha\phi(\pi - \bar{\pi}),$$

de onde

$$\boxed{y - \bar{y} = -\frac{\alpha\phi}{1 + \alpha\theta}(\pi - \bar{\pi})} \quad (\text{DD}) \iff \pi = \bar{\pi} - \frac{1 + \alpha\theta}{\alpha\phi}(y - \bar{y}).$$

A inclinação no plano (y, π) é $\left. \frac{\partial \pi}{\partial y} \right|_{DD} = -\frac{1 + \alpha\theta}{\alpha\phi}$, **negativa** quando $\phi > 0$.



10.2 Item (b) — Reescrita da RPM

Parte-se da RPM e separa-se $\pi = \bar{\pi} + (\pi - \bar{\pi})$:

$$r = \bar{\rho} + \pi + \phi(\pi - \bar{\pi}) + \theta(y - \bar{y}) = \bar{\rho} + \bar{\pi} + (\pi - \bar{\pi}) + \phi(\pi - \bar{\pi}) + \theta(y - \bar{y}).$$

Agrupando o termo de inflação,

$$r = \underbrace{(\bar{\rho} + \bar{\pi})}_{\equiv \bar{r}} + (1 + \phi)(\pi - \bar{\pi}) + \theta(y - \bar{y}).$$

A constante $\bar{r} = \bar{\rho} + \bar{\pi}$ é a **taxa nominal de equilíbrio**: avaliando a RPM em E^* ($y = \bar{y}, \pi = \bar{\pi}$) obtém-se exatamente $r^* = \bar{\rho} + \bar{\pi}$. Logo,

$$r - \bar{r} = (1 + \phi)(\pi - \bar{\pi}) + \theta(y - \bar{y}).$$

Leitura. A elasticidade da taxa **nominal** à inflação é $1 + \phi$. Para $\phi > 0$, essa elasticidade é **maior que 1**: quando a inflação sobe 1 ponto, o BC eleva a taxa nominal em **mais** de 1 ponto, de modo que a taxa **real** $\rho = r - \pi$ também sobe. Esta é a expressão formal do **princípio de Taylor**.

10.3 Item (c) — Caso $\phi > 0$ e ponto de estabilidade

Interpretação. Pelo item (b), $\phi > 0$ garante o princípio de Taylor: diante de $\pi > \bar{\pi}$, o BC eleva o juro **real** ($\rho - \bar{\rho} = \phi(\pi - \bar{\pi}) + \theta(y - \bar{y}) > 0$), o que contrai a demanda pela IS, reduz o produto e, pela CP, faz a inflação ceder — um mecanismo **estabilizador** com âncora nominal.

Dinâmica reduzida. Substituindo a DD na CP:

$$\dot{\pi} = \delta(y - \bar{y}) = -\frac{\alpha\phi\delta}{1 + \alpha\theta}(\pi - \bar{\pi}), \quad \lambda = -\frac{\alpha\phi\delta}{1 + \alpha\theta}.$$

Como $\alpha, \delta > 0$ e $1 + \alpha\theta > 0$, para $\phi > 0$ tem-se $\lambda < 0$: o equilíbrio é **assintoticamente estável**, com convergência **monotônica** de π a $\bar{\pi}$ ao longo da DD.

Ponto de estabilidade. É a interseção da DD com $\dot{\pi} = 0$. Impondo $y = \bar{y}$ na DD resulta $\pi = \bar{\pi}$. Logo,

$$E^* = (\bar{y}, \bar{\pi}), \quad \rho^* = \bar{\rho}, \quad r^* = \bar{r} = \bar{\rho} + \bar{\pi}.$$

10.4 Item (d) — Redução não antecipada da meta

Em t_0 , sem aviso prévio, $\bar{\pi}_0 \rightarrow \bar{\pi}_1 < \bar{\pi}_0$ (permanente).

- O lugar $\dot{\pi} = 0$ (vertical em \bar{y}) **não se desloca**.
- A DD **desloca-se para baixo**: a nova DD passa por $(\bar{y}, \bar{\pi}_1)$,

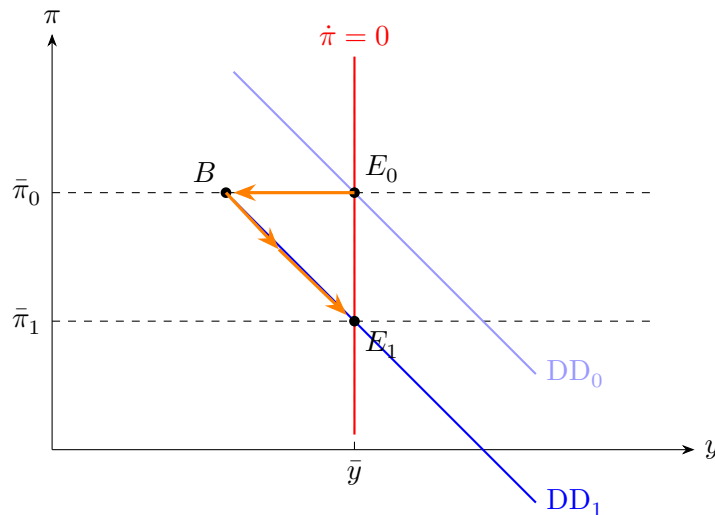
$$y - \bar{y} = -\frac{\alpha\phi}{1 + \alpha\theta}(\pi - \bar{\pi}_1).$$

Como π é **predeterminada** (inércia), em t_0^+ a inflação **permanece** em $\pi(t_0) = \bar{\pi}_0$. A economia se desloca **horizontalmente** (sobre $\pi = \bar{\pi}_0$) de $E_0 = (\bar{y}, \bar{\pi}_0)$ até o ponto B sobre a nova DD:

$$y_B - \bar{y} = -\frac{\alpha\phi}{1 + \alpha\theta}(\bar{\pi}_0 - \bar{\pi}_1) < 0.$$

Há **recessão imediata** ($y_B < \bar{y}$). Intuição via RPM: como agora $\pi > \bar{\pi}_1$, o BC **eleva** o juro real ($\phi(\pi - \bar{\pi}_1) > 0$), e a IS implica queda do produto.

A partir de B , com $y < \bar{y}$ a CP dá $\dot{\pi} < 0$: a inflação cai gradualmente. Ao longo da nova DD, a economia caminha até $E_1 = (\bar{y}, \bar{\pi}_1)$.



Conclusão. A redução da meta gera **desinflação custosa**: uma recessão transitória ($y_B < \bar{y}$, *sacrifice ratio* positiva) durante o ajuste, com a inflação caindo gradualmente até $\bar{\pi}_1$ e o produto retornando ao potencial \bar{y} . É o espelho simétrico do aumento da meta (que geraria expansão transitória). A neutralidade de longo prazo se mantém: $y^* = \bar{y}$, $\rho^* = \bar{\rho}$, e o único efeito permanente é uma inflação de equilíbrio mais baixa.

11 Teste 2 (2026) — IS–CP–RPM dinâmico com Lei de Okun

Resolução completa do Segundo Teste de 2026 (enunciado e resolução também distribuídos em Teste02_2026). Avança o modelo do Módulo 1 para a versão dinâmica bidimensional em (u, π) : IS como equação diferencial no desemprego, Lei de Okun, e a estabilidade (nó/foco/sela) governada pelo princípio de Taylor.

Enunciado. Considere o modelo abaixo:

$$\begin{aligned} \text{IS: } & \dot{u} = \alpha(\rho - \bar{\rho}) \\ \text{CP: } & \dot{\pi} = \delta(y - \bar{y}) \\ \text{RPM: } & r = \bar{\rho} + \pi + \phi(\pi - \bar{\pi}) + \theta(y - \bar{y}) \\ \text{LO: } & u - \bar{u} = -\beta(y - \bar{y}) \\ \text{CI: } & p(0), \pi(0) \end{aligned}$$

em que u é o desemprego, \bar{u} a taxa natural, y o produto, \bar{y} o produto potencial, $\rho = r - \pi$ a taxa de juros real, $\bar{\rho}$ a real de longo prazo, r a nominal, π a inflação e $\bar{\pi}$ a meta. Os parâmetros $\alpha, \beta, \phi, \delta, \theta$ são positivos.

Estrutura do modelo. É a versão **dinâmica completa** do modelo IS-CP-RPM da disciplina (Barbosa, 2017; caderno da Julia). Há duas diferenças cruciais em relação ao Primeiro Teste:

1. A **IS** agora é uma equação **diferencial** em u : $\dot{u} = \alpha(\rho - \bar{\rho})$. Quando o juro real está acima do seu nível de longo prazo ($\rho > \bar{\rho}$), a política é contracionista e o desemprego **sobe** ($\dot{u} > 0$). Logo, u é variável de **estado** (predeterminada), não estática.
2. A **Lei de Okun (LO)** liga desemprego e produto: $u - \bar{u} = -\beta(y - \bar{y})$, ou seja $y - \bar{y} = -\frac{1}{\beta}(u - \bar{u})$. Hiato de produto positivo \Leftrightarrow desemprego abaixo do natural.

A **CP** é *backward-looking* (inércia): a CI fixa $\pi(0)$, então a inflação é **predeterminada** — não pula. A **RPM** é uma regra de Taylor. O resultado é um sistema **bidimensional** nas duas variáveis predeterminadas (u, π) , ao contrário do Primeiro Teste (onde y era estático e a dinâmica era unidimensional em π).

Observação sobre a CI. As variáveis de estado do sistema (u, π) são **ambas predeterminadas**: u pela IS dinâmica e π pela inércia da CP. O dado $p(0)$ fixa o nível inicial de preços (o nível p é predeterminado e evolui por $\dot{p}/p = \pi$); para o diagrama de fases em (u, π) o que importa são $u(0)$ e $\pi(0)$. Como **não há variável de salto**, o sistema não pode “pular” para a trajetória de equilíbrio — fato decisivo nos itens (b) e (c). Adoto a convenção de u no eixo horizontal e π no eixo vertical.

11.1 Item (a) — Equilíbrio e dinâmica no plano (u, π)

Forma reduzida do sistema. Da RPM, com $\rho = r - \pi$,

$$\rho - \bar{\rho} = \phi(\pi - \bar{\pi}) + \theta(y - \bar{y}).$$

Usando a LO, $y - \bar{y} = -\frac{1}{\beta}(u - \bar{u})$:

$$\rho - \bar{\rho} = \phi(\pi - \bar{\pi}) - \frac{\theta}{\beta}(u - \bar{u}).$$

Substituindo em IS e CP obtém-se o sistema autônomo nas variáveis de estado:

$$\begin{cases} \dot{u} = \alpha\phi(\pi - \bar{\pi}) - \frac{\alpha\theta}{\beta}(u - \bar{u}), \\ \dot{\pi} = -\frac{\delta}{\beta}(u - \bar{u}). \end{cases}$$

Isóclinas (nullclines).

- $\dot{\pi} = 0 \iff u = \bar{u}$: reta **vertical** em \bar{u} .
- $\dot{u} = 0 \iff \alpha\phi(\pi - \bar{\pi}) = \frac{\alpha\theta}{\beta}(u - \bar{u})$, isto é

$$\pi - \bar{\pi} = \frac{\theta}{\beta\phi}(u - \bar{u}) \implies \left. \frac{\partial\pi}{\partial u} \right|_{\dot{u}=0} = \frac{\theta}{\beta\phi} > 0 \quad (\text{para } \phi > 0),$$

reta com **inclinação positiva** que passa por $(\bar{u}, \bar{\pi})$.

Equilíbrio. Na interseção, $u = \bar{u}$ e $\pi = \bar{\pi}$. Nele $y = \bar{y}$, $\rho = \bar{\rho}$ e $r = \bar{r} \equiv \bar{\rho} + \bar{\pi}$:

$$E^* = (\bar{u}, \bar{\pi}), \quad y^* = \bar{y}, \quad \rho^* = \bar{\rho}, \quad r^* = \bar{\rho} + \bar{\pi}.$$

Estabilidade. Em desvios $x \equiv u - \bar{u}$, $z \equiv \pi - \bar{\pi}$, a matriz jacobiana é

$$J = \begin{pmatrix} -\frac{\alpha\theta}{\beta} & \alpha\phi \\ \frac{\delta}{\beta} & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{tr } J = -\frac{\alpha\theta}{\beta} < 0, \quad \det J = \frac{\alpha\delta\phi}{\beta}.$$

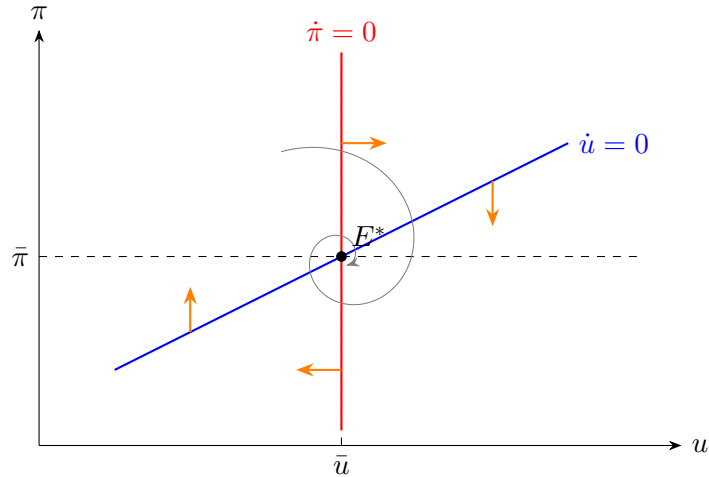
Para $\phi > 0$: $\det J > 0$ e $\text{tr } J < 0 \implies$ **equilíbrio assintoticamente estável**. O discriminante

$$\Delta = (\text{tr } J)^2 - 4 \det J = \frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{\alpha\theta^2}{\beta} - 4\delta\phi \right)$$

separa os dois regimes:

- $\Delta \geq 0$ ($\phi \leq \frac{\alpha\theta^2}{4\beta\delta}$): **nó estável** — convergência monotônica;
- $\Delta < 0$ ($\phi > \frac{\alpha\theta^2}{4\beta\delta}$): **foco estável** — convergência por **oscilações amortecidas** (espiral).

Campo de direções. Acima da reta $\dot{u} = 0$ tem-se $\dot{u} > 0$ (desemprego sobe \rightarrow); abaixo, $\dot{u} < 0$ (\leftarrow). À esquerda de $u = \bar{u}$, $\dot{\pi} > 0$ (\uparrow); à direita, $\dot{\pi} < 0$ (\downarrow). A composição gira no sentido **horário** em torno de E^* , convergindo (foco ou nó).



11.2 Item (b) — Redução não antecipada da meta de inflação

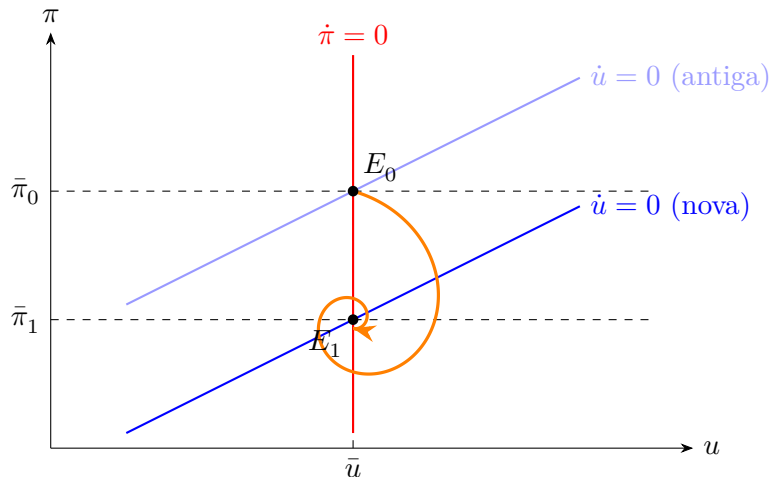
Em t_0 , sem aviso prévio, $\bar{\pi}_0 \rightarrow \bar{\pi}_1 < \bar{\pi}_0$ (permanente).

- A isóclina $\dot{\pi} = 0$ (vertical em \bar{u}) **não se desloca**.
- A isóclina $\dot{u} = 0$ **desloca-se para baixo**, mantendo a inclinação $\theta/(\beta\phi)$: passa a cruzar $(\bar{u}, \bar{\pi}_1)$.
- Novo equilíbrio: $E_1 = (\bar{u}, \bar{\pi}_1)$.

Ausência de salto. Como u e π são **ambas predeterminadas**, em t_0^+ a economia **permanece** em $E_0 = (\bar{u}, \bar{\pi}_0)$. Mas E_0 está agora **acima** da nova isóclina $\dot{u} = 0$, logo

$$\dot{u}|_{E_0} = \alpha\phi(\bar{\pi}_0 - \bar{\pi}_1) > 0, \quad \dot{\pi}|_{E_0} = -\frac{\delta}{\beta}(u - \bar{u}) = 0.$$

O desemprego **começa a subir** (recessão): com $\pi > \bar{\pi}_1$, o BC eleva o juro real ($\rho - \bar{\rho} = \phi(\pi - \bar{\pi}_1) > 0$), contraindo a demanda. Assim que $u > \bar{u}$, a CP via Okun dá $\dot{\pi} < 0$ e a inflação cede. A economia descreve uma trajetória **horária** que converge a E_1 — com **ultrapassagem** (u sobe acima de \bar{u}) e, no caso de foco, oscilações amortecidas.



Conclusão. A queda da meta gera **desinflação custosa**: uma recessão transitória ($u > \bar{u}$, *sacrifice ratio* positiva) durante o ajuste, com a inflação caindo gradualmente até $\bar{\pi}_1$. A neutralidade de longo prazo se mantém ($u \rightarrow \bar{u}$, $y \rightarrow \bar{y}$, $\rho \rightarrow \bar{\rho}$); o único efeito permanente é a inflação — e a taxa nominal de equilíbrio — mais baixas: $r^* = \bar{\rho} + \bar{\pi}_1$.

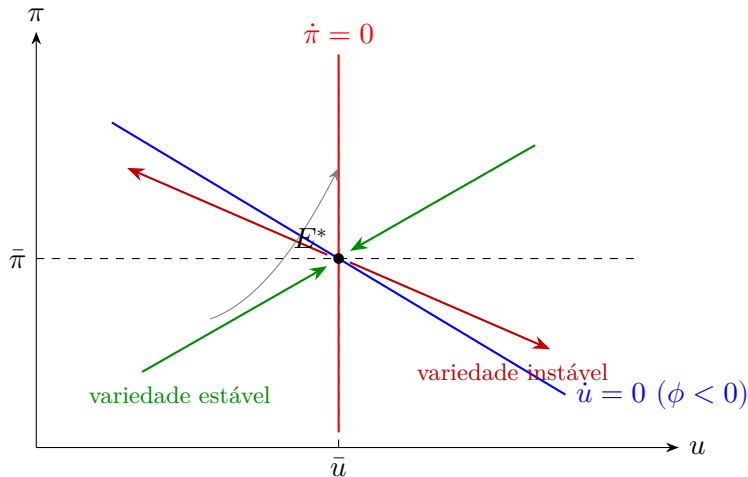
11.3 Item (c) — O caso $\phi < 0$

Com $\phi < 0$, a estabilidade se inverte:

$$\det J = \frac{\alpha\delta\phi}{\beta} < 0 \implies \lambda_1\lambda_2 < 0 \implies \text{ponto de sela (instável)}.$$

Os autovalores são reais de sinais opostos (um positivo, um negativo), independentemente de $\text{tr } J < 0$. Como o sistema **não possui variável de salto** (u e π são ambas determinadas), não há como posicionar a economia sobre a variedade estável: para condições iniciais genéricas a trajetória **diverge**.

Mecanismo econômico (violação do princípio de Taylor). Para $\phi < 0$, a elasticidade da taxa nominal à inflação é $1 + \phi < 1$: diante de $\pi > \bar{\pi}$, o BC eleva r em menos de um para um, de modo que o juro **real cai** ($\rho - \bar{\rho} = \phi(\pi - \bar{\pi}) < 0$). Isso **estimula** a demanda, **reduz** o desemprego, eleva o produto e — pela CP — acelera ainda mais a inflação: um círculo vicioso autoalimentado, sem âncora nominal. Geometricamente, a isóclina $\dot{u} = 0$ passa a ter inclinação $\theta/(\beta\phi) < 0$ (negativa), e a configuração com $\dot{\pi} = 0$ vertical produz a sela abaixo.



Conclusão. Para $\phi < 0$ o equilíbrio é um **ponto de sela instável**: sem variável de salto, a economia não converge a E^* e a inflação (e o desemprego) divergem. O parâmetro ϕ é, portanto, o que garante a **âncora nominal**: $\phi > 0$ (princípio de Taylor satisfeito) estabiliza o sistema, como nos itens (a)–(b); $\phi < 0$ o desestabiliza. O caso de fronteira $\phi = 0$ dá $\det J = 0$ (raiz nula, ausência de força restauradora sobre a inflação).

12 Macroeconomia da Economia Aberta

12.1 Motivação econômica

Até aqui a economia era **fechada**: não havia comércio nem fluxo de capitais com o resto do mundo. Abrir a economia acrescenta três fluxos — de **bens e serviços**, de **capital** e (em princípio) de **fatores**. Concentraremos a atenção na mobilidade de bens e de capital, que introduz duas variáveis novas e centrais: a **taxa de câmbio** e a **conta corrente**.

💡 Do modelo anterior para este

Acrescentamos o **setor externo**. À IS soma-se um termo de competitividade (as exportações líquidas dependem do câmbio real); à Curva de Phillips, um termo de **repasso cambial**; e a política monetária ganha uma restrição internacional (a paridade de juros). O ferramental — Taylor, log-diferenciação, diagrama de fases, Jacobiano — é o **mesmo**; muda o conteúdo econômico. As **Listas 5 e 6** são a versão aberta do modelo IS–CP–RPM: a Lista 5 com **câmbio fixo**, a Lista 6 com **câmbio flexível**.

12.2 Arbitragem de preços: a Paridade do Poder de Compra

A primeira força que conecta economias é a **arbitragem de bens**. Sejam S a taxa de câmbio nominal (reais por dólar), P o preço do bem doméstico e P^* o preço do bem externo (em dólares). A **lei do preço único** diz que, na ausência de tarifas e custos de transporte, um bem comercializável custa o mesmo em toda parte:

$$SP^* = P \implies \boxed{S = \frac{P}{P^*}}$$

Se $SP^* > P$, compra-se barato dentro e vende-se caro fora; a demanda interna sobe, P sobe e P^* cai, até a igualdade. Esta é a **Paridade do Poder de Compra (PPC) absoluta**.

Tomando log e derivando no tempo, obtemos a dinâmica do câmbio nominal:

$$\ln S = \ln P - \ln P^* \implies \frac{\dot{S}}{S} = \frac{\dot{P}}{P} - \frac{\dot{P}^*}{P^*} = \pi - \pi^*$$

A variação do câmbio nominal é o **diferencial de inflação**: quem inflaciona mais, deprecia.

i Ferramenta matemática: diferenciação logarítmica (de novo)

O passo $\frac{\dot{S}}{S} = \pi - \pi^*$ é a mesma técnica da Curva de Phillips: \ln transforma o quociente P/P^* em diferença, e a derivada temporal de \ln é a taxa de crescimento. Ver *Função Logaritmo Natural* nas Notas de Matemática.

12.2.1 Câmbio real e competitividade

A variável que mede competitividade é a **taxa de câmbio real**:

$$q = \frac{SP^*}{P}$$

isto é, quantos bens domésticos valem um bem externo. Sob PPC absoluta, $q = 1$ (constante). Mas há bens **não-comercializáveis** (corte de cabelo, serviços): para eles a lei do preço único não vale. Separando comercializáveis (T) e não-comercializáveis (N), mostra-se que

$$q = f\left(\frac{P_N^*/P_T^*}{P_N/P_T}\right),$$

ou seja, o câmbio real depende dos **preços relativos** entre não-comercializáveis e comercializáveis nos dois países. Uma **apreciação real** ($q \downarrow$) é quando o bem doméstico passa a valer mais na troca — e a economia perde competitividade.

💡 O modelo no mundo real: gasto público, doença holandesa e as mini-desvalorizações de Delfim

Quando o governo **gasta mais**, compra sobretudo **não-comercializáveis** (serviços): P_N/P_T sobe e q **aprecia**. Quando sobem os **preços de commodities** (exportações), entram dólares e o câmbio **aprecia** — o padrão de 2003–2011 no Brasil. Já nas **mini-desvalorizações de Delfim Neto** (anos 1970), o câmbio era controlado: como a inflação brasileira superava a americana, q apreciava automaticamente (perda de competitividade), e a solução era desvalorizar o nominal em pequenos passos para reverter a apreciação real.

12.3 Arbitragem de juros: a Paridade de Juros

A segunda força é a **arbitragem de capital**. Um investidor compara aplicar R\$ 1 no Brasil, rendendo $(1 + r)$, com aplicá-lo no exterior: troca por dólar ($1/S_t$), rende $(1 + r^*)$, e reconverte à taxa esperada S_{t+1}^e . O equilíbrio (não-arbitragem) é a **Paridade de Juros Descoberta (PJD)**:

$$(1 + r_t) = (1 + r_t^*) \frac{S_{t+1}^e}{S_t}.$$

Tomando log e usando $\ln(1 + x) \approx x$:

$$r_t \approx r_t^* + (\ln S_{t+1}^e - \ln S_t) \implies \boxed{r_t - r_t^* = (\text{depreciação cambial esperada}).}$$

O juro doméstico só pode superar o externo se o mercado **espera depreciação** — caso contrário, haveria lucro de arbitragem. Se o contrato usa o câmbio **futuro** F_t em vez da expectativa, tem-se a **Paridade Coberta (PJC)**, $1 + r_t = (1 + r_t^*)F_t/S_t$, que elimina o risco cambial.

12.3.1 Paridade real e a equação que fecha os modelos

Repetindo o exercício em termos **reais** (usando Fisher $1 + r = (1 + \rho)(1 + \pi)$), chega-se à **paridade de juros real**, que é a equação central das Listas 5–6:

$$\boxed{\dot{q} = \rho - \rho^* \iff \rho - \bar{\rho} = \dot{q}, \text{ com } \bar{\rho} = \rho^*.$$

O juro real doméstico excede o externo na exata medida da **depreciação real esperada** \dot{q} .

💡 O modelo no mundo real: Mantega segurando o câmbio e o papel das reservas

Quando o diferencial de juros é alto, entra capital e o câmbio **aprecia** até a PJD voltar a valer. Na gestão Mantega, o governo tentou **segurar** o câmbio comprando dólar (acumulando reservas) — mas, como o estoque de dólares do mundo é grande e o diferencial era custoso de financiar, isso só se sustenta por pouco tempo; pior, sinaliza depreciação futura e atrai ainda mais capital. As **reservas** não servem para mudar a tendência do câmbio, e sim para **reduzir a volatilidade** (suavizar o ciclo) e, sendo o país credor em dólar, funcionam como seguro em crises.

12.4 A balança comercial: Marshall–Lerner e a curva J

Numa economia aberta, $y = C + I + G + (X - Z)$, em que $X - Z$ são as exportações líquidas. Em termos reais, a **conta corrente** é

$$CC = x(q) - qz(q), \quad x'(q) > 0, \quad z'(q) < 0,$$

exportações crescentes e importações decrescentes no câmbio real (depreciação estimula exportar, desestimula importar). Mas note o termo $qz(q)$: depreciar ($q \uparrow$) encarece as importações em reais — um **efeito-preço** que pode dominar o efeito-quantidade.

Diferenciando e usando elasticidades, mostra-se a **condição de Marshall–Lerner**:

$$\frac{\partial CC}{\partial q} > 0 \iff \eta_{x,q} + |\eta_{z,q}| > 1,$$

isto é, uma depreciação só melhora a conta corrente se a **soma das elasticidades** de exportações e importações superar 1 (as quantidades reagem mais que o preço).

i Ferramenta matemática: elasticidades como derivadas logarítmicas

A elasticidade $\eta_{x,q} = \frac{\partial x/x}{\partial q/q} = \frac{\partial \ln x}{\partial \ln q}$ é, de novo, uma derivada de logaritmos — mede a resposta percentual. A condição de Marshall–Lerner é, em essência, um sinal de derivada ($\partial CC/\partial q$) decomposto em elasticidades. Ver *Derivadas* (elasticidade) nas Notas de Matemática.

Curva J. No instante de uma depreciação, as quantidades estão presas por contratos: só vale o efeito-preço, e a conta corrente **piora** primeiro; depois, à medida que as quantidades reagem, melhora. O gráfico desse percurso tem o formato de um “J” — observado no Brasil após a desvalorização de 1999.

12.5 A identidade poupança–investimento e os déficits gêmeos

Rearranjando $y = C + I + G + (X - Z)$ com $S_p = y - C - T$ e $S_g = T - G$:

$$\underbrace{S_p + S_g}_S - I = (X - Z) = CC.$$

A poupança nacional menos o investimento é igual à conta corrente — que, por sua vez, é o **investimento externo líquido** ($CC = IEL$). Um país que poupa mais do que investe exporta capital; o que investe mais do que poupa, importa capital.

Déficits gêmeos. Um aumento do déficit público ($S_g \downarrow$) reduz $S - I$ e, via $S - I = CC$, gera **déficit em conta corrente** (com apreciação real). É a ligação entre déficit fiscal e déficit externo.

Na **pequena economia aberta**, o país é tomador de preço: $\bar{\rho} = \rho^*$. O câmbio real é a variável que ajusta o balanço de pagamentos, $S(\rho^*) - I(\rho^*) = CC(q)$. Uma alta do juro externo eleva a poupança e reduz o investimento, exigindo **depreciação real** para gerar o superávit comercial correspondente.

12.6 A IS da economia aberta: derivação

Com o setor externo, o produto é $y = C(y - T, \rho) + I(\rho) + G + CC(q)$, com $CC'(q) > 0$ (Marshall-Lerner). Repetindo o método do Capítulo 3 — subtrair a versão de longo prazo e linearizar por **Taylor** cada função em torno do equilíbrio:

$$y - \bar{y} = \underbrace{C'[(y - \bar{y}) - (T - \bar{T})]}_{\text{Taylor de } C} + \underbrace{I'(\rho - \bar{\rho})}_{\text{Taylor de } I} + (G - \bar{G}) + \underbrace{CC'(q - \bar{q})}_{\text{Taylor de } CC}.$$

Isolando $y - \bar{y}$ (multiplicador $\frac{1}{1-C'}$) e dividindo por \bar{y} (truque do log), chega-se à **IS aberta** usada nas Listas 5–6:

$$y - \bar{y} = -\alpha(\rho - \bar{\rho}) + \beta(q - \bar{q}) + \gamma_f(f - \bar{f}) + (G - \bar{G}),$$

em que $\beta > 0$ mede a **competitividade** (câmbio real depreciado estimula o produto). É a IS do Módulo 1 acrescida do termo $\beta(q - \bar{q})$ — a única novidade estrutural na demanda.

💡 Do modelo anterior para este — e a ponte para os regimes cambiais

À demanda agregada acrescentamos o **canal de competitividade** ($\beta(q - \bar{q})$ na IS) e o **repasso cambial** (γ_f na CP); a política monetária ganha a restrição da **paridade de juros**. Com esses três ingredientes, a forma do modelo passa a depender inteiramente da **regra cambial**. O próximo capítulo deriva, em detalhe e com diagrama de fases, os **dois modelos** que daí resultam: o **Modelo de Câmbio Fixo** (Lista 5) e o **Modelo de Câmbio Flexível** (Lista 6).

12.7 Exercícios comentados

Exercício 1 (PPC e câmbio real). Mostre que, sob PPC absoluta, $\dot{S}/S = \pi - \pi^*$ e q é constante. O que ocorre com q quando há bens não-comercializáveis e o governo aumenta gastos?

Exercício 2 (PJD). Derive $r - r^* =$ depreciação esperada a partir da arbitragem $(1 + r) = (1 + r^*)S_{t+1}^e/S_t$, explicitando o uso de $\ln(1 + x) \approx x$. Interprete o caso em que o diferencial de juros atrai capital.

Exercício 3 (Marshall-Lerner). Deduza a condição $\eta_{x,q} + |\eta_{z,q}| > 1$ e explique a curva J em termos de efeito-preço vs efeito-quantidade.

Exercício 4 (IS aberta). Derive a IS aberta por expansão de Taylor a partir de $y = C(y - T, \rho) + I(\rho) + G + CC(q)$, identificando os coeficientes α e β .

13 Regimes Cambiais: o Modelo de Câmbio Fixo e o Modelo de Câmbio Flexível

Este capítulo é o coração do Módulo 2. Pegamos o arcabouço IS–CP–RPM do Módulo 1 e o abrimos ao exterior, obtendo **dois modelos** que se distinguem apenas pela **regra de política monetária (RPM)**: fixar a taxa de câmbio nominal (**câmbio fixo**) ou seguir uma regra de Taylor de juros (**câmbio flexível**). São, respectivamente, os modelos das **Listas 5 e 6**. A ênfase aqui é o **processo matemático**: como, em cada regime, reduzimos o sistema a duas equações diferenciais, montamos o Jacobiano e lemos a dinâmica no diagrama de fases.

i O ingrediente comum: a dinâmica do câmbio real

Em ambos os modelos, a taxa de câmbio real é $q = \frac{SP^*}{P}$. Tomando log e derivando no tempo,

$$\ln q = \ln S + \ln P^* - \ln P \implies \dot{q} = \frac{\dot{S}}{S} + \pi^* - \pi,$$

e a paridade de juros real (PJD) fornece $\rho - \bar{\rho} = \dot{q}$, com $\bar{\rho} = \rho^*$. O que muda entre os regimes é o que acontece com \dot{S}/S : **zero** sob câmbio fixo, **endógeno** sob câmbio flexível.

14 O Modelo de Câmbio Fixo (Lista 5)

14.1 As equações do modelo

$$\text{IS: } y - \bar{y} = -\alpha(\rho - \bar{\rho}) + \beta(q - \bar{q})$$

$$\text{CP: } \dot{\pi} = \gamma\dot{q} + \delta(y - \bar{y})$$

$$\text{PJD: } \rho = \bar{\rho} + \dot{q}, \quad \bar{\rho} = \rho^*$$

$$\text{RPM: } s = \bar{s}$$

$$\text{CI: } p(0), \pi(0)$$

A RPM é $s = \bar{s}$: o instrumento de política é a **taxa de câmbio nominal**, mantida fixa. As variáveis endógenas são y, ρ, q, π, s .

14.2 Derivação do sistema dinâmico

Passo 1 — a lei de movimento do câmbio real. Com $S = \bar{s}$ fixo ($\dot{S} = 0$) e inflação externa constante,

$$\dot{q} = \pi^* - \pi.$$

Note que q é **predeterminada** (depende de p , dado por $p(0)$), assim como π — **nenhuma das duas salta**.

Passo 2 — eliminar o juro pela PJD. Como $\rho - \bar{\rho} = \dot{q} = \pi^* - \pi$, a IS fica

$$y - \bar{y} = -\alpha(\pi^* - \pi) + \beta(q - \bar{q}) = \alpha(\pi - \pi^*) + \beta(q - \bar{q}).$$

Passo 3 — montar o sistema em (q, π) . Levando $\dot{q} = \pi^* - \pi$ à CP:

$$\dot{\pi} = \gamma(\pi^* - \pi) + \delta(y - \bar{y}).$$

Definindo desvios $\tilde{q} = q - \bar{q}$, $\tilde{\pi} = \pi - \pi^*$ e substituindo $y - \bar{y} = \alpha\tilde{\pi} + \beta\tilde{q}$:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{q}} = -\tilde{\pi}, \\ \dot{\tilde{\pi}} = \delta\beta\tilde{q} + (\alpha\delta - \gamma)\tilde{\pi}. \end{cases}$$

Passo 4 — equilíbrio. $\dot{q} = 0 \Rightarrow \pi = \pi^*$; $\dot{\pi} = 0$ com $\tilde{\pi} = 0 \Rightarrow \tilde{q} = 0$. Logo $E^* = (\bar{q}, \pi^*)$, com $y = \bar{y}$.

! Resultado central: inflação importada

No equilíbrio, $\pi = \pi^*$ — a inflação de longo prazo é a **externa**, não a meta $\bar{\pi}$ (que sequer aparece nas equações). Sob câmbio fixo a âncora nominal é o próprio *peg*, e o país **abre mão da política monetária**: a PJD com $\dot{s} = 0$ impõe $r = r^*$. A meta $\bar{\pi}$ é inoperante.

14.3 Classificação e diagrama de fases

O Jacobiano e seus invariantes:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \delta\beta & \alpha\delta - \gamma \end{pmatrix}, \quad \det J = \delta\beta > 0, \quad \text{tr } J = \alpha\delta - \gamma.$$

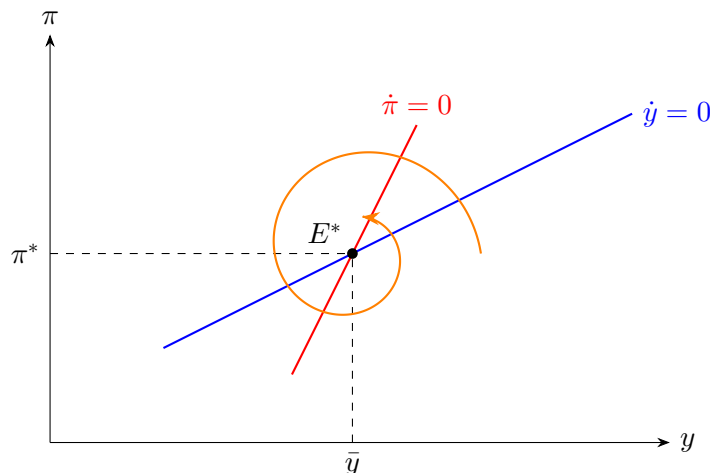
Como $\det J > 0$ **sempre**, nunca há sela; a estabilidade depende do traço:

$$\gamma > \alpha\delta \implies \text{tr } J < 0 \implies E^* \text{ estável.}$$

A força **estabilizadora** é o **repasso cambial** γ (quando $\pi > \pi^*$, q aprecia e isso esfria a inflação); a **desestabilizadora** é o canal do juro real $\alpha\delta$ (com $r = r^*$ preso, π alto reduz ρ e aquece). As isóclinas em (y, π) são ambas positivamente inclinadas por E^* :

$$\dot{\pi} = 0: \pi = \pi^* + \frac{\delta}{\gamma}(y - \bar{y}); \quad \dot{y} = 0: \pi = \pi^* + \frac{\alpha\delta}{\alpha\gamma + \beta}(y - \bar{y}),$$

com a primeira mais inclinada.



Sob $\gamma > \alpha\delta$, a convergência é em **espiral amortecida** (foco) ou monótona (nó), conforme o discriminante. Se $\gamma < \alpha\delta$, o equilíbrio é **instável** — e, como nada pode saltar, a paridade torna-se dinamicamente insustentável (a assimetria que costuma derrubar regimes de câmbio fixo: apreciação real sistemática \Rightarrow perda de reservas).

15 O Modelo de Câmbio Flexível (Lista 6)

15.1 As equações do modelo

A única mudança é a **RPM**, que volta a ser uma **regra de Taylor**; o câmbio nominal flutua (variável de salto):

$$\begin{aligned} \text{IS: } & y - \bar{y} = -\alpha(\rho - \bar{\rho}) + \beta(q - \bar{q}) \\ \text{CP: } & \dot{\pi} = \gamma\dot{q} + \delta(y - \bar{y}) \\ \text{PJD: } & \rho = \bar{\rho} + \dot{q}, \quad \bar{\rho} = \rho^* \\ \text{RPM: } & r = \bar{\rho} + \pi + \phi(\pi - \bar{\pi}) + \theta(q - \bar{q}) \\ \text{CI: } & p(0), \pi(0) \end{aligned}$$

15.2 Derivação do sistema dinâmico em (ρ, q)

Passo 1 — taxa de juros real pela RPM. Como $\rho = r - \pi$,

$$\rho - \bar{\rho} = \phi(\pi - \bar{\pi}) + \theta(q - \bar{q}).$$

Passo 2 — a lei de movimento do câmbio real. Da PJD,

$$\dot{q} = \rho - \bar{\rho}.$$

Aqui π é **predeterminada**, mas q é variável de **salto** (o câmbio nominal flutua).

Passo 3 — derivar $\dot{\rho}$. Diferenciando $(\rho - \bar{\rho}) = \phi(\pi - \bar{\pi}) + \theta(q - \bar{q})$ no tempo e usando a CP $\dot{\pi} = \gamma\dot{q} + \delta(y - \bar{y})$ com $y - \bar{y} = -\alpha(\rho - \bar{\rho}) + \beta(q - \bar{q})$:

$$\dot{\rho} = \phi\dot{\pi} + \theta\dot{q} = \phi[\gamma\dot{q} + \delta(-\alpha\bar{\rho} + \beta\bar{q})] + \theta\dot{q}.$$

Com $\tilde{q} = q - \bar{q}$, $\tilde{\rho} = \rho - \bar{\rho}$, o sistema é

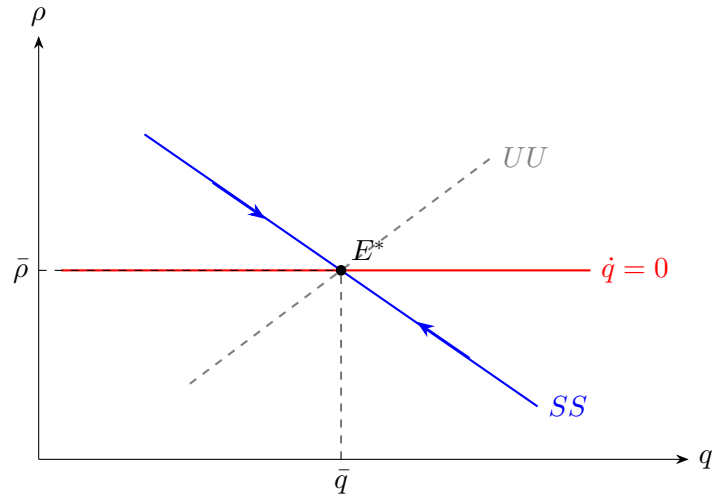
$$\begin{cases} \dot{q} = \tilde{\rho}, \\ \dot{\rho} = \phi\delta\beta\tilde{q} + [\theta + \phi(\gamma - \delta\alpha)]\tilde{\rho}. \end{cases}$$

Passo 4 — equilíbrio e classificação.

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \phi\delta\beta & \theta + \phi(\gamma - \delta\alpha) \end{pmatrix}, \quad \det J = -\phi\delta\beta < 0.$$

$$\det J < 0 \implies E^* = (\bar{q}, \bar{\rho}) \text{ é um ponto de sela.}$$

Isso é **estrutural**: uma variável predeterminada (π) e uma de salto (q) \Rightarrow uma única variedade estável SS , sobre a qual o câmbio salta. Aqui $\pi = \bar{\pi}$ no longo prazo — a meta é **operante**, ao contrário do câmbio fixo.



i Ferramenta matemática: sela = autovalores reais de sinais opostos

$\det J = \lambda_1 \lambda_2 < 0$ obriga $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ (capítulo *Álgebra Linear*). O autovetor de $\lambda_1 < 0$ define a **variedade estável SS**; sua inclinação no plano (q, ρ) é o próprio λ_1 (pela 1ª linha do sistema, $v_\rho = \lambda v_q$). Como **SS** tem inclinação negativa para **qualquer** parâmetro, ρ e q são **sempre negativamente correlacionados** ao longo do ajuste — o resultado robusto pedido na Lista 6.

15.3 Estática dinâmica: redução da meta e *overshooting*

Reduza a meta, $\bar{\pi}_0 \rightarrow \bar{\pi}_1 < \bar{\pi}_0$. No impacto, $\pi = \bar{\pi}_0$ (predeterminada): a RPM exige $\rho - \bar{\rho} = \phi(\bar{\pi}_0 - \bar{\pi}_1) > 0$ (juro real sobe). Pela PJD, juro alto atrai capital e o câmbio **aprecia no impacto** (q salta para baixo, sobre a nova **SS**); como $\rho > \bar{\rho}$, $\dot{q} > 0$, o câmbio **deprecia gradualmente** rumo a \bar{q} . É o **overshooting** de Dornbusch: o câmbio ultrapassa o novo equilíbrio e volta. Em (y, π) , o produto cai no impacto (recessão) e a inflação cede até $\bar{\pi}_1$ — desinflação custosa, como no Módulo 1, agora com o canal cambial.

💡 Do modelo anterior para este — os dois regimes lado a lado

| | Câmbio fixo (Lista 5) | Câmbio flexível (Lista 6) |
|----------------------|-----------------------------|--|
| RPM | $s = \bar{s}$ | regra de Taylor |
| salta | nada (q , predet.) | câmbio q |
| $\det J$ | $\delta\beta > 0$ (nó/foco) | $-\phi\delta\beta < 0$ (sela) |
| estável se | $\gamma > \alpha\delta$ | sempre (na variedade estável) |
| âncora / inflação LP | peg / π^* importada | meta / $\bar{\pi}$ |
| política monetária | abdicada ($r = r^*$) | autônoma |

A mesma caixa de ferramentas (PJD, RPM, Jacobiano, \det/tr , diagrama de fases) gera dois mundos opostos — o que muda é uma linha: a RPM.

15.4 Exercícios comentados

Exercício 1. No câmbio fixo, mostre que $\dot{q} = \pi^* - \pi$ e que $E^* = (\bar{q}, \pi^*)$. Por que $\bar{\pi}$ não aparece?

Exercício 2. Deduza $\det J = \delta\beta$ e $\text{tr } J = \alpha\delta - \gamma$ no câmbio fixo e interprete a condição $\gamma > \alpha\delta$.

Exercício 3. No câmbio flexível, mostre que $\det J = -\phi\delta\beta < 0$ e explique por que o equilíbrio é sempre uma sela. Quem salta?

Exercício 4. Compare o efeito de uma redução da meta nos dois regimes. Em qual há *overshooting* cambial? Em qual a meta é inoperante?

Monitorias do Módulo 2 — Resoluções das Listas 5 e 6

As monitorias deste módulo são as **resoluções completas das Listas 5 e 6**, que abrem a economia: o modelo de **câmbio fixo** (Lista 5) e o de **câmbio flexível** (Lista 6).

16 Monitoria 5 — Lista 5: Economia aberta — câmbio fixo

Resolução completa da Lista 5 (enunciado original em `Lista_5.pdf`; a resolução também é distribuída separadamente como `Lista05_Resolucao`). Esta é a monitoria do módulo: o modelo da lista, resolvido passo a passo.

16.1 Exercício 1

Enunciado. Considere o seguinte modelo:

$$\begin{aligned}\mathbf{IS:} \quad & y - \bar{y} = -\alpha(\rho - \bar{\rho}) + \beta(q - \bar{q}) \\ \mathbf{CP:} \quad & \dot{\pi} = \phi \dot{q} + \theta(y - \bar{y}) \\ \mathbf{PJD:} \quad & \rho = \bar{\rho} + \dot{q}, \quad \bar{\rho} = \rho^* \\ \mathbf{RPM:} \quad & s = \bar{s} \\ \mathbf{CI:} \quad & p(0), \pi(0)\end{aligned}$$

em que y é o produto real, \bar{y} é o produto potencial, \dot{x} é a derivada da variável x com relação ao tempo, dx/dt , ρ é a taxa de juros real, $\bar{\rho}$ é a taxa de juros real de longo prazo, q é a taxa de câmbio real, \bar{q} é a taxa de câmbio real de longo prazo, π é a taxa de inflação, $\bar{\pi}$ é a meta de inflação e α , β , ϕ e θ são parâmetros positivos. Suponha ainda que a taxa de inflação externa é constante.

Mudamos de uma economia **fechada** (Listas 1–4) para uma **economia aberta pequena com mobilidade de capitais**. As três novidades estruturais são: (i) a IS depende agora também da **competitividade** $\beta(q - \bar{q})$ — um câmbio real depreciado ($q > \bar{q}$) estimula o produto via exportações líquidas; (ii) a curva de Phillips ganha o termo de **repasso cambial** $\phi \dot{q}$ — variações do câmbio real pressionam a inflação (*pass-through*); e (iii) a regra de política monetária deixa de ser uma regra de Taylor e passa a ser $s = \bar{s}$, ou seja, o instrumento do Banco Central é a **taxa de câmbio nominal**, fixada. A paridade descoberta de juros (PJD) em termos reais, $\rho - \bar{\rho} = \dot{q}$, com $\bar{\rho} = \rho^*$ (juro neutro doméstico igual ao externo), fecha o modelo.

16.1.1 Item 1 — Regime cambial

Pergunta. Descreva o regime cambial desta economia.

A regra de política é $s = \bar{s}$: a **taxa de câmbio nominal é fixada** (constante). Trata-se, portanto, de um regime de **câmbio fixo** (*peg*). As implicações são as do “trilema” da economia aberta:

1. Perda de autonomia monetária. Com mobilidade perfeita de capitais, a PJD nominal exige $r = r^* + \dot{s}$; como $s = \bar{s} \Rightarrow \dot{s} = 0$, segue $r = r^*$. O juro nominal doméstico fica **amarrado** ao externo

— o Banco Central **não** o escolhe livremente. Em termos reais, $\rho = r^* - \pi$ e $\bar{\rho} = \rho^* = r^* - \pi^*$, de modo que

$$\rho - \bar{\rho} = \pi^* - \pi$$

(coerente com a PJD $\rho - \bar{\rho} = \dot{q}$, como mostraremos).

2. Oferta de moeda endógena. Para sustentar a paridade, a autoridade compra/vende reservas; a base monetária deixa de ser instrumento e torna-se **endógena**. O “RPM” deste modelo é, na prática, uma regra de **intervenção cambial**, não uma regra de juros.

3. Âncora nominal e inflação importada. Como a taxa de câmbio real é $q = \bar{s} + p^* - p$ (em logs) e o câmbio nominal está fixo, $\dot{q} = \dot{s} + \pi^* - \pi = \pi^* - \pi$. A estacionariedade do câmbio real ($\dot{q} = 0$) exige, no longo prazo,

$$\pi = \pi^*$$

isto é, a inflação doméstica **converge para a inflação externa**. A âncora nominal é o próprio *peg*: a inflação é **importada**, e a meta $\bar{\pi}$ (que sequer aparece nas equações) é **inoperante** sob câmbio fixo. O ajuste do câmbio real, quando necessário, se dá pelo **nível de preços** p (depreciação/apreciação real “por dentro”), não pelo câmbio nominal.

16.1.2 Item 2 — Equilíbrio e dinâmica

Pergunta. Mostre em um diagrama de fases, com π no eixo vertical e y no eixo horizontal, o equilíbrio e a dinâmica deste modelo.

Lei de movimento do câmbio real. Como $q = \bar{s} + p^* - p$ com \bar{s} fixo e inflação externa constante,

$$\dot{q} = \pi^* - \pi.$$

Note que q é **predeterminado** (depende de p , dado por $p(0)$), tal como π (dado por $\pi(0)$): **nenhuma das duas salta**.

Redução do sistema. Da PJD, $\rho - \bar{\rho} = \dot{q} = \pi^* - \pi$. Levando à IS,

$$y - \bar{y} = -\alpha(\pi^* - \pi) + \beta(q - \bar{q}) = \alpha(\pi - \pi^*) + \beta(q - \bar{q}).$$

Derivando no tempo e usando $\dot{q} = \pi^* - \pi$:

$$\dot{y} = \alpha\dot{\pi} + \beta\dot{q} = \alpha\dot{\pi} - \beta(\pi - \pi^*).$$

A curva de Phillips fornece $\dot{\pi} = \phi\dot{q} + \theta(y - \bar{y}) = -\phi(\pi - \pi^*) + \theta(y - \bar{y})$. Substituindo, obtemos o sistema autônomo em (y, π) (com desvios $\tilde{y} = y - \bar{y}$, $\tilde{\pi} = \pi - \pi^*$):

$$\begin{cases} \dot{y} = \alpha\theta(y - \bar{y}) - (\alpha\phi + \beta)(\pi - \pi^*), \\ \dot{\pi} = \theta(y - \bar{y}) - \phi(\pi - \pi^*). \end{cases}$$

Equilíbrio. $\dot{\pi} = 0$ e $\dot{y} = 0$ dão $\tilde{y} = 0$ e $\tilde{\pi} = 0$: $E^* = (\bar{y}, \pi^*)$, com $q = \bar{q}$ e $\rho = \bar{\rho}$. A inflação de longo prazo é a **externa** π^* — não a meta $\bar{\pi}$, ratificando o Item 1.

Isóclinas nulas. Ambas passam por E^* e são **positivamente inclinadas**:

- $\dot{\pi} = 0$: $\pi - \pi^* = \frac{\theta}{\phi} (y - \bar{y})$;
- $\dot{y} = 0$: $\pi - \pi^* = \frac{\alpha\theta}{\alpha\phi + \beta} (y - \bar{y})$.

Como $\frac{\theta}{\phi} - \frac{\alpha\theta}{\alpha\phi + \beta} = \frac{\beta\theta}{\phi(\alpha\phi + \beta)} > 0$, a isóclina $\dot{\pi} = 0$ é **mais inclinada** que a $\dot{y} = 0$.

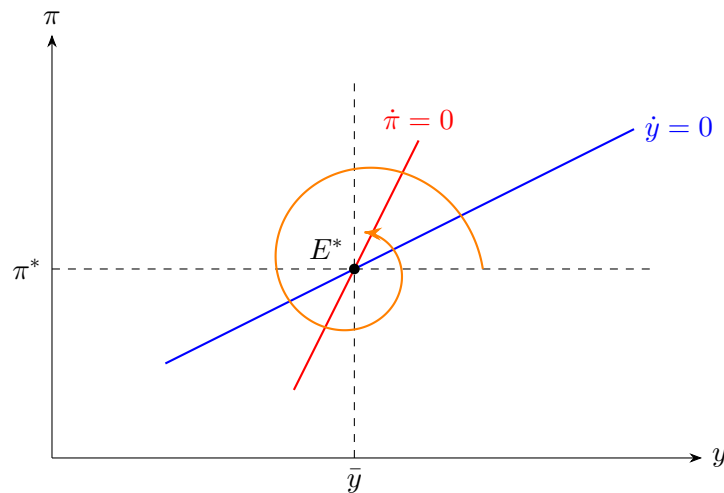
Classificação. O Jacobiano em E^* é

$$J = \begin{pmatrix} \alpha\theta & -(\alpha\phi + \beta) \\ \theta & -\phi \end{pmatrix}, \quad \text{tr } J = \alpha\theta - \phi, \quad \det J = \beta\theta > 0.$$

Como $\det J = \beta\theta > 0$ **sempre**, os autovalores têm o **mesmo sinal**: o equilíbrio é um **nó** ou um **foco**, **nunca uma sela**. O sinal de $\text{tr } J = \alpha\theta - \phi$ decide a estabilidade:

$$\phi > \alpha\theta \Rightarrow \text{tr } J < 0 \Rightarrow E^* \text{ assintoticamente estável.}$$

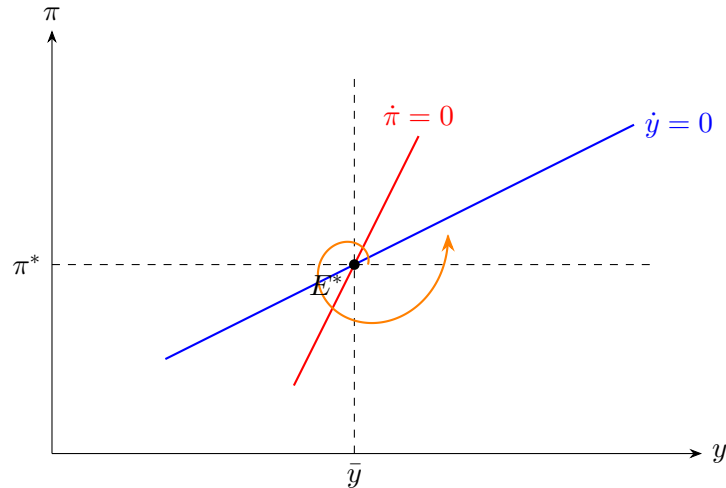
A leitura econômica é transparente. O termo de **repasso cambial** ϕ é a força **estabilizadora**: se $\pi > \pi^*$, o câmbio real **aprecia** ($\dot{q} = \pi^* - \pi < 0$), o que reduz a inflação diretamente (via $\phi\dot{q}$) e contrai o produto pela perda de competitividade (via β , que garante $\det J > 0$). A força **desestabilizadora** é o canal do juro real: com $\pi > \pi^*$ tem-se $\rho < \bar{\rho}$ (juro real abaixo do neutro, pois o nominal está preso a r^*), o que **aquece** o produto (via α). A estabilidade exige que o repasse/competitividade domine o canal do juro real, $\phi > \alpha\theta$. Satisfeita essa condição, a convergência é **monótona** (nó) se $\Delta = (\alpha\theta - \phi)^2 - 4\beta\theta > 0$ e em **espiral amortecida** (foco) se $\Delta < 0$.



Leitura da dinâmica. O fluxo gira no sentido **anti-horário** em torno de E^* : a leste do equilíbrio ($y > \bar{y}$) tem-se $\dot{\pi} > 0$, e ao norte ($\pi > \pi^*$) tem-se $\dot{y} < 0$ e $\dot{\pi} < 0$ (o câmbio real aprecia e esfria a economia). Como π e q são predeterminadas e o equilíbrio é estável (sob $\phi > \alpha\theta$), a partir de **qualquer** condição inicial a economia converge a E^* sem saltos, com inflação importada π^* e câmbio real em \bar{q} .

Caso instável. Se $\phi < \alpha\theta$, então $\text{tr } J > 0$ (com $\det J > 0$): os autovalores têm parte real **positiva** e E^* é um nó/foco **instável**. As isoclinas mantêm a mesma configuração (ambas positivamente

inclinadas, $\dot{\pi} = 0$ mais inclinada), mas o sentido anti-horário do fluxo agora **afasta** as trajetórias do equilíbrio. Como nada pode saltar (não há braço estável de sela a “escolher”, pois não é sela), um desvio inicial qualquer se **autoalimenta** — o canal do juro real domina e a paridade torna-se dinamicamente insustentável. A viabilidade do *peg* requer repasse cambial forte o bastante, $\phi > \alpha\theta$.



16.2 Exercício 2

Enunciado. Considere o seguinte modelo de uma economia aberta pequena (enfoque monetário do Balanço de Pagamentos com taxa de câmbio flexível):

$$\text{Mercado monetário (país A): } \frac{M}{P} = L(y, r)$$

$$\text{Mercado monetário (país B): } \frac{M^*}{P^*} = L(y^*, r^*)$$

$$\text{Taxa de câmbio (PPC): } S = \frac{P}{P^*}$$

Comente as seguintes proposições.

Este é o **enfoque monetário do balanço de pagamentos sob câmbio flexível**: a taxa de câmbio nominal é o **preço relativo de duas moedas**, determinado pelo equilíbrio dos **dois mercados monetários** junto com a **paridade do poder de compra (PPC)**. A demanda real por moeda $L(\cdot)$ é **crecente na renda** ($L_y > 0$, motivo transação) e **decrecente no juro** ($L_r < 0$, custo de oportunidade). Resolvendo cada mercado para o nível de preços, $P = M/L(y, r)$ e $P^* = M^*/L(y^*, r^*)$, e levando à PPC obtém-se a **equação-chave**:

$$S = \frac{P}{P^*} = \frac{M}{M^*} \cdot \frac{L(y^*, r^*)}{L(y, r)}$$

ou, em logaritmos/taxas de crescimento ($\hat{x} \equiv \dot{x}/x$),

$$\hat{S} = (\hat{M} - \hat{M}^*) - (\hat{L} - \hat{L}^*).$$

Adoto a convenção usual: S é o preço da moeda estrangeira em moeda doméstica (R\$/US\$), de modo que $S \uparrow$ é **depreciação** da moeda doméstica e $S \downarrow$ é **apreciação**. O ponto central do enfoque monetário é que o câmbio responde a **excessos de oferta/demanda de moeda**, não diretamente ao fluxo comercial.

16.2.1 Item 1 — “O câmbio se desvaloriza quando o país cresce mais rápido que os outros”

Proposição. A taxa de câmbio se desvaloriza quando o país cresce mais rapidamente do que os outros.

Falsa. Um aumento de y (país A cresce mais rápido) eleva a **demanda real por moeda** $L(y, r)$. Pela equação-chave,

$$\frac{\partial S}{\partial y} = -\frac{M}{M^*} L(y^*, r^*) \frac{L_y}{L(y, r)^2} < 0 \quad (L_y > 0),$$

ou seja, \hat{S} **cai**: a moeda doméstica **se aprecia**, não se desvaloriza.

A intuição é a do enfoque monetário: crescimento mais rápido cria **excesso de demanda por moeda**; com M dado, esse excesso é eliminado por uma **queda do nível de preços** P (entrada de moeda/superávit no balanço de pagamentos), e, pela PPC, preços domésticos mais baixos significam moeda **mais forte**. O resultado é o **oposto** da intuição “tradicional” (visão de elasticidades/absorção, em que crescer mais rápido suga importações e desvaloriza): aqui domina o **canal da demanda de moeda**, e crescer mais rápido **aprecia** o câmbio.

16.2.2 Item 2 — “O câmbio se aprecia quando a moeda cresce mais rápido que a dos outros”

Proposição. A taxa de câmbio se aprecia quando o estoque de moeda cresce mais rapidamente do que o estoque de moeda dos outros países.

Falsa. Da equação-chave, com M^*, y, r constantes,

$$\frac{\partial S}{\partial M} = \frac{1}{M^*} \cdot \frac{L(y^*, r^*)}{L(y, r)} > 0,$$

e em taxas de crescimento $\hat{S} = (\hat{M} - \hat{M}^*) - (\hat{L} - \hat{L}^*)$ mostra que, se $\hat{M} > \hat{M}^*$ (moeda doméstica crescendo mais rápido), então $\hat{S} > 0$: a moeda doméstica **se deprecia**, não se aprecia.

A intuição é o resultado monetário clássico: crescimento monetário relativo mais alto gera **excesso de oferta de moeda**, que se traduz em **inflação doméstica maior** (P sobe) e, pela PPC, em **depreciação proporcional** do câmbio. No longo prazo, a diferença entre as taxas de crescimento monetário se transmite **um para um** à taxa de depreciação (neutralidade da moeda em economia aberta). A proposição inverte o sinal.

Síntese. Ambas as proposições estão **invertidas** em relação ao enfoque monetário: quem **cresce mais** tende a **apreciar** (mais demanda de moeda), e quem **emite mais** tende a **depreciar** (mais oferta de moeda). O câmbio é, antes de tudo, o preço relativo de dois estoques de moeda confrontados às respectivas demandas.

17 Monitoria 6 — Lista 6: Economia aberta — câmbio flexível

Resolução completa da Lista 6 (enunciado original em *Lista_6.pdf*; a resolução também é distribuída separadamente como *Lista06_Resolucao*). Esta é a monitoria do módulo: o modelo da lista, resolvido passo a passo.

17.1 Exercício 1

Enunciado. Considere o seguinte modelo de uma pequena economia aberta:

$$\begin{aligned}\mathbf{IS:} \quad & y - \bar{y} = -\alpha(\rho - \bar{\rho}) + \beta(q - \bar{q}) \\ \mathbf{CP:} \quad & \dot{\pi} = \gamma \dot{q} + \delta(y - \bar{y}) \\ \mathbf{PJD:} \quad & \rho = \bar{\rho} + \dot{q}, \quad \bar{\rho} = \rho^* \\ \mathbf{RPM:} \quad & r = \bar{\rho} + \pi + \phi(\pi - \bar{\pi}) + \theta(q - \bar{q}) \\ \mathbf{CI:} \quad & p(0), \pi(0)\end{aligned}$$

em que y é o produto real, \bar{y} o produto potencial, ρ a taxa de juros real, $\bar{\rho}$ a taxa de juros real de longo prazo, q a taxa de câmbio real, \bar{q} a de longo prazo, π a inflação, $\bar{\pi}$ a meta de inflação e $\alpha, \beta, \gamma, \phi, \delta, \theta$ parâmetros positivos.

Em relação à Lista 5, a diferença decisiva está na **RPM**: agora o Banco Central opera por uma **regra de Taylor** sobre a taxa de juros nominal r (reagindo ao desvio da inflação e à desalinhamento cambial), e não mais fixando o câmbio nominal. O instrumento volta a ser o **juro**; o câmbio nominal é deixado para o mercado.

17.1.1 Item 1 — Regime cambial

Pergunta. Descreva o regime cambial desta economia.

O instrumento de política é a **taxa de juros** (regra de Taylor), e não a taxa de câmbio. Logo, o regime é de **câmbio flutuante**: o câmbio nominal s é determinado pelo mercado, ajustando-se endogenamente via paridade descoberta de juros para tornar compatíveis o juro fixado pela regra e a arbitragem internacional. As implicações invertem as do *peg* da Lista 5:

- **Autonomia monetária.** Com r escolhido pela RPM, o Banco Central recupera o controle das condições monetárias; a moeda deixa de ser endógena à defesa de uma paridade.
- **Âncora nominal interna.** A âncora é a **meta de inflação** $\bar{\pi}$, que agora aparece na RPM e é **operante** — no longo prazo $\pi = \bar{\pi}$ (e não a inflação externa). O princípio de Taylor exige $\phi > 0$.
- **Flutuação “administrada”.** O termo $\theta(q - \bar{q})$ faz a regra reagir também ao **desalinhamento cambial real**: o BC sobe o juro quando o câmbio real se deprecia além do normal. É uma flutuação que “se inclina contra” desalinhamentos, mas continua sendo um regime flutuante (o instrumento é o juro).

17.1.2 Item 2 — Equilíbrio e dinâmica em (ρ, q)

Pergunta. Analise o equilíbrio e a dinâmica num diagrama de fases com a taxa de juros real ρ no eixo vertical e a taxa de câmbio real q no eixo horizontal.

Taxa de juros real. Como $\rho = r - \pi$, a RPM dá

$$\rho - \bar{\rho} = \phi(\pi - \bar{\pi}) + \theta(q - \bar{q}). \quad (*)$$

Leis de movimento. A PJD fornece diretamente

$$\dot{q} = \rho - \bar{\rho}.$$

Aqui π é **predeterminada** ($\pi(0)$ dado) e q é variável de **salto** (o câmbio nominal flutua). Derivando (*) e usando a CP com $y - \bar{y} = -\alpha(\rho - \bar{\rho}) + \beta(q - \bar{q})$:

$$\dot{\pi} = \gamma\dot{q} + \delta(y - \bar{y}) = (\gamma - \delta\alpha)(\rho - \bar{\rho}) + \delta\beta(q - \bar{q}),$$

$$\dot{\rho} = \phi\dot{\pi} + \theta\dot{q} = [\theta + \phi(\gamma - \delta\alpha)](\rho - \bar{\rho}) + \phi\delta\beta(q - \bar{q}).$$

Com desvios $\tilde{q} = q - \bar{q}$, $\tilde{\rho} = \rho - \bar{\rho}$, o sistema em (q, ρ) é

$$\begin{cases} \dot{q} = \tilde{\rho}, \\ \dot{\rho} = \phi\delta\beta\tilde{q} + [\theta + \phi(\gamma - \delta\alpha)]\tilde{\rho}. \end{cases}$$

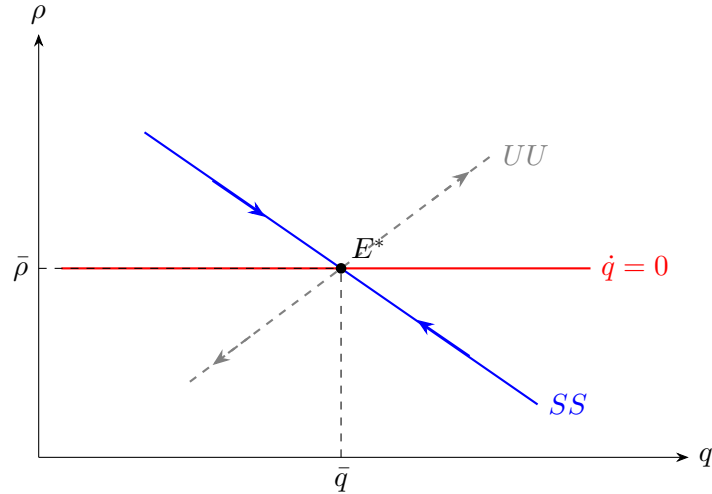
Equilíbrio. $\dot{q} = 0 \Rightarrow \rho = \bar{\rho}$; então $\dot{\rho} = 0 \Rightarrow q = \bar{q}$. Logo $E^* = (\bar{q}, \bar{\rho})$, com $\pi = \bar{\pi}$, $y = \bar{y}$ — a meta de inflação é o nível de longo prazo.

Classificação. O Jacobiano é

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \phi\delta\beta & \theta + \phi(\gamma - \delta\alpha) \end{pmatrix}, \quad \det J = -\phi\delta\beta < 0.$$

Como $\det J < 0$, os autovalores são **reais e de sinais opostos**: E^* é um **ponto de sela**. Isso é exatamente o esperado: há **uma** variável predeterminada (π) e **uma** de salto (q), de modo que existe um único braço estável (variedade estável) sobre o qual q salta, garantindo convergência.

Isóclinas. $\dot{q} = 0$ é a **horizontal** $\rho = \bar{\rho}$. $\dot{\rho} = 0$ é a reta $\tilde{\rho} = -\frac{\phi\delta\beta}{\theta + \phi(\gamma - \delta\alpha)}\tilde{q}$ (cuja inclinação depende do sinal do traço, mas não altera a natureza de sela). O **braço estável** SS tem inclinação igual ao autovalor estável $\mu_1 < 0$ (negativa); o braço instável UU , inclinação $\mu_2 > 0$.



Leitura. Dado $\pi(0)$, a relação (*) fixa o par (ρ, q) sobre o braço estável: o câmbio salta instantaneamente para SS e, daí, (ρ, q) converge a E^* . Acima de $\dot{q} = 0$ ($\rho > \bar{\rho}$) o câmbio real **deprecia** ($\dot{q} > 0$); abaixo, **aprecia**.

17.1.3 Item 3 — ρ e q são sempre negativamente correlacionadas?

Pergunta. A taxa de juros real e a taxa de câmbio real são negativamente correlacionadas quaisquer que sejam os valores dos parâmetros?

Sim — e a razão é **robusta** aos parâmetros. A trajetória efetivamente percorrida pela economia é o **braço estável** da sela, cuja inclinação no plano (q, ρ) é o autovalor estável μ_1 . Da primeira linha do sistema, qualquer autovetor satisfaz $v_\rho = \mu v_q$, ou seja, a inclinação do braço é exatamente μ . Como

$$\det J = -\phi\delta\beta < 0 \quad \text{para todos os parâmetros positivos,}$$

o modelo é **sempre** uma sela, com **exatamente um** autovalor negativo $\mu_1 < 0$. Logo o braço estável tem **inclinação negativa para qualquer combinação de parâmetros**: ao longo do ajuste, juro real alto vem acompanhado de câmbio real apreciado, e vice-versa. A correlação negativa é, portanto, uma propriedade estrutural (vem do sinal de $\det J$), não um caso particular.

Observação. No **instante do salto**, com π predeterminada, (*) liga ρ e q por $\rho - \bar{\rho} = \theta(q - \bar{q})$ — inclinação $+\theta > 0$. A correlação negativa é a da **dinâmica de ajuste** (o braço estável), não a do reposicionamento instantâneo.

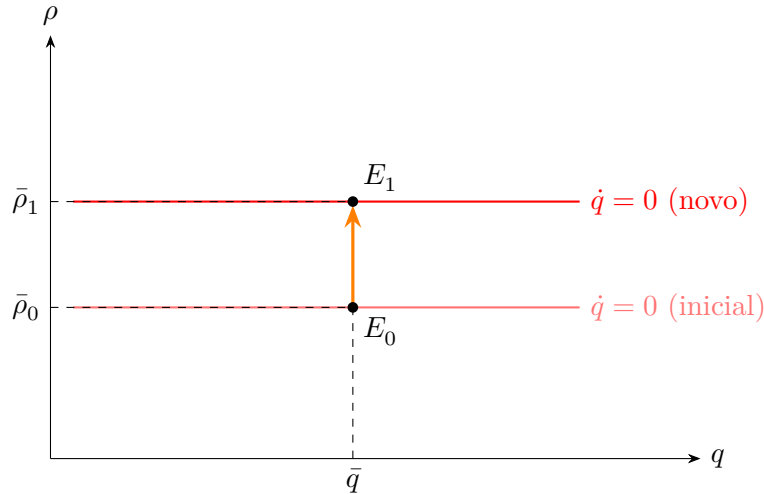
17.1.4 Item 4 — Aumento da taxa de juros real externa

Pergunta. Mostre, no diagrama de fases, o que acontece quando a taxa de juros real externa aumenta.

Como $\bar{\rho} = \rho^*$, um aumento de ρ^* eleva $\bar{\rho}$: $\bar{\rho}_0 \rightarrow \bar{\rho}_1 > \bar{\rho}_0$. O novo equilíbrio exige $\dot{q} = 0 \Rightarrow \rho = \bar{\rho}_1$ e, pela IS com $y = \bar{y}$, $q = \bar{q}$ **inalterado**. Ou seja, a isóclina $\dot{q} = 0$ **sobe** para $\rho = \bar{\rho}_1$ e E desloca-se **verticalmente** de $E_0 = (\bar{q}, \bar{\rho}_0)$ para $E_1 = (\bar{q}, \bar{\rho}_1)$.

O ajuste é **instantâneo**, sem dinâmica de transição. Para ver isso, no impacto $\pi = \bar{\pi}$ (predeterminada) e, por (*) com o novo $\bar{\rho}_1$, $\rho - \bar{\rho}_1 = \theta(q - \bar{q})$. Pondo isso sobre o braço estável $\rho - \bar{\rho}_1 = \mu_1(q - \bar{q})$ obtém-se $(\theta - \mu_1)(q - \bar{q}) = 0$; como $\theta > 0 > \mu_1$, resulta $q = \bar{q}$. A economia **já está** sobre o novo E_1 :

$$\Delta\rho = \Delta\rho^*, \quad \Delta q = \Delta\pi = \Delta y = 0.$$



Interpretação. O choque externo é absorvido **integralmente** pelo juro real doméstico (alta de um para um), sem afetar competitividade ($q = \bar{q}$), inflação ($\pi = \bar{\pi}$) ou produto ($y = \bar{y}$). A razão é que o câmbio real de longo prazo \bar{q} é exógeno (fundamento real): não há desalinhamento a corrigir, logo nada a transitar. Contraste com o *peg* da Lista 5, em que o ajuste recairia sobre preços/produto.

17.2 Exercício 2

Enunciado. Considere o modelo:

$$\mathbf{IS:} \quad y - \bar{y} = -\alpha(\rho - \bar{\rho}) + \beta(q - \bar{q})$$

$$\mathbf{CP:} \quad \dot{\pi} = \gamma\dot{q} + \delta(y - \bar{y})$$

$$\mathbf{PJD:} \quad \rho = \bar{\rho} + \dot{q}, \quad \bar{\rho} = \rho^*$$

$$\mathbf{RPM:} \quad r = \bar{\rho} + \pi_C + \theta(\pi_C - \bar{\pi}_C)$$

$$\mathbf{IPC:} \quad \pi_C = \pi + \omega\dot{q}$$

$$\mathbf{TJR:} \quad r = \rho + \pi_C$$

$$\mathbf{CI:} \quad p(0), \pi(0)$$

em que π é a inflação de **bens domésticos**, π_C a inflação medida pelo **IPC**, $\bar{\pi}_C$ a meta de inflação de IPC, e $\alpha, \beta, \gamma, \phi, \delta, \omega, \theta$ positivos.

Agora a regra de Taylor mira o **IPC** (π_C), e o juro real é definido em relação ao IPC (TJR: $\rho = r - \pi_C$). O IPC inclui o repasse do câmbio: $\pi_C = \pi + \omega\dot{q}$. Isso muda os coeficientes, mas — veremos — preserva a estrutura de **sela**.

Redução. Da RPM e da TJR, $\rho = r - \pi_C = \bar{\rho} + \theta(\pi_C - \bar{\pi}_C)$, isto é, $\rho - \bar{\rho} = \theta(\pi_C - \bar{\pi}_C)$. Com $\pi_C = \pi + \omega\dot{q}$ e $\dot{q} = \rho - \bar{\rho}$ (PJD), $\pi_C = \pi + \omega(\rho - \bar{\rho})$. Substituindo:

$$\rho - \bar{\rho} = \theta[\pi + \omega(\rho - \bar{\rho}) - \bar{\pi}_C] \implies \rho - \bar{\rho} = \Theta(\pi - \bar{\pi}_C), \quad \Theta \equiv \frac{\theta}{1 - \theta\omega}.$$

Suporemos $\theta\omega < 1$, de modo que $\Theta > 0$ (condição de determinação: o repasse cambial não pode dominar a resposta de juros). Note o paralelo com o Exercício 1: Θ faz o papel de ϕ .

17.2.1 Item (a) — Equilíbrio e dinâmica em (ρ, q)

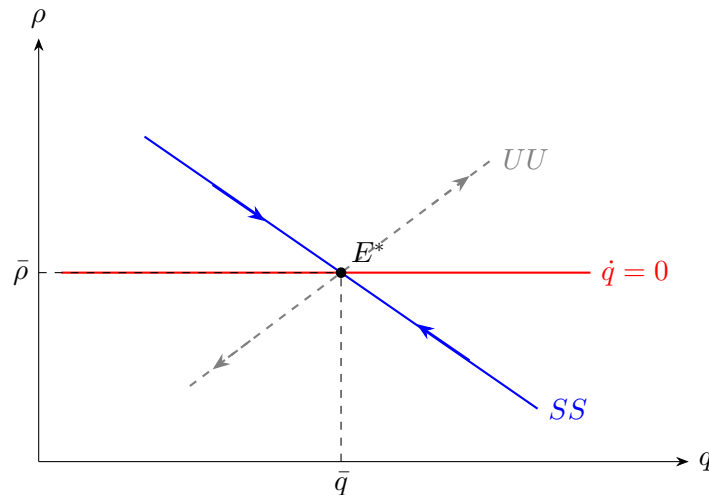
Pergunta. Analise o equilíbrio e a dinâmica num diagrama de fases com ρ no eixo vertical e q no horizontal.

Com $\dot{q} = \rho - \bar{\rho}$ e $\dot{\rho} = \Theta\dot{\pi}$ (pois $\rho - \bar{\rho} = \Theta(\pi - \bar{\pi}_C)$), e usando $\dot{\pi} = (\gamma - \delta\alpha)(\rho - \bar{\rho}) + \delta\beta(q - \bar{q})$:

$$\begin{cases} \dot{q} = \tilde{\rho}, \\ \dot{\rho} = \Theta\delta\beta\tilde{q} + \Theta(\gamma - \delta\alpha)\tilde{\rho}. \end{cases}$$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \Theta\delta\beta & \Theta(\gamma - \delta\alpha) \end{pmatrix}, \quad \det J = -\Theta\delta\beta < 0.$$

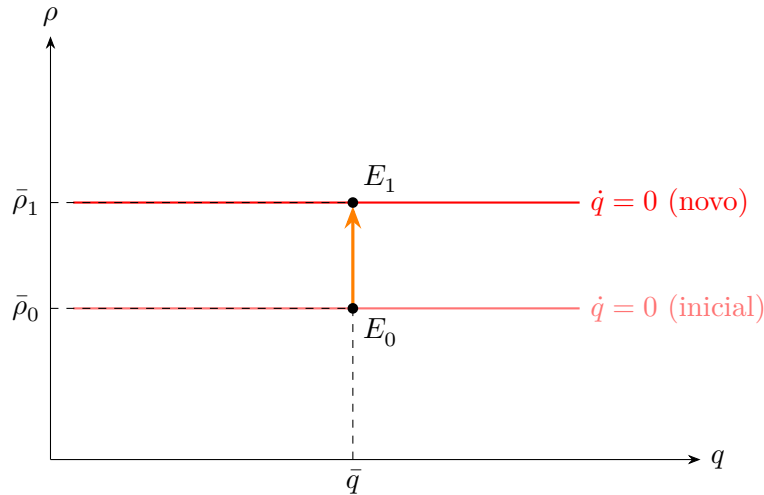
Novamente $\det J < 0$: **ponto de sela**, com $E^* = (\bar{q}, \bar{\rho})$ (onde $\pi_C = \pi = \bar{\pi}_C$, pois $\dot{q} = 0$). A análise é **idêntica** à do Item 2 do Exercício 1: $\dot{q} = 0$ horizontal em $\bar{\rho}$; braço estável SS negativamente inclinado (autovalor $\mu_1 < 0$), braço instável UU positivo; q salta para SS e converge.



17.2.2 Item (b) — Aumento da taxa de juros real externa

Pergunta. Mostre, no diagrama do item anterior, o que acontece quando a taxa de juros real externa aumenta.

Como no Item 4 do Exercício 1, com $\bar{\rho} = \rho^*$ subindo para $\bar{\rho}_1$: o equilíbrio sobe **verticalmente** para $E_1 = (\bar{q}, \bar{\rho}_1)$, e o ajuste é **instantâneo** ($\Delta\rho = \Delta\rho^*$, $\Delta q = \Delta\pi = \Delta y = 0$). De fato, no impacto $\rho - \bar{\rho}_1 = \Theta(\pi - \bar{\pi}_C) = 0$ (pois $\pi = \bar{\pi}_C$ predeterminada), o que já situa a economia em E_1 . O câmbio real de longo prazo \bar{q} , exógeno, não se altera.



17.2.3 Item (c) — Equilíbrio e dinâmica em (y, π)

Pergunta. Analise o equilíbrio e a dinâmica num diagrama de fases com a inflação no eixo vertical e o produto real no horizontal.

Usando $\rho - \bar{\rho} = \Theta(\pi - \bar{\pi}_C)$ na CP e na IS, com $\tilde{y} = y - \bar{y}$ e $\tilde{\pi} = \pi - \bar{\pi}_C$:

$$\dot{\pi} = \gamma\dot{q} + \delta\tilde{y} = \gamma\Theta\tilde{\pi} + \delta\tilde{y},$$

e, de $\tilde{y} = -\alpha\Theta\tilde{\pi} + \beta\tilde{q}$, derivando e substituindo,

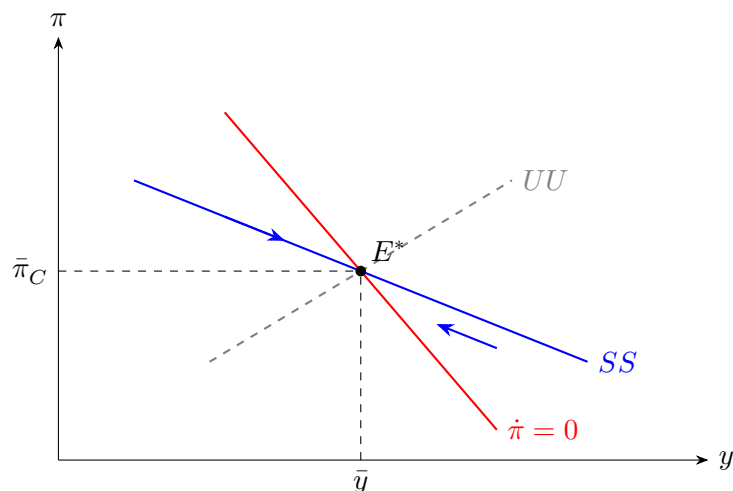
$$\dot{y} = -\alpha\Theta\dot{\pi} + \beta\dot{q} = -\alpha\delta\Theta\tilde{y} + \Theta(\beta - \alpha\gamma\Theta)\tilde{\pi}.$$

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{y} &= -\alpha\delta\Theta\tilde{y} + \Theta(\beta - \alpha\gamma\Theta)\tilde{\pi}, \\ \dot{\pi} &= \delta\tilde{y} + \gamma\Theta\tilde{\pi}. \end{aligned}} \quad J = \begin{pmatrix} -\alpha\delta\Theta & \Theta(\beta - \alpha\gamma\Theta) \\ \delta & \gamma\Theta \end{pmatrix}.$$

$$\det J = -\delta\beta\Theta < 0.$$

De novo $\det J < 0$: **ponto de sela** (o mesmo sistema dinâmico do item (a), em outras coordenadas; os autovalores se preservam). Aqui π é predeterminada e y é a **variável de salto** (depende de q , que salta). $E^* = (\bar{y}, \bar{\pi}_C)$.

Isóclinas e braço estável. $\dot{\pi} = 0$: $\tilde{\pi} = -\frac{\delta}{\gamma\Theta}\tilde{y}$ (**negativamente inclinada**). O braço estável SS tem inclinação $\frac{\delta}{\mu_1 - \gamma\Theta} < 0$ (negativa, pois $\mu_1 < 0$). A isóclina $\dot{y} = 0$ tem inclinação $\frac{\alpha\delta}{\beta - \alpha\gamma\Theta}$ (sinal ambíguo, sem afetar a natureza de sela).



17.2.4 Item (d) — Redução da meta de inflação

Pergunta. Mostre, no diagrama anterior, o que ocorre quando o Banco Central reduz a meta de inflação.

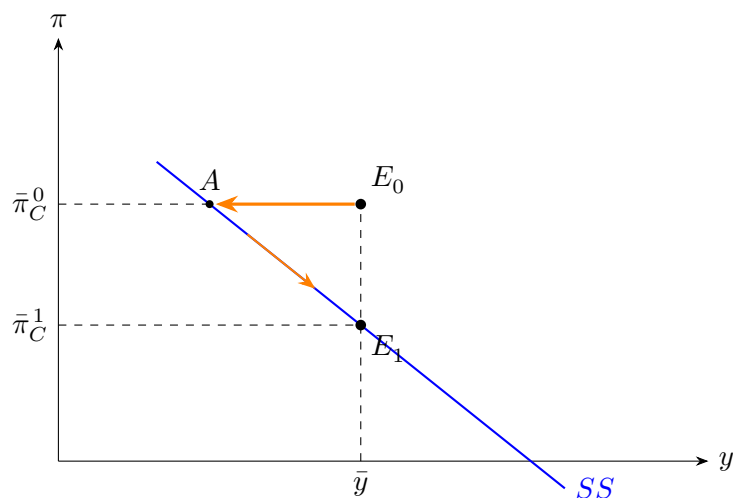
Em t_0 , $\bar{\pi}_C^0 \rightarrow \bar{\pi}_C^1 < \bar{\pi}_C^0$. O novo equilíbrio é $E_1 = (\bar{y}, \bar{\pi}_C^1)$, **abaixo** de E_0 . No impacto, π é predeterminada em $\bar{\pi}_C^0$; a regra mais dura eleva o juro real,

$$\rho - \bar{\rho} = \Theta(\pi - \bar{\pi}_C^1) = \Theta(\bar{\pi}_C^0 - \bar{\pi}_C^1) > 0.$$

O produto **salta para baixo** para pousar no novo braço estável SS (que passa por E_1): com $\rho > \bar{\rho}$, há **apreciação real** no impacto ($q < \bar{q}$ sobre SS), e

$$\tilde{y} = -\alpha\Theta(\pi - \bar{\pi}_C^1) + \beta(q - \bar{q}) < 0.$$

Recessão de impacto: y cai abaixo do potencial com a inflação ainda alta (predeterminada). Em seguida, ao longo de SS , y retorna a \bar{y} e π recua gradualmente até $\bar{\pi}_C^1$.



Conclusão. A desinflação é **custosa**: no impacto, salto de A (recessão, $y < \bar{y}$, com inflação ainda em $\bar{\pi}_C^0$); depois, deslizamento ao longo do braço estável até E_1 , com produto voltando ao potencial e inflação convergindo à nova meta mais baixa. O único efeito permanente é a inflação de equilíbrio menor; y , q e ρ retornam a \bar{y} , \bar{q} e $\bar{\rho}$. É a contrapartida, em economia aberta com câmbio flexível, da desinflação das listas fechadas — agora o ajuste se dá via apreciação cambial e salto do produto sobre o braço de sela.

Teste do Módulo 2 — Economia aberta

O teste a seguir é uma avaliação resolvida sobre o modelo de economia aberta deste módulo, no regime de **câmbio flutuante** com regra de Taylor reagindo à velocidade do câmbio real.

18 Teste 3 (2026) — Economia aberta com câmbio flutuante

Resolução completa do Terceiro Teste de 2026 (enunciado e resolução também distribuídos em Teste03_2026). Aplica o modelo do Módulo 2: pequena economia aberta com mobilidade de capitais, regra de Taylor com reação à velocidade do câmbio real, e desinflação via ponto de sela em (y, π) .

Enunciado. Considere o seguinte modelo de uma economia aberta:

$$\begin{aligned}\text{IS: } & y - \bar{y} = -\alpha(\rho - \bar{\rho}) + \beta(q - \bar{q}) \\ \text{CP: } & \dot{\pi} = \gamma \dot{q} + \delta(y - \bar{y}) \\ \text{PJD: } & \rho = \bar{\rho} + \dot{q} \\ \text{RPM: } & r = \bar{\rho} + \pi + \theta(\pi - \bar{\pi}) + \phi \dot{q} \\ \text{CI: } & p(0), \pi(0)\end{aligned}$$

em que y é o produto real, \bar{y} o produto potencial, \dot{x} a derivada de x no tempo, ρ a taxa de juros real, $\bar{\rho}$ a de longo prazo, r a taxa de juros nominal, π a inflação, $\bar{\pi}$ a meta, q a taxa de câmbio real e \bar{q} a de longo prazo. Os parâmetros $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \phi, \theta$ são positivos, com $\phi < 1$.

Estrutura do modelo. É a versão de **economia aberta pequena com mobilidade de capitais** do modelo IS-CP-RPM. A IS depende da competitividade $\beta(q - \bar{q})$ (câmbio real depreciado estimula o produto via exportações líquidas) e do juro real; a curva de Phillips carrega o **repasse cambial** $\gamma \dot{q}$ (*pass-through*) além da inércia de demanda $\delta(y - \bar{y})$, e é *backward-looking* — com $\pi(0)$ dado, a inflação é **predeterminada** (não salta). A **PJD** (paridade descoberta de juros em termos reais) iguala o diferencial de juro real à taxa de depreciação real esperada, $\rho - \bar{\rho} = \dot{q}$. A **RPM** é uma regra de Taylor sobre o juro nominal, que reage ao desvio da inflação (θ) e à **velocidade de depreciação real** $\phi \dot{q}$. Como o instrumento é o juro, o câmbio real q é variável de **salto**.

18.1 Item (a) — Regime cambial

O instrumento de política é a **taxa de juros** (regra de Taylor sobre r), e não a taxa de câmbio. Logo, o regime é de **câmbio flutuante**: o câmbio nominal é determinado pelo mercado e ajusta-se endogenamente, via paridade descoberta de juros, para compatibilizar o juro fixado pela regra com a arbitragem internacional. As implicações são as do “trilema” da economia aberta:

- **Autonomia monetária.** Com r escolhido pela RPM, o Banco Central controla as condições monetárias internas; a oferta de moeda não fica refém da defesa de uma paridade.
- **Âncora nominal interna.** A âncora é a **meta de inflação** $\bar{\pi}$, que figura na RPM e é **operante**: no longo prazo $\pi = \bar{\pi}$. O princípio de Taylor é satisfeito — a resposta do juro **nominal** à inflação é $1 + \theta > 1$ (a derivada de r em relação a π excede a unidade), de modo que o juro **real** sobe quando a inflação supera a meta.

- **Flutuação “administrada”.** O termo $\phi\dot{q}$ faz a regra reagir também à **velocidade de variação do câmbio real**: o BC “inclina-se contra o vento”, suavizando movimentos cambiais. É, ainda assim, um regime flutuante — o instrumento permanece sendo o juro.

O papel de $\phi < 1$. Combinando a RPM (via Fisher, $\rho = r - \pi$) com a PJD, como se mostra no item (b), obtém-se $(1 - \phi)\dot{q} = \theta(\pi - \bar{\pi})$. A hipótese $\phi < 1$ garante $1 - \phi > 0$: a reação à depreciação não é forte o bastante para inverter o sinal do mecanismo. Assim, quando $\pi > \bar{\pi}$, o juro real sobe e o câmbio real **aprecia** no ajuste — a configuração estável (sela) do item (b). Fosse $\phi > 1$, o sinal se inverteria e a regra deixaria de ancorar o sistema.

18.2 Item (b) — Equilíbrio e dinâmica no plano (π, y)

Taxa de juros real. Por Fisher, $\rho = r - \pi$; logo, da RPM,

$$\rho - \bar{\rho} = \theta(\pi - \bar{\pi}) + \phi\dot{q}. \quad (i)$$

Da PJD, $\rho - \bar{\rho} = \dot{q}$ (ii). Igualando (i) e (ii):

$$\dot{q} = \theta(\pi - \bar{\pi}) + \phi\dot{q} \implies (1 - \phi)\dot{q} = \theta(\pi - \bar{\pi}) \implies \boxed{\dot{q} = a(\pi - \bar{\pi}), \quad a \equiv \frac{\theta}{1 - \phi} > 0}$$

(positivo porque $\phi < 1$). Como $\rho - \bar{\rho} = \dot{q}$, o **juro real fica ancorado ao desvio de inflação**: $\rho - \bar{\rho} = a(\pi - \bar{\pi})$.

Forma reduzida em (y, π) . Levando $\rho - \bar{\rho} = a(\pi - \bar{\pi})$ à IS,

$$y - \bar{y} = -\alpha a(\pi - \bar{\pi}) + \beta(q - \bar{q}). \quad (IS')$$

A CP fica $\dot{\pi} = \gamma\dot{q} + \delta(y - \bar{y}) = \gamma a(\pi - \bar{\pi}) + \delta(y - \bar{y})$, isto é,

$$\boxed{\dot{\pi} = \delta(y - \bar{y}) + \gamma a(\pi - \bar{\pi})}.$$

Para a dinâmica do produto, deriva-se (IS') no tempo (\bar{y}, \bar{q} constantes) e usam-se $\dot{q} = a(\pi - \bar{\pi})$ e a CP:

$$\dot{y} = -\alpha a \dot{\pi} + \beta\dot{q} = -\alpha\delta a(y - \bar{y}) + a(\beta - \alpha\gamma a)(\pi - \bar{\pi}).$$

Com desvios $w \equiv y - \bar{y}$, $z \equiv \pi - \bar{\pi}$, o sistema autônomo é

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{y} &= -\alpha\delta a w + a(\beta - \alpha\gamma a) z, \\ \dot{\pi} &= \delta w + \gamma a z. \end{aligned}}$$

Equilíbrio. $\dot{\pi} = 0$ e $\dot{y} = 0$ implicam $w = z = 0$, ou seja $\pi = \bar{\pi}$ e $y = \bar{y}$. Então $\dot{q} = 0 \implies q = \bar{q}$, $\rho = \bar{\rho}$ e $r = \bar{r} \equiv \bar{\rho} + \bar{\pi}$:

$$\boxed{E^* = (\bar{y}, \bar{\pi}), \quad q^* = \bar{q}, \quad \rho^* = \bar{\rho}, \quad r^* = \bar{\rho} + \bar{\pi}.}$$

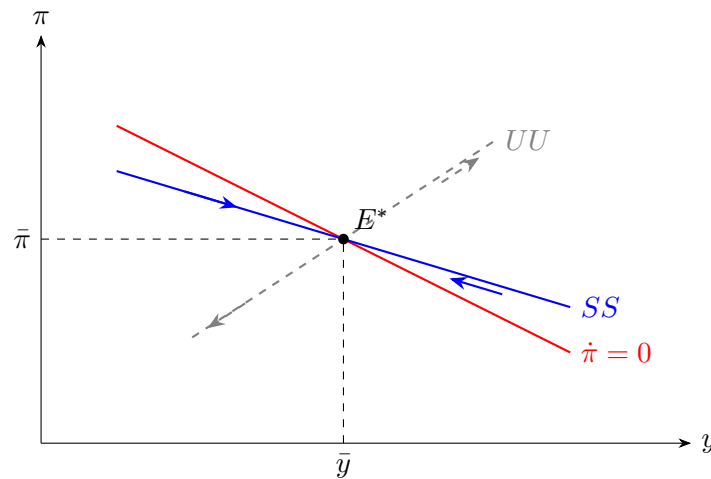
A meta de inflação é o nível de longo prazo da inflação.

Classificação. O Jacobiano e seu determinante são

$$M = \begin{pmatrix} -\alpha\delta a & a(\beta - \alpha\gamma a) \\ \delta & \gamma a \end{pmatrix}, \quad \det M = (-\alpha\delta a)(\gamma a) - a(\beta - \alpha\gamma a)\delta = -\alpha\delta\beta < 0.$$

Como $\det M = -\frac{\delta\beta\theta}{1-\phi} < 0$ para quaisquer parâmetros positivos (e $\phi < 1$), os autovalores são reais e de sinais opostos: E^* é um ponto de sela. Isso é exatamente o esperado: há uma variável predeterminada (π) e uma de salto (y , herdando o salto de q), de modo que existe um único braço estável SS sobre o qual o produto salta, garantindo a convergência.

Isóclinas e campo de direções. A reta $\dot{\pi} = 0$, $z = -\frac{\delta}{\gamma a} w$, tem inclinação negativa ($\partial\pi/\partial y = -\delta(1-\phi)/(\gamma\theta)$) e passa por E^* ; à direita dela ($\dot{\pi} > 0$, \uparrow), à esquerda ($\dot{\pi} < 0$, \downarrow). O braço estável SS tem inclinação igual ao autovetor do autovalor estável $\mu_1 < 0$, $\partial\pi/\partial y = \delta/(\mu_1 - \gamma a) < 0$ — negativa e mais plana que a isóclina $\dot{\pi} = 0$; o braço instável UU corresponde a $\mu_2 > 0$.



Leitura. A inflação é predeterminada (a posição vertical não salta); o produto, ao contrário, **salta** porque depende do câmbio real q , que flutua. Dado $\pi(0)$, o câmbio salta de modo a colocar a economia sobre SS na altura $\pi(0)$ — isto é, y salta horizontalmente até SS — e, daí, (y, π) desliza ao longo de SS até E^* , com $y \rightarrow \bar{y}$, $\pi \rightarrow \bar{\pi}$, $q \rightarrow \bar{q}$ e $\rho \rightarrow \bar{\rho}$.

18.3 Item (c) — Redução da meta de inflação

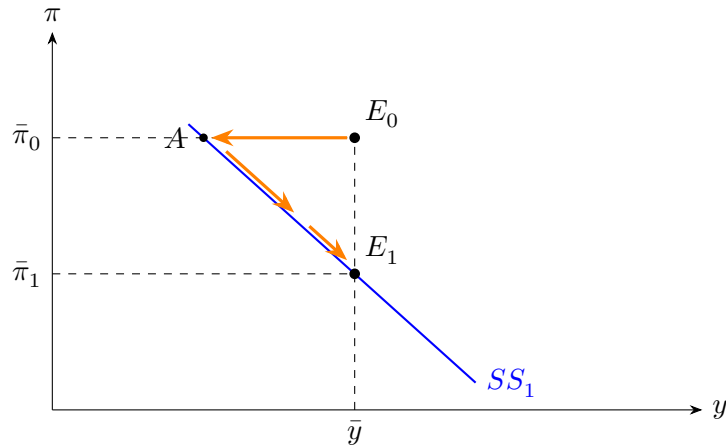
Em t_0 , a meta cai de forma permanente: $\bar{\pi}_0 \rightarrow \bar{\pi}_1 < \bar{\pi}_0$.

Deslocamento do equilíbrio. As isóclinas $\dot{\pi} = 0$ e $\dot{y} = 0$ passam ambas por $(\bar{y}, \bar{\pi})$; com a nova meta elas se deslocam **para baixo** em $\bar{\pi}_1 - \bar{\pi}_0 < 0$, mantendo as inclinações. O equilíbrio desce **verticalmente** de $E_0 = (\bar{y}, \bar{\pi}_0)$ para $E_1 = (\bar{y}, \bar{\pi}_1)$: o produto de longo prazo não muda, apenas a inflação. O braço estável passa a ser SS_1 , através de E_1 .

Salto e ajuste. Como π é **predeterminada**, em t_0^+ a inflação **permanece** em $\bar{\pi}_0$ — não pode saltar. Quem salta é o produto: o câmbio real se reposiciona para levar a economia ao novo braço estável SS_1 na altura $\pi = \bar{\pi}_0$. Como SS_1 tem inclinação **negativa** e passa por E_1 , o ponto de SS_1 com $\pi = \bar{\pi}_0 > \bar{\pi}_1$ está à **esquerda** de \bar{y} : o produto **cai no impacto** (ponto A, recessão). De fato, no impacto

$$\rho - \bar{\rho} = a(\bar{\pi}_0 - \bar{\pi}_1) > 0 \quad (\text{juro real sobe}), \quad q < \bar{q} \quad (\text{câmbio real aprecia}),$$

e, pela IS, $y - \bar{y} = -\alpha(\rho - \bar{\rho}) + \beta(q - \bar{q}) < 0$: o juro real mais alto e a apreciação cambial (perda de competitividade) contraem a demanda. A seguir, com $\pi > \bar{\pi}_1$, tem-se $\dot{q} = a(\pi - \bar{\pi}_1) > 0$ (o câmbio volta a depreciar) e a economia **desliza ao longo de SS_1** : a inflação cede gradualmente até $\bar{\pi}_1$ e o produto se recupera até \bar{y} .



Conclusão. A queda da meta gera **desinflação custosa**: no impacto, salto recessivo do produto ($y < \bar{y}$, *sacrifice ratio* positiva), com a inflação ainda em $\bar{\pi}_0$; depois, deslizamento ao longo de SS_1 até E_1 , com o produto retornando ao potencial e a inflação convergindo à nova meta. Em economia aberta com câmbio flutuante, o ajuste opera via **apreciação cambial e salto do produto** sobre o braço de sela. A neutralidade de longo prazo se mantém ($y \rightarrow \bar{y}$, $q \rightarrow \bar{q}$, $\rho \rightarrow \bar{\rho}$); os únicos efeitos permanentes são a inflação e a taxa nominal de equilíbrio mais baixas: $r^* = \bar{\rho} + \bar{\pi}_1$.

19 A Restrição Orçamentária do Governo

19.1 Motivação econômica

Nos modelos anteriores, a política fiscal entrava como uma escolha livre (G, T). Mas o governo, como qualquer agente, tem uma **restrição orçamentária**: o que gasta precisa ser financiado. As formas de financiamento — impostos, emissão de dívida e emissão de moeda — têm consequências distintas, e é essa restrição que define o que limita a economia no longo prazo.

💡 Do modelo anterior para este

Deixamos a política fiscal de ser exógena e passamos a tratar sua **restrição intertemporal**. Acrescentamos a contabilidade consolidada do Tesouro e do Banco Central. As ferramentas novas são de **dinâmica**: equações diferenciais resolvidas por **fator integrante** e condições de **valor presente** (transversalidade) — exatamente o material de EDO e integral das Notas de Matemática, agora aplicado à dívida pública.

19.2 A restrição consolidada do governo

O governo gasta em bens e serviços (G) e paga juros sobre a dívida (rB); financia-se com impostos (T), emissão de títulos (\dot{B}) e emissão de moeda (\dot{M}). Consolidando Tesouro e Banco Central (cujo lucro são os juros dos títulos que carrega):

$$G + rB = T + \dot{B} + \dot{M}.$$

Reorganizando, isolamos a **Necessidade de Financiamento do Setor Público (NFSP)**:

$$\dot{M} + \dot{B} = (G - T) + rB.$$

O lado esquerdo é como o déficit é **financiado** (moeda + títulos); o direito é o que o gera (**déficit primário** $G - T$ mais **juros** rB). Emitir títulos demais pode tornar a dívida insustentável; emitir moeda demais gera **inflação**.

19.2.1 Passando para % do PIB: a regra do quociente

Variáveis em nível crescem com a economia; o que importa é a razão ao PIB. Definimos $b = B/(Py)$, $m = M/(Py)$, $g = G/(Py)$, $\tau = T/(Py)$. Precisamos da dinâmica de b , e aqui entra um truque de cálculo.

A dívida em proporção do PIB é $b = B/(Py)$. Sua variação no tempo, pela **regra do quociente / diferenciação logarítmica**:

$$\dot{b} = \frac{\dot{B}}{Py} - b \frac{\widehat{(Py)}}{1} = \frac{\dot{B}}{Py} - b(\pi + n_y),$$

em que usamos que o PIB nominal cresce à taxa $\widehat{Py} = \pi + n_y$ (inflação mais crescimento real).

i Ferramenta matemática: derivada de um quociente via logaritmo

Para derivar $b = B/(Py)$ no tempo, tome $\ln b = \ln B - \ln P - \ln y$ e derive:

$$\frac{\dot{b}}{b} = \frac{\dot{B}}{B} - \frac{\dot{P}}{P} - \frac{\dot{y}}{y} = \frac{\dot{B}}{B} - (\pi + n_y).$$

Multiplicando por b recupera-se $\dot{b} = \dot{B}/(Py) - b(\pi + n_y)$. É a **diferenciação logarítmica** do capítulo *Função Logaritmo Natural* — o mesmo recurso que usamos na inflação e no câmbio, agora para a razão dívida/PIB.

Aplicando a \dot{M} e \dot{B} e dividindo a restrição por Py , chega-se à forma canônica (a equação central deste módulo):

$$\dot{m} + \dot{b} = (g - \tau) + (\rho - n_y)b - m(\pi + n_y).$$

Lê-se: a NFSP em % do PIB é o **déficit primário** $(g - \tau)$, mais o **juro real líquido do crescimento** $(\rho - n_y)b$, menos a **senhoriagem** $m(\pi + n_y)$ (a receita de emitir moeda). O termo $(\rho - n_y)$ é crucial: o que pesa não é o juro, e sim **quanto o juro real supera o crescimento**.

💡 Exemplo 1 — Brasil, 1998–99 (acordo com o FMI)

Com $b = 50\%$, $\rho = 10\%$, $n_y = 3\%$, déficit primário $(g - \tau) = 1\%$ e senhoriagem $\approx 0,25\%$:

$$\dot{m} + \dot{b} = 1\% + (10\% - 3\%) \cdot 50\% - 0,25\% = 1\% + 3,5\% - 0,25\% \approx 3,25\%.$$

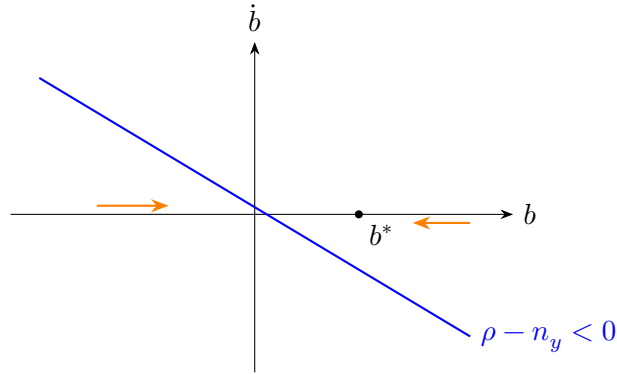
A dívida crescerá a $\sim 3,25\%$ do PIB ao ano. Para estabilizá-la sem inflação, seria preciso um **superávit primário** $(\tau - g) \approx 3,25\%$ — exatamente a ordem de grandeza do ajuste pactuado. (Em 2015, com $b = 60\%$, $\rho = 6\%$, $n_y = 2,5\%$, a conta dá $(\tau - g) \approx 2,1\%$, a meta anunciada por Joaquim Levy.)

19.3 Sustentabilidade da dívida

Suponha financiamento só por títulos ($\dot{M} = 0$) e déficit primário constante. A dinâmica da dívida é a EDO linear de 1ª ordem:

$$\dot{b} = (g - \tau) + (\rho - n_y)b.$$

O sinal de $(\rho - n_y)$ decide tudo — é o coeficiente da EDO (e, no diagrama de fase, a inclinação de \dot{b} contra b).



- **Caso** $\rho < n_y$ (coeficiente negativo): a EDO é **estável**. Qualquer desvio retorna a $b^* = \frac{\tau - g}{\rho - n_y}$ — a dívida **converge** e não explode, mesmo com déficit primário.
- **Caso** $\rho > n_y$ (coeficiente positivo): a EDO é **instável**. Para manter $\dot{b} = 0$ é preciso um superávit primário exato $(\tau - g) = (\rho - n_y)b$; um superávit um pouco menor faz a dívida **explodir**.

19.3.1 Valor presente: a dívida como ativo e a condição de não-Ponzi

Resolvendo a EDO com **fator integrante** $e^{-(\rho - n_y)v}$, obtém-se a dívida como valor presente dos superávits futuros:

$$e^{-(\rho - n_y)v} [\dot{b} - (\rho - n_y)b] = (g - \tau)e^{-(\rho - n_y)v} \implies \frac{d}{dv} [b e^{-(\rho - n_y)v}] = (g - \tau)e^{-(\rho - n_y)v}.$$

Integrando de t a T e impondo a **condição de transversalidade** (não-Ponzi) $\lim_{T \rightarrow \infty} b(T)e^{-(\rho - n_y)(T-t)} = 0$:

$$b(t) = \int_t^{\infty} (\tau - g) e^{-(\rho - n_y)(v-t)} dv.$$

A dívida de hoje **só é pagável** se for igual ao valor presente dos superávits primários futuros. É o mesmo princípio de precificação de um ativo, $P(t) = \int_t^{\infty} d e^{-r(v-t)} dv$ (preço = fluxo de dividendos descontado, sem bolha).

i Ferramenta matemática: fator integrante e valor presente

Resolver $\dot{b} - (\rho - n_y)b = (g - \tau)$ é o método do **fator integrante** para EDO linear de 1ª ordem (capítulo *Equações Diferenciais Ordinárias*): multiplica-se por $e^{-\int a dv}$ para tornar o lado esquerdo a derivada de um produto. A **integral imprópria** $\int_t^{\infty} (\cdot) e^{-(\rho - n_y)(v-t)} dv$ é o valor presente contínuo (capítulo *Integral*), e o desconto exponencial é o que faz a condição de transversalidade “matar a bolha”.

Teto de gastos (Emenda Constitucional 95, 2016). Fixar $g = G/(Py_1)$ com G crescendo só pela inflação faz g cair com o crescimento real — uma regra desenhada para reverter $\dot{b} > 0$ e estabilizar a trajetória da dívida ao longo de ~10 anos.

19.4 Senhoriagem e o imposto inflacionário

Emitir moeda é uma forma de receita. Mantendo m constante, pode-se emitir ao ritmo do PIB nominal: $\dot{M}/M = \pi + n_y$, de modo que a **senhoriagem** é $m(\pi + n_y)$. A parcela πm é o **imposto inflacionário**: a inflação corrói o poder de compra de quem retém moeda — base m , alíquota π .

Como a demanda por moeda $m = L(r)$ é decrescente no juro (e $r = \rho + \pi$), há uma **curva de Laffer** da inflação: a receita $\pi L(\rho + \pi)$ sobe, atinge um pico (onde a elasticidade $|\varepsilon| = 1$) e cai. A perda de bem-estar do imposto inflacionário é a área sob a demanda por moeda:

$$W(r) = \int_{m(r)}^{m(0)} r(m) dm.$$

💡 Ferramenta matemática + economia: custo da hiperinflação depende da elasticidade

A forma da demanda por moeda decide se o custo da hiperinflação é finito:

- $\ln m = -\alpha r \Rightarrow m = e^{-\alpha r}$: $W(r) \rightarrow \frac{1}{\alpha}$ quando $r \rightarrow \infty$ — custo **finito** (consegue-se “fugir” da moeda).
- $\ln m = -\alpha \ln r \Rightarrow m = r^{-\alpha}$: $W(r) \rightarrow \infty$ — custo **infinito**.

O cálculo de W é uma **integral** da função de demanda (capítulo *Integral*), e o limite usa a regra de L'Hôpital. A economia (custo da hiperinflação) sai inteiramente da matemática (a elasticidade-juro da demanda por moeda).

19.5 Equivalência ricardiana

Uma redução **temporária** de impostos, sem mudança de gastos, estimula o consumo? Sob hipóteses fortes — **agente de vida infinita**, mesmo juro para emprestar e tomar, impostos futuros previsíveis e *lump-sum* — a resposta é **não**.

Juntando a restrição intertemporal das **famílias** (renda + retorno de ativos = consumo + impostos + variação de ativos) e a do **governo** (ambas resolvidas por fator integrante e levadas a valor presente), os ativos se cancelam e sobra:

$$\int_t^\infty y e^{-\rho(v-t)} dv = \int_t^\infty (c + g) e^{-\rho(v-t)} dv.$$

O que a economia produz, em valor presente, é consumido pelas famílias **ou** pelo governo. Logo, uma queda temporária de τ não vira consumo: o agente sabe que os impostos **subirão depois** (para bancar a mesma estrutura de gastos) e poupa o equivalente. **A única forma de o governo estimular o consumo é reduzir seus próprios gastos**. Na prática a equivalência não vale exatamente (vidas finitas, restrição de crédito), mas é o ponto de referência indispensável.

19.6 Teoria fiscal do nível de preços e hiperinflação

Se o governo se financia **só com moeda** ($\dot{B} = 0$) e $n_y = 0$, a restrição vira

$$\dot{m} = (g - \tau) - m\pi.$$

Tratando a moeda como um **ativo** cujo “dividendo” é o valor dos serviços de liquidez $S(m)$, e resolvendo por fator integrante, obtém-se

$$m(t) = \int_t^\infty [S(m) - (g - \tau)] e^{-\rho(v-t)} dv + \underbrace{(\text{bolha})}_{\rightarrow 0}.$$

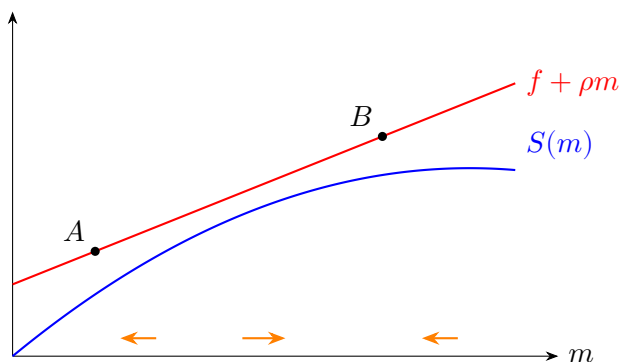
A moeda vale algo enquanto o **serviço de liquidez supera o déficit** que ela financia. O ponto profundo é **intertemporal**: se os agentes esperam um **déficit futuro financiado por moeda**, o valor da moeda hoje desaba — **a hiperinflação acontece hoje** por antecipação. As características da hiperinflação (caderno): $m \rightarrow 0$, inflação explosiva, déficit financiado por moeda, dolarização, e fim abrupto.

19.6.1 O Modelo de Hiperinflação no diagrama de fases

Escrevendo a dinâmica da moeda real com o déficit primário $f = g - \tau$ e o serviço de liquidez $S(m)$ (decrecente após um pico):

$$\dot{m} = f + \rho m - S(m).$$

A isóclina $\dot{m} = 0$ é $S(m) = f + \rho m$: a interseção de uma curva (o serviço $S(m)$) com uma reta (a “demanda de recursos” $f + \rho m$). Conforme a forma de $S(m)$, há **dois equilíbrios** (A e B) ou apenas um.



Onde a reta está **acima** de $S(m)$, $\dot{m} > 0$; abaixo, $\dot{m} < 0$. Lendo as setas: o equilíbrio A (baixo m) é **estável** e B é **instável**. Como $m = M/(Py)$ e $m \downarrow$ corresponde a $\pi \uparrow$, o ponto A já tem inflação **alta** — mas, como m não vai a zero, **não é hiperinflação**. A hiperinflação (com $m \rightarrow 0$) surge quando o déficit cresce no tempo ($f = f(t)$, deslocando a reta para cima até a curva $S(m)$ e a reta não mais se cruzarem): a economia “escorrega” para $m \rightarrow 0$ — uma **hiperinflação de fundamentos** (sem bolha), resultado de um déficit público insustentável financiado por moeda. É a síntese dos planos de estabilização brasileiros (Cruzado, Collor, Real): só o **ajuste fiscal** ($f \rightarrow 0$) estabiliza de forma duradoura.

💡 Do modelo anterior para este — síntese

A restrição orçamentária amarra a política fiscal que antes era livre. A dinâmica da dívida ($\dot{b} = (g - \tau) + (\rho - n_y)b$) é uma EDO cuja estabilidade depende de $(\rho - n_y)$ — o mesmo tipo de análise (coeficiente, equilíbrio, estabilidade) do Capítulo de IS-CP-RPM, agora no plano fiscal. A senhoriagem conecta o fiscal ao monetário (inflação como imposto), fechando o elo entre os módulos.

19.7 Exercícios comentados

Exercício 1. Derive $\dot{b} = (g - \tau) + (\rho - n_y)b - m(\pi + n_y) + \dot{m}$ explicitando o uso da regra do quociente para $b = B/(Py)$.

Exercício 2 (sustentabilidade). Para $(\rho - n_y) \leq 0$, esboce o diagrama de fase de \dot{b} e classifique a estabilidade. Calcule b^* e interprete o sinal.

Exercício 3 (valor presente). Resolva $\dot{b} = (g - \tau) + (\rho - n_y)b$ por fator integrante e obtenha a dívida como valor presente dos superávits. Qual o papel da condição de transversalidade?

Exercício 4 (Laffer da inflação). Com $m = e^{-\alpha r}$ e $r = \rho + \pi$, encontre a inflação que **maximiza** a senhoriagem πm . Relacione com a elasticidade unitária.

Exercício 5 (ricardiana). Enuncie as quatro hipóteses da equivalência ricardiana e explique qual delas, ao falhar na prática, faz uma redução temporária de impostos efetivamente estimular o consumo.

Monitorias do Módulo 3 — Resolução da Lista 7

A monitoria deste módulo é a **resolução completa da Lista 7**, que aplica a restrição orçamentária do governo à dinâmica da dívida pública (efeito bola de neve, senhoriagem, condição intertemporal de solvência) e à sustentabilidade da dívida externa.

20 Monitoria 7 — Lista 7: Restrição orçamentária e sustentabilidade da dívida

Resolução completa da Lista 7 (enunciado original em `Lista_7.pdf`; a resolução também é distribuída separadamente como `Lista07_Resolucao`). Esta é a monitoria do módulo: aplica a restrição orçamentária do governo e a condição de solvência à dinâmica da dívida pública e externa, passo a passo.

20.1 Exercício 1

Enunciado. A restrição orçamentária do governo é

$$G - T + rB = \dot{B} + \dot{M},$$

em que G é o gasto, T a arrecadação, r a taxa de juros nominal, B o estoque de dívida pública e M o estoque de moeda ($\dot{X} = dX/dt$).

Notação. Ao longo do exercício uso as razões em relação ao PIB nominal $Y = Py$: $b \equiv B/Y$ (dívida/PIB), $m \equiv M/Y$ (moeda/PIB), o **superávit primário** $s \equiv (T - G)/Y$ (déficit primário $= -s$), o juro **real** $\rho \equiv r - \pi$ (com $\pi = \dot{P}/P$), a taxa de **crescimento real** $\gamma \equiv \dot{y}/y$ e a **senhoriagem** $\sigma \equiv \dot{M}/Y$. Note que o produto nominal cresce a $\dot{Y}/Y = \pi + \gamma$.

20.1.1 Item 1 — Restrição orçamentária em proporção do PIB

Dividindo a restrição por Y :

$$\frac{G - T}{Y} + rb = \frac{\dot{B}}{Y} + \frac{\dot{M}}{Y}.$$

A razão $b = B/Y$ tem derivada

$$\dot{b} = \frac{\dot{B}}{Y} - \frac{B\dot{Y}}{Y^2} = \frac{\dot{B}}{Y} - (\pi + \gamma)b \implies \frac{\dot{B}}{Y} = \dot{b} + (\pi + \gamma)b,$$

e, analogamente, $\dot{M}/Y = \dot{m} + (\pi + \gamma)m \equiv \sigma$. Substituindo e isolando \dot{b} :

$$\frac{G - T}{Y} + rb = \dot{b} + (\pi + \gamma)b + \sigma \implies \dot{b} = (r - \pi - \gamma)b + \frac{G - T}{Y} - \sigma.$$

Como $r - \pi = \rho$ e $(G - T)/Y = -s$, obtém-se a **equação fundamental da dinâmica da dívida**:

$$\boxed{\dot{b} = (\rho - \gamma)b - s - \sigma.}$$

A leitura é direta: a dívida/PIB cresce pelo **efeito “bola de neve”** $(\rho - \gamma)b$ — juro real acima do crescimento encarece a dívida relativamente ao PIB — e é reduzida pelo **superávit primário** s e pela **senhoriagem** σ .

20.1.2 Item 2 — O que ocorre com a dívida/PIB?

Dados: $b = 0,50$, $m = 0,10$, $r = 0,12$, $\pi = 0,05$, $\gamma = 0,01$ e déficit primário $-s = 0,01$ (logo $s = -0,01$). O juro real é $\rho = r - \pi = 0,07$, e $\rho - \gamma = 0,06$.

Mantendo a moeda/PIB constante ($\dot{m} = 0$), a senhoriagem é $\sigma = (\pi + \gamma)m = 0,06 \times 0,10 = 0,006$. Pela equação do Item 1,

$$\dot{b} = (\rho - \gamma)b - s - \sigma = 0,06 \times 0,50 - (-0,01) - 0,006 = 0,03 + 0,01 - 0,006 = \boxed{0,034}.$$

A relação dívida/PIB está **crescendo** a cerca de 3,4 pontos percentuais ao ano. Os 3 p.p. vêm do diferencial juro-crescimento sobre a dívida ($0,06 \times 0,50$) e 1 p.p. do déficit primário, apenas parcialmente compensados pela senhoriagem (0,6 p.p.). A trajetória é **insustentável** sob a política corrente.

20.1.3 Item 3 — Condição exigida pelo FMI

O país (i) **não pode elevar o endividamento** ($\dot{b} \leq 0$) e (ii) **acabou de sair da alta inflação**, de modo que recorrer à senhoriagem/imposto inflacionário está descartado ($\sigma \approx 0$). Com $\sigma = 0$, estabilizar a dívida exige

$$\dot{b} = (\rho - \gamma)b - s \leq 0 \implies \boxed{s \geq (\rho - \gamma)b}.$$

Ou seja, o FMI deve exigir um **superávit primário** que ao menos cubra o diferencial juro-crescimento sobre a dívida. Com os números do Item 2, $s \geq 0,06 \times 0,50 = 0,03$, isto é, um superávit primário de **3% do PIB** — um ajuste fiscal de 4 p.p. (de um déficit de 1% para um superávit de 3%). Sem inflação e sem nova dívida, **só o resultado primário** pode conter a bola de neve.

20.1.4 Item 4 — Déficit primário variável (com $\rho > \gamma$)

Com superávit $s(t)$ variável e $\sigma = 0$, a dinâmica $\dot{b} = (\rho - \gamma)b - s(t)$ é uma EDO linear. Com o fator integrante $e^{-(\rho-\gamma)t}$,

$$\frac{d}{dt} [b e^{-(\rho-\gamma)t}] = -s(t) e^{-(\rho-\gamma)t}.$$

Integrando de 0 a T :

$$b(0) = \int_0^T s(\tau) e^{-(\rho-\gamma)\tau} d\tau + b(T) e^{-(\rho-\gamma)T}.$$

A **condição de solvência** (não-Ponzi) impõe que a dívida não cresça mais rápido que $\rho - \gamma$:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} b(T) e^{-(\rho-\gamma)T} = 0,$$

o que, como $\rho > \gamma$ (fator de desconto $\rho - \gamma > 0$, integral convergente), dá a **restrição orçamentária intertemporal**:

$$\boxed{b(0) = \int_0^{\infty} s(\tau) e^{-(\rho-\gamma)\tau} d\tau.}$$

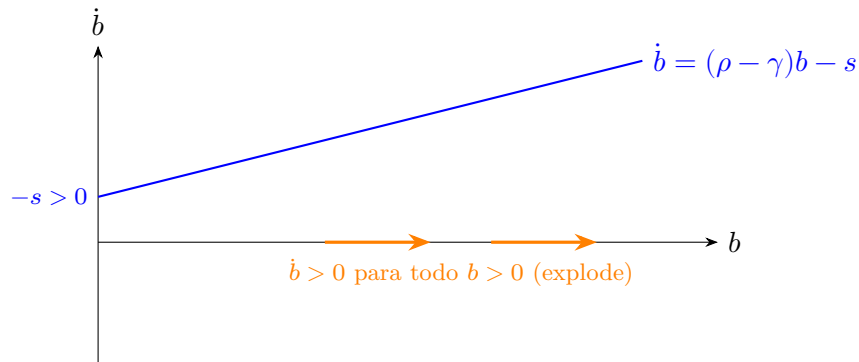
A dívida inicial precisa igualar o **valor presente dos superávits primários futuros**, descontados ao diferencial $\rho - \gamma$. É a condição geral de sustentabilidade quando o resultado primário é variável.

20.1.5 Item 5 — Déficit primário constante

Com s constante, $\dot{b} = (\rho - \gamma)b - s$ tem estado estacionário $b^* = s/(\rho - \gamma)$ e solução

$$b(t) = b^* + (b_0 - b^*)e^{(\rho - \gamma)t}.$$

Como $\rho > \gamma$, o coeficiente $(\rho - \gamma) > 0$ torna b^* um equilíbrio **instável** (o termo $e^{(\rho - \gamma)t}$ explode). Havendo **déficit** primário ($s < 0$), tem-se $b^* = s/(\rho - \gamma) < 0$, sem sentido econômico; qualquer $b_0 > 0 > b^*$ implica $b(t) \rightarrow +\infty$. A dívida é, portanto, **insustentável**: cresce sem limite. O único ponto que estabiliza é o fio da navalha $b_0 = b^*$ (exigindo superávit $s = (\rho - \gamma)b_0$); fora dele, a trajetória diverge.



20.1.6 Item 6 — Regra $\frac{T - G}{Y} = \alpha \rho b$

Agora $s = \alpha \rho b$, com $\alpha > 0$. Substituindo em $\dot{b} = (\rho - \gamma)b - s$ (com $\sigma = 0$):

$$\dot{b} = (\rho - \gamma)b - \alpha \rho b = [\rho(1 - \alpha) - \gamma]b.$$

A dívida é sustentável (converge a zero) se, e só se, o coeficiente for **negativo**:

$$\rho(1 - \alpha) - \gamma < 0 \iff \rho(1 - \alpha) < \gamma \iff \boxed{\alpha > 1 - \frac{\gamma}{\rho} = \frac{\rho - \gamma}{\rho}}.$$

Como $\rho > \gamma$, o limiar $(\rho - \gamma)/\rho \in (0, 1)$. Satisfeita a condição, $b(t) = b_0 e^{[\rho(1 - \alpha) - \gamma]t} \rightarrow 0$: a resposta do superávit à carga de juros é forte o bastante para vencer a bola de neve.

20.1.7 Item 7 — Regra $\frac{T - G}{Y} = \alpha b$

Agora $s = \alpha b$ (o superávit reage ao **nível** da dívida). Então

$$\dot{b} = (\rho - \gamma)b - \alpha b = [(\rho - \gamma) - \alpha]b,$$

de modo que a dívida é **sustentável se, e só se,**

$$\boxed{\alpha > \rho - \gamma}.$$

Nesse caso $b(t) = b_0 e^{[(\rho - \gamma) - \alpha]t} \rightarrow 0$. A regra é mais simples e robusta que a do Item 6: o coeficiente de realimentação precisa apenas **superar o diferencial juro-crescimento** $\rho - \gamma$, condição que não depende do nível de ρ . Se $\alpha < \rho - \gamma$, a dívida explode.

20.2 Exercício 2 — Sustentabilidade da dívida externa

Enunciado. O saldo em conta corrente é $\dot{B} = -TB + \rho^*B$, em que TB é o saldo comercial, ρ^* o juro sobre a dívida externa B (em dólares). Dividindo por Y (PIB em dólares):

$$\frac{\dot{B}}{Y} = -\frac{TB}{Y} + \rho^* \frac{B}{Y}.$$

Analise a sustentabilidade com TB constante e Y variável.

Redução. Sejam $b \equiv B/Y$ (dívida externa/PIB), $\tau \equiv TB/Y$ (saldo comercial/PIB, **constante**) e $n \equiv \dot{Y}/Y$ a taxa de crescimento do PIB em dólares. Como $\dot{b} = \dot{B}/Y - b(\dot{Y}/Y) = \dot{B}/Y - nb$,

$$\dot{b} + nb = -\tau + \rho^*b \implies \boxed{\dot{b} = (\rho^* - n)b - \tau.}$$

É a mesma estrutura do Exercício 1, com o **juro externo** ρ^* no lugar de ρ e o **saldo comercial** τ no papel do superávit primário. O estado estacionário é $b^* = \frac{\tau}{\rho^* - n}$, e $b(t) = b^* + (b_0 - b^*)e^{(\rho^* - n)t}$. Tudo depende do sinal de $\rho^* - n$:

- **Caso $\rho^* < n$ (crescimento supera o juro externo).** O coeficiente $(\rho^* - n) < 0$: o equilíbrio é **estável** e $b(t) \rightarrow b^*$ a partir de **qualquer** condição inicial. A dívida externa é **sustentável** mesmo com déficit comercial permanente ($\tau < 0 \implies b^* = \tau/(\rho^* - n) > 0$, dívida positiva e finita) — o crescimento “dilui” a dívida.
- **Caso $\rho^* > n$ (juro externo supera o crescimento).** O coeficiente $(\rho^* - n) > 0$: o equilíbrio é **instável**. A solvência (não-Ponzi, $\lim_{T \rightarrow \infty} b(T)e^{-(\rho^* - n)T} = 0$) exige

$$b_0 = \int_0^{\infty} \tau e^{-(\rho^* - n)t} dt = \frac{\tau}{\rho^* - n} \iff \boxed{\tau \geq (\rho^* - n)b_0 > 0.}$$

Ou seja, o país precisa gerar **superávit comercial** suficiente para servir a dívida; caso contrário ($\tau < (\rho^* - n)b_0$), a dívida externa **explode**.

Conclusão. Como na dívida pública, a sustentabilidade externa é governada pelo diferencial juro-crescimento: com $\rho^* < n$ ela se autoestabiliza; com $\rho^* > n$, depende de um saldo comercial que cubra o serviço da dívida.

21 Crescimento Econômico

21.1 Motivação econômica

Voltamos ao longo prazo — mas agora a pergunta é outra. No Capítulo 2 o produto potencial \bar{y} era dado; aqui queremos entender **por que \bar{y} cresce ao longo do tempo** e por que alguns países são ricos e outros pobres. Pequenas diferenças de taxa de crescimento, compostas por décadas, produzem abismos de renda — daí a célebre frase de Lucas de que, uma vez que se começa a pensar em crescimento, é difícil pensar em outra coisa.

💡 Do modelo anterior para este

Saímos da dinâmica de **estabilização** (hiatos, inflação) para a dinâmica de **acumulação** (capital, tecnologia). O ferramental é o mesmo de sempre — funções de produção, otimização de firmas (CPO/CSO), e sobretudo **log-diferenciação no tempo** e **EDO com diagrama de fase** —, agora aplicado ao estoque de capital. A escada de complexidade aqui é: Harrod–Domar → Solow → Solow com tecnologia → capital humano e crescimento endógeno.

21.2 Harrod–Domar: o ponto de partida e seu problema

O modelo mais simples supõe produto proporcional ao capital, $y = AK$ (sem capital, não há produto). Com $S = sy = I$ e acumulação $\dot{K} = I - \delta K$:

$$\frac{\dot{K}}{K} = \frac{sy}{K} - \delta = \frac{s}{v} - \delta, \quad v \equiv \frac{K}{y}.$$

Define-se a **taxa garantida** $n_w = \frac{s}{v} - \delta$ (a que o capital sustenta) e a **taxa natural** $n_y = g + n$ (crescimento da produtividade mais da população). O equilíbrio de pleno emprego exige $n_w = n_y$, isto é, $\frac{s}{v} - \delta = g + n$.

O problema do “fio da navalha”. Nada garante a igualdade $n_w = n_y$ entre parâmetros: se $n_y > n_w$ falta capital; se $n_y < n_w$, falta demanda. O equilíbrio é instável. A solução de **Solow** é tornar a relação capital-produto $v = K/y$ uma **variável endógena** (via substituição entre fatores), e não um parâmetro fixo.

21.3 O modelo de Solow

Solow adota uma função **Cobb–Douglas** com rendimentos decrescentes a cada fator:

$$y = F(K, L) = K^\alpha L^{1-\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1.$$

21.3.1 Microfundamento: as participações dos fatores

A firma escolhe K e L para maximizar o lucro $K^\alpha L^{1-\alpha} - wL - rK$ (preço = 1). As condições de primeira ordem (derivadas parciais iguais a zero):

$$\frac{\partial}{\partial K} : \alpha K^{\alpha-1} L^{1-\alpha} = r \implies \frac{rK}{y} = \alpha,$$

$$\frac{\partial}{\partial L} : (1-\alpha) K^\alpha L^{-\alpha} = w \implies \frac{wL}{y} = 1 - \alpha.$$

Logo α é a **participação do capital** na renda e $1 - \alpha$ a do trabalho, e $rK + wL = y$: a remuneração dos fatores **exaure** o produto (resultado de Euler para funções homogêneas de grau 1).

i Ferramenta matemática: otimização com várias variáveis

Maximizar $F(K, L) - wL - rK$ usa as **condições de primeira ordem** com derivadas parciais (capítulo *Funções de Várias Variáveis / Otimização*). As participações α e $1 - \alpha$ saem direto das produtividades marginais. A homogeneidade de grau 1 (retornos constantes de escala) é o que garante $rK + wL = y$ — o teorema de Euler.

21.3.2 A equação fundamental: dinâmica do capital por trabalhador

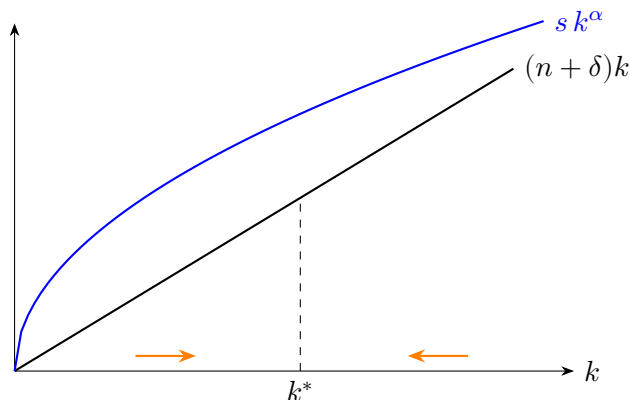
Com $\dot{K} = sy - \delta K$, $L = L_0 e^{nt}$ e a variável por trabalhador $k = K/L$, $y/L = k^\alpha$. Derivamos k no tempo pela **regra do quociente / log**:

$$\frac{\dot{k}}{k} = \frac{\dot{K}}{K} - \frac{\dot{L}}{L} = \frac{\dot{K}}{K} - n \implies \dot{k} = \frac{\dot{K}}{L} - nk = sy/L - \delta k - nk.$$

Chega-se à **equação fundamental de Solow**:

$$\dot{k} = s k^\alpha - (n + \delta) k.$$

A leitura é limpa: o capital por trabalhador **umenta** com a poupança bruta por trabalhador $s k^\alpha$ e **diminui** com a “depreciação ampliada” $(n + \delta)k$ — é preciso investir para repor o desgaste (δ) e equipar os novos trabalhadores (n).



No estado estacionário $\dot{k} = 0$:

$$s k^{*\alpha} = (n + \delta) k^* \implies k^* = \left(\frac{s}{n + \delta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad y^* = \left(\frac{s}{n + \delta} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}.$$

Propriedades. (i) **Convergência:** como sk^α é côncava e $(n + \delta)k$ linear, à esquerda de k^* tem-se $\dot{k} > 0$ e à direita $\dot{k} < 0$ — o equilíbrio é **estável**; todo país converge ao seu k^* . (ii) **Estática comparativa:** maior poupança s ou menor depreciação eleva k^* e y^* (países que poupam mais são mais ricos); um aumento de δ (ex.: guerra civil) reduz k^* .

! A limitação do Solow básico: crescimento de longo prazo é zero

No estado estacionário, k e $y = k^\alpha$ **param de crescer**: a renda **per capita** estagna. Um aumento de s eleva o **nível** de y^* , mas não a **taxa** de crescimento de longo prazo (só há ganho transitório, na convergência). Rendimentos decrescentes do capital ($\alpha < 1$) esgotam o impulso. Para gerar crescimento perpétuo, é preciso **tecnologia**.

21.3.3 A regra de ouro e a ineficiência dinâmica

Qual poupança maximiza o **consumo** de estado estacionário $c^* = f(k^*) - (n + \delta)k^*$? Derivando em k^* e igualando a zero:

$$f'(k_{\text{ouro}}) = n + \delta \quad (\text{regra de ouro}).$$

Se a economia poupa **demais** ($k^* > k_{\text{ouro}}$, logo $f'(k^*) < n + \delta$), ela está em **ineficiência dinâmica**: poderia consumir mais hoje e sempre, reduzindo a poupança. É a aplicação direta de uma CPO — maximizar consumo escolhendo k^* .

21.4 Solow com progresso tecnológico

Acrescentamos tecnologia **augmentadora de trabalho** (A , “labor-augmenting”):

$$y = K^\alpha (AL)^{1-\alpha}, \quad \frac{\dot{A}}{A} = g, \quad \frac{\dot{L}}{L} = n.$$

Trabalhamos por **unidade de trabalho efetivo** $\hat{k} = K/(AL)$, $\hat{y} = \hat{k}^\alpha$. A mesma log-diferenciação (agora \widehat{AL} cresce a $g + n$) dá:

$$\hat{\dot{k}} = s \hat{k}^\alpha - (n + g + \delta) \hat{k}, \quad \hat{k}^* = \left(\frac{s}{n + g + \delta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

A depreciação ampliada ganha um terceiro termo, g : além de repor desgaste e equipar novos trabalhadores, é preciso acompanhar a maior **eficiência** de cada trabalhador.

i Ferramenta matemática: log-diferenciação para taxas de crescimento

A dinâmica de $\hat{k} = K/(AL)$ sai de $\ln \hat{k} = \ln K - \ln A - \ln L$, derivando: $\hat{\dot{k}}/\hat{k} = \dot{K}/K - g - n$. É a **diferenciação logarítmica** de sempre. E as taxas de crescimento de longo prazo saem de

$\ln y = \alpha \ln K + (1 - \alpha) \ln(AL)$ derivado no tempo.

Crescimento de longo prazo. No estado estacionário (\hat{k} constante): o produto **por trabalhador** cresce a g , e o produto **total** a $g+n$. Eis a mensagem central de Solow: **só o progresso tecnológico g sustenta o crescimento da renda per capita** no longo prazo; poupança afeta o nível, não a taxa.

💡 O modelo no mundo real: China, convergência e o Brasil

Convergência condicional: países **mais distantes do seu próprio** estado estacionário crescem mais rápido (o termo transitório $s\hat{k}^{\alpha-1} - \delta_{ef}$ é maior quando \hat{k} é baixo). Por isso a **China**, partindo de capital baixo, cresceu tão rápido — e desacelera à medida que se aproxima de \hat{k}^* . O **Brasil** dobrou o PIB per capita em menos de 10 anos no auge (investiu ~27% do PIB nos anos 1970), mas a crise da dívida dos anos 1980 (a “década perdida”) interrompeu a trajetória; hoje, perto do seu estado estacionário, cresce pouco. Países pobres com baixa poupança ou alta depreciação convergem para um \hat{k}^* baixo — não convergem para os ricos (convergência **condicional**, não absoluta).

21.4.1 A velocidade de convergência (log-linearização)

Quão **rápido** um país se aproxima do seu estado estacionário? Respondemos linearizando a equação fundamental em torno de \hat{k}^* — o mesmo procedimento de estabilidade dos diagramas de fase, agora aplicado a Solow. Defina $z = \ln \hat{k} - \ln \hat{k}^*$ (desvio log do estado estacionário). Da equação $\dot{\hat{k}} = s\hat{k}^\alpha - (n + g + \delta)\hat{k}$, dividindo por \hat{k} :

$$\frac{\dot{\hat{k}}}{\hat{k}} = s\hat{k}^{\alpha-1} - (n + g + \delta).$$

Como $\dot{z} = \dot{\hat{k}}/\hat{k}$, e expandindo $s\hat{k}^{\alpha-1}$ por **Taylor de 1ª ordem** em torno de \hat{k}^* (onde $s\hat{k}^{*\alpha-1} = n + g + \delta$):

$$\dot{z} = -\lambda z, \quad \lambda = (1 - \alpha)(n + g + \delta) > 0.$$

É uma EDO linear estável: a solução é $z(t) = z(0)e^{-\lambda t}$ — o desvio decai exponencialmente à taxa λ . A leitura econômica é a **convergência condicional**: a velocidade depende de $(1 - \alpha)$ (a força dos rendimentos decrescentes) e países mais distantes do **seu próprio** \hat{k}^* crescem mais rápido. Com $\alpha \approx 1/3$ e $n + g + \delta \approx 6\%$, $\lambda \approx 4\%$ ao ano — a “regra dos 2%” empírica.

i Ferramenta matemática: linearização de uma EDO não-linear

Para achar a velocidade de convergência, tomamos a EDO não-linear $\dot{\hat{k}} = f(\hat{k})$, escrevemos em desvios log e aproximamos por **Taylor de 1ª ordem** em torno do equilíbrio — exatamente como linearizamos sistemas para classificar nós/selas (capítulo *EDO* das Notas de Matemática). O autovalor $-\lambda$ governa $e^{-\lambda t}$; seu módulo é a velocidade de convergência.

21.5 Capital humano e crescimento endógeno

Duas extensões fecham o módulo (cf. Barro e Sala-i-Martin (1995)):

- **Capital humano.** Acrescentando H à produção, $y = K^\alpha H^\beta (AL)^{1-\alpha-\beta}$, amplia-se a fração da renda explicada por fatores acumuláveis. Isso **acelera a convergência** e ajuda a explicar por que países com mais educação são mais ricos — sem abandonar a estrutura de Solow.
- **Crescimento endógeno.** Se os rendimentos do capital (amplamente definido, incluindo conhecimento) **não** forem decrescentes — o caso-limite $y = Ak$ —, a equação fundamental vira $\dot{k}/k = sA - (n + \delta)$: a economia cresce **sem** depender de g exógeno. O crescimento passa a ser determinado **dentro** do modelo (poupança, P&D, externalidades do conhecimento), revertendo a conclusão de neutralidade da poupança.

21.6 Contabilidade do crescimento: o resíduo de Solow

Quanto do crescimento vem de cada fonte? De $y = AK^\alpha L^{1-\alpha}$, tomando log e derivando no tempo:

$$\frac{\dot{y}}{y} = \underbrace{\frac{\dot{A}}{A}}_{\text{PTF (resíduo)}} + \alpha \frac{\dot{K}}{K} + (1 - \alpha) \frac{\dot{L}}{L}.$$

O crescimento do produto decompõe-se em acumulação de **capital**, de **trabalho** e um **resíduo** — a Produtividade Total dos Fatores (PTF), a parte **não explicada** pelos fatores, atribuída a tecnologia e eficiência. Mais uma vez, a ferramenta é a log-diferenciação.

💡 Do modelo anterior para este — fechando o curso

Encerramos onde começamos — no longo prazo — mas agora **endogenizando seu crescimento**. A mesma matemática que atravessou todo o curso (otimização para os preços dos fatores, log-diferenciação para taxas de crescimento, EDO com diagrama de fase para a dinâmica do capital) reaparece. Do mercado de trabalho do Capítulo 2 ao resíduo de Solow, o fio condutor foi sempre: **escrever a relação econômica, linearizar/log-diferenciar, e ler a dinâmica no diagrama**.

21.7 Exercícios comentados

Exercício 1 (participações). Para $y = K^\alpha L^{1-\alpha}$, derive as CPO da firma e mostre que $rK/y = \alpha$ e $wL/y = 1 - \alpha$. Interprete.

Exercício 2 (equação fundamental). Deduza $\dot{k} = sk^\alpha - (n + \delta)k$ via log-diferenciação de $k = K/L$. Encontre k^* e y^* e mostre, no diagrama, a estabilidade.

Exercício 3 (estática comparativa). Mostre o efeito de um aumento de s e de um aumento de δ sobre k^* , y^* e a taxa de crescimento de longo prazo. Por que a poupança afeta o nível mas não a taxa?

Exercício 4 (regra de ouro). Maximize $c^* = f(k^*) - (n + \delta)k^*$ em k^* e obtenha $f'(k_{\text{ouro}}) = n + \delta$. Explique a ineficiência dinâmica.

Exercício 5 (convergência). Use $\dot{y}/y = g + \alpha[s\hat{k}^{\alpha-1} - (n + g + \delta)]$ para explicar por que países pobres (baixo \hat{k}) crescem mais rápido. Aplique ao caso da China.

Exercício 6 (resíduo de Solow). Com $\alpha = 1/3$, $\dot{y}/y = 4\%$, $\dot{K}/K = 3\%$ e $\dot{L}/L = 1\%$, calcule a contribuição da PTF (\dot{A}/A).

Monitoria do Módulo 4 — Resolução da Lista 8

A monitoria deste módulo é a **resolução completa da Lista 8**, que aplica o modelo de Solow: estado estacionário do capital, produto e consumo per capita, a regra de ouro da poupança e as propriedades de crescimento de longo prazo (convergência condicional e neutralidade da poupança sobre a taxa de crescimento).

22 Monitoria 8 — Lista 8: Modelo de Solow

Resolução completa da Lista 8 (enunciado original em `Lista_8.pdf`; a resolução também é distribuída separadamente como `Lista08_Resolucao`). Esta é a monitoria do módulo: aplica o modelo de Solow — estado estacionário, regra de ouro e as propriedades de crescimento de longo prazo — passo a passo.

22.1 Exercício 1 — Solow com Cobb–Douglas

Enunciado. No modelo de Solow, suponha função de produção Cobb–Douglas $F(K, L) = K^\alpha L^{1-\alpha}$, com $0 < \alpha < 1$. (i) Encontre as expressões de estado estacionário para o capital per capita k^* , o produto per capita y^* e o consumo per capita c^* ; (ii) qual a taxa de poupança da regra de ouro?; (iii) a taxa de poupança é capaz de influenciar a taxa de crescimento do produto?

Notação. Trabalho por trabalhador: $k \equiv K/L$, $y \equiv Y/L$. Como F tem retornos constantes de escala, $y = F(K, L)/L = (K/L)^\alpha = k^\alpha \equiv f(k)$. Parâmetros: taxa de **poupança** $s \in (0, 1)$, **depreciação** $\delta > 0$ e **crescimento populacional** $n \geq 0$ ($\dot{L}/L = n$). Não há progresso tecnológico (A constante).

22.1.1 Item 1 — Estado estacionário k^* , y^* , c^*

A acumulação de capital é $\dot{K} = sY - \delta K$ (poupança investida, líquida de depreciação). Passando ao **por trabalhador** via log-diferenciação de $k = K/L$,

$$\frac{\dot{k}}{k} = \frac{\dot{K}}{K} - \frac{\dot{L}}{L} = \frac{\dot{K}}{K} - n \implies \dot{k} = \frac{\dot{K}}{L} - nk = s \frac{Y}{L} - \delta k - nk,$$

o que dá a **equação fundamental de Solow**:

$$\dot{k} = s k^\alpha - (n + \delta) k.$$

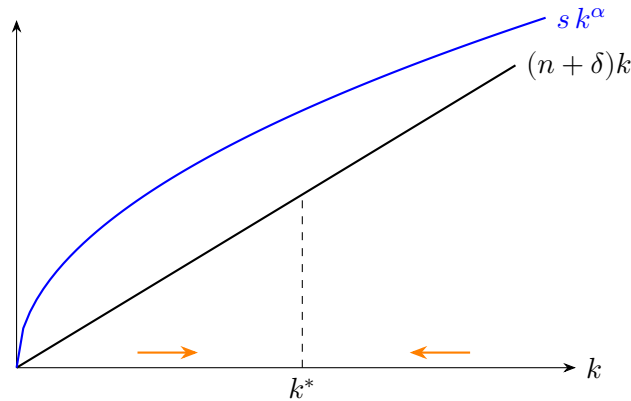
No estado estacionário $\dot{k} = 0$, o investimento por trabalhador iguala a depreciação ampliada:

$$s k^{*\alpha} = (n + \delta) k^* \implies k^{*1-\alpha} = \frac{s}{n + \delta} \implies k^* = \left(\frac{s}{n + \delta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

Substituindo em $y = k^\alpha$ e em $c = (1 - s)y$:

$$y^* = \left(\frac{s}{n + \delta} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}, \quad c^* = (1 - s) \left(\frac{s}{n + \delta} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}.$$

O equilíbrio é **estável**: como sk^α é côncava e $(n + \delta)k$ é linear, à esquerda de k^* tem-se $\dot{k} > 0$ e à direita $\dot{k} < 0$ — qualquer economia converge para o seu k^* .



22.1.2 Item 2 — Taxa de poupança da regra de ouro

A **regra de ouro** é a poupança que maximiza o **consumo de estado estacionário**. Como no estado estacionário $c^* = f(k^*) - (n + \delta)k^*$, maximizamos escolhendo k^* :

$$\frac{dc^*}{dk^*} = f'(k^*) - (n + \delta) = 0 \implies \boxed{f'(k_{\text{ouro}}) = n + \delta.}$$

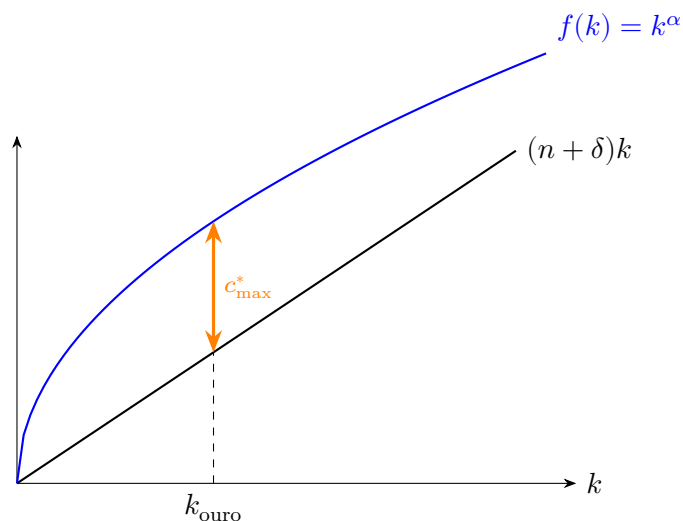
A produtividade marginal do capital deve igualar a depreciação ampliada. Com $f(k) = k^\alpha$, $f'(k) = \alpha k^{\alpha-1}$:

$$\alpha k_{\text{ouro}}^{\alpha-1} = n + \delta \implies k_{\text{ouro}} = \left(\frac{\alpha}{n + \delta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

Para obter a **taxa de poupança** correspondente, note que, em qualquer estado estacionário, $s = (n + \delta)k^{*1-\alpha}$ (do Item 1). Avaliando em k_{ouro} :

$$s_{\text{ouro}} = (n + \delta) k_{\text{ouro}}^{1-\alpha} = (n + \delta) \cdot \frac{\alpha}{n + \delta} \implies \boxed{s_{\text{ouro}} = \alpha.}$$

A taxa de poupança da regra de ouro **igual a participação do capital na renda**. É um resultado limpo do caso Cobb–Douglas: poupar exatamente a fração α (a fatia do capital no produto) maximiza o consumo de longo prazo. Se $s > \alpha$, a economia está em **ineficiência dinâmica** — poupa demais e poderia consumir mais hoje e sempre reduzindo s ; se $s < \alpha$, poupa de menos frente à regra de ouro.



O consumo $c^* = f(k^*) - (n + \delta)k^*$ é a distância vertical entre a curva $f(k)$ e a reta $(n + \delta)k$; ela é máxima onde as inclinações se igualam, $f'(k_{\text{ouro}}) = n + \delta$.

22.1.3 Item 3 — A poupança afeta a taxa de crescimento?

Não — não no longo prazo. Da equação fundamental, a taxa de crescimento do capital por trabalhador é

$$\frac{\dot{k}}{k} = s k^{\alpha-1} - (n + \delta).$$

Como $\alpha < 1$, o termo $s k^{\alpha-1}$ é **decrecente** em k (rendimentos decrescentes): à medida que a economia acumula capital, o crescimento desacelera até parar em k^* , onde $\dot{k}/k = 0$. Logo, no estado estacionário:

- o **produto per capita** $y^* = k^{*\alpha}$ é **constante** (cresce à taxa **zero**);
- o **produto agregado** $Y = yL$ cresce apenas à taxa populacional n .

Um aumento de s eleva o **nível** de k^* e y^* (a economia fica mais rica), mas **não** a taxa de crescimento de longo prazo: o efeito sobre o crescimento é apenas **transitório**, durante a convergência ao novo estado estacionário mais alto. É a mensagem central do Solow básico: rendimentos decrescentes do capital esgotam qualquer impulso da poupança.

Poupança afeta o *nível* (y^*), não a *taxa* de crescimento de longo prazo.

Só o **progresso tecnológico exógeno** g (ausente aqui) sustentaria crescimento perpétuo do produto per capita — caso em que y cresceria a g no longo prazo, ainda independentemente de s .

22.2 Exercício 2 — Verdadeiro ou falso (modelo de Solow)

Enunciado. Sobre o modelo de Solow, responda verdadeiro ou falso, justificando. Convenção: n = crescimento populacional, g = crescimento do progresso tecnológico (aumentador de trabalho), δ = depreciação, s = poupança, α = participação do capital.

22.2.1 Item 1

A taxa de crescimento do produto potencial da economia depende da taxa de poupança.

Falso. No longo prazo, o produto potencial (agregado) cresce à taxa $n + g$, determinada pelo crescimento populacional e pelo progresso tecnológico — **ambos exógenos** e independentes de s . A poupança altera o **nível** do produto de estado estacionário, não a sua **taxa** de crescimento (efeito apenas transitório na convergência).

22.2.2 Item 2

A relação capital-produto K/Y cresce a uma taxa constante no longo prazo.

Falso. No estado estacionário, K e Y crescem à **mesma** taxa ($n + g$), de modo que a razão K/Y é **constante** — ela não cresce (taxa de crescimento **zero**). É, aliás, um dos fatos estilizados de Kaldor. Dizer que “cresce a uma taxa constante (positiva)” é falso: ela se estabiliza.

22.2.3 Item 3

No longo prazo, o produto cresce à taxa g .

Falso. O produto **agregado** Y cresce à taxa $n + g$ no longo prazo. Quem cresce à taxa g é o produto **por trabalhador** (Y/L). Sem qualificar “per capita”, a afirmação está incorreta: falta o termo populacional n .

22.2.4 Item 4

O modelo de Solow afirma que países mais pobres devem crescer em ritmo mais elevado que países ricos.

Falso. Solow prevê **convergência condicional**, não absoluta: cada país converge para o **seu próprio** estado estacionário, determinado por seus parâmetros (s, n, δ, g). Um país pobre cresce mais rápido apenas se estiver **abaixo do seu k^*** ; se seus fundamentos levam a um k^* baixo (pouca poupança, alta depreciação), ele converge para um estado estacionário pobre e não alcança os ricos.

22.2.5 Item 5

A taxa de crescimento do produto per capita de longo prazo é igual à taxa de crescimento populacional.

Falso. O produto **per capita** cresce à taxa g (progresso tecnológico), não a n . A taxa populacional n é a diferença entre o crescimento do produto **agregado** ($n + g$) e o **per capita** (g). Se fosse n , a renda per capita cresceria só por haver mais gente — o oposto do mecanismo.

22.2.6 Item 6

Países que poupam mais crescem mais rápido.

Falso (no longo prazo). Maior poupança eleva o **nível** de renda de estado estacionário, mas todos os países crescem à mesma taxa $n + g$ no longo prazo, qualquer que seja s . Poupar mais gera crescimento **mais rápido apenas temporariamente**, durante a transição para o novo k^* mais elevado — não uma taxa de crescimento permanentemente maior.

22.2.7 Item 7

No longo prazo, o produto por unidades eficientes de trabalho cresce a uma taxa igual à taxa de crescimento do progresso tecnológico exógeno.

Falso. O produto por unidade de trabalho **efetivo** $\hat{y} = Y/(AL) = \hat{k}^\alpha$ é **constante** no estado estacionário (cresce à taxa **zero**) — é justamente por isso que definimos essa variável. Quem cresce à taxa g é o produto por trabalhador ($Y/L = A\hat{y}$), não por unidade de trabalho efetivo.

22.2.8 Item 8

No modelo de Solow, somente os países com baixo estoque de capital atingem o estado estacionário.

Falso. Todo país converge para o estado estacionário, esteja ele **abaixo** ($k_0 < k^*$, então $\dot{k} > 0$) ou **acima** ($k_0 > k^*$, então $\dot{k} < 0$) do equilíbrio. A estabilidade global do diagrama de Solow garante a convergência a partir de qualquer condição inicial positiva — não só de estoques baixos de capital.

Provas resolvidas

Encerrando as notas, reúnem-se as **duas provas** da disciplina, resolvidas questão a questão. Diferentemente dos testes — distribuídos ao fim de cada módulo —, as provas são **cumulativas**: cada uma percorre o modelo fechado IS–CP–RPM (Módulo 1), a economia aberta (Módulo 2), a restrição orçamentária do governo (Módulo 3) e o crescimento de Solow (Módulo 4). As duas versões compartilham a estrutura, diferindo sobretudo no plano de análise da economia aberta e nos exercícios numéricos de dívida.

23 Prova 1 (2025) — Prova cumulativa da disciplina

*Reconstrução da primeira versão da prova da disciplina (enunciados originais em [Prova.pdf](#); resolução comentada também distribuída em [testes_e_provas](#)). A prova é **cumulativa** e percorre todos os módulos do curso: o modelo fechado IS–CP–RPM (Módulo 1), a economia aberta com câmbio flutuante (Módulo 2), a restrição orçamentária do governo (Módulo 3) e o crescimento de Solow (Módulo 4). As quatro questões são resolvidas de forma autocontida.*

23.1 Questão 1 (2,5 pts) — IS–CP–RPM fechado

Enunciado. Considere o modelo

$$\begin{aligned}\text{IS: } & \dot{y} = -\alpha(\rho - \bar{\rho}), \quad \alpha > 0 \\ \text{CP: } & \dot{\pi} = \delta(y - \bar{y}), \quad \delta > 0 \\ \text{RPM: } & r = \bar{\rho} + \pi + \phi(\pi - \bar{\pi}) + \theta(y - \bar{y}), \quad \phi, \theta > 0 \\ \text{CI: } & p(0), \pi(0)\end{aligned}$$

(a) Analise o equilíbrio e a dinâmica no diagrama de fases com π no eixo vertical e y no horizontal. (b) Mostre a dinâmica quando o BC **eleva** a meta de inflação. (c) O que aconteceria se $\phi < 0$?

Observação sobre a IS diferencial. O enunciado escreve a IS na forma $\dot{y} = -\alpha(\rho - \bar{\rho})$. No estado estacionário $\dot{y} = 0 \Rightarrow \rho = \bar{\rho}$, e como $\dot{\pi} = 0 \Rightarrow y = \bar{y}$, o equilíbrio coincide com o da forma estática $y - \bar{y} = -\alpha(\rho - \bar{\rho})$. Para a análise gráfica em (y, π) conduzimos a redução padrão (forma estática), o procedimento usual da disciplina.

23.1.1 Item (a) — Equilíbrio e dinâmica

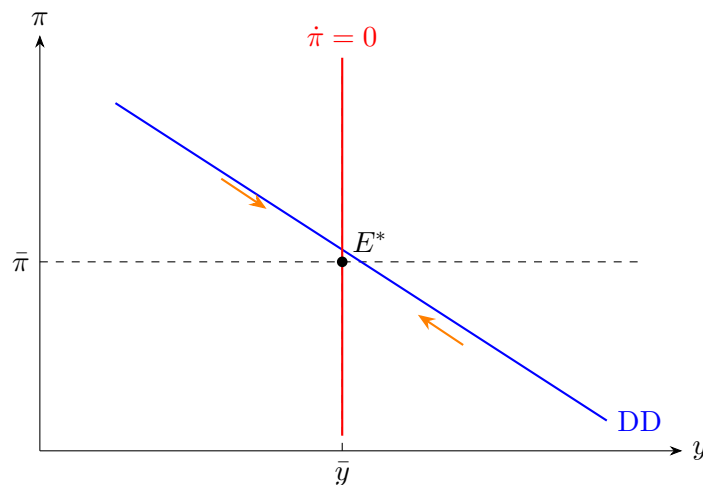
Como $\rho = r - \pi$, a RPM em termos reais dá $\rho - \bar{\rho} = \phi(\pi - \bar{\pi}) + \theta(y - \bar{y})$. Levando à IS $y - \bar{y} = -\alpha(\rho - \bar{\rho})$:

$$(1 + \alpha\theta)(y - \bar{y}) = -\alpha\phi(\pi - \bar{\pi}) \implies \boxed{y - \bar{y} = -\frac{\alpha\phi}{1 + \alpha\theta}(\pi - \bar{\pi}) \quad (\text{DD}).}$$

A DD é **negativamente inclinada** para $\phi > 0$. A isóclina $\dot{\pi} = 0$ é a **vertical** $y = \bar{y}$. Na interseção, $E^* = (\bar{y}, \bar{\pi})$, com $\rho^* = \bar{\rho}$ e $r^* = \bar{\rho} + \bar{\pi}$. Substituindo a DD na CP,

$$\dot{\pi} = \delta(y - \bar{y}) = -\frac{\alpha\phi\delta}{1 + \alpha\theta}(\pi - \bar{\pi}), \quad \lambda = -\frac{\alpha\phi\delta}{1 + \alpha\theta} < 0,$$

de modo que o equilíbrio é **assintoticamente estável**, com convergência monotônica de π a $\bar{\pi}$ ao longo da DD.

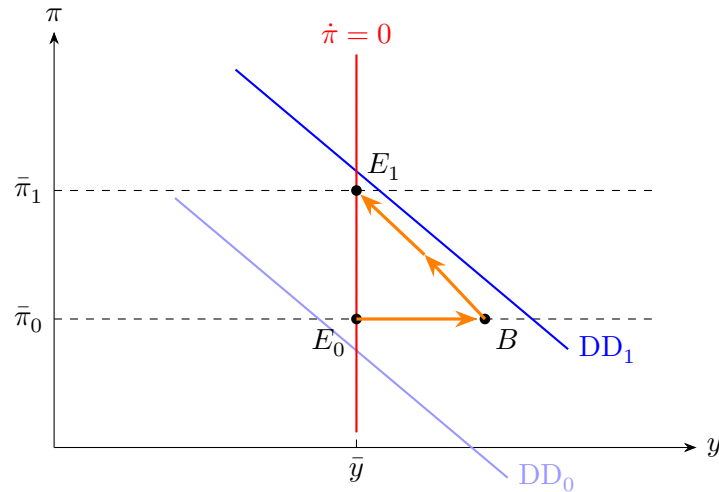


23.1.2 Item (b) — O BC eleva a meta de inflação

Em t_0 , $\bar{\pi}_0 \rightarrow \bar{\pi}_1 > \bar{\pi}_0$ (permanente). A isóclina $\dot{\pi} = 0$ (vertical em \bar{y}) não se move; a **DD sobe**, passando a cruzar $(\bar{y}, \bar{\pi}_1)$. Como π é **predeterminada** (inércia da CP), em t_0^+ ela permanece em $\bar{\pi}_0 < \bar{\pi}_1$, e a economia salta **horizontalmente** até o ponto B sobre a nova DD:

$$y_B - \bar{y} = -\frac{\alpha\phi}{1 + \alpha\theta}(\bar{\pi}_0 - \bar{\pi}_1) = \frac{\alpha\phi}{1 + \alpha\theta}(\bar{\pi}_1 - \bar{\pi}_0) > 0.$$

Há **expansão imediata** ($y_B > \bar{y}$, *boom*): como agora $\pi < \bar{\pi}_1$, o BC afrouxa ($\rho - \bar{\rho} = \phi(\pi - \bar{\pi}_1) < 0$), e a IS eleva o produto. A partir de B , com $y > \bar{y}$ a CP dá $\dot{\pi} > 0$: a inflação sobe gradualmente ao longo da nova DD até $E_1 = (\bar{y}, \bar{\pi}_1)$.



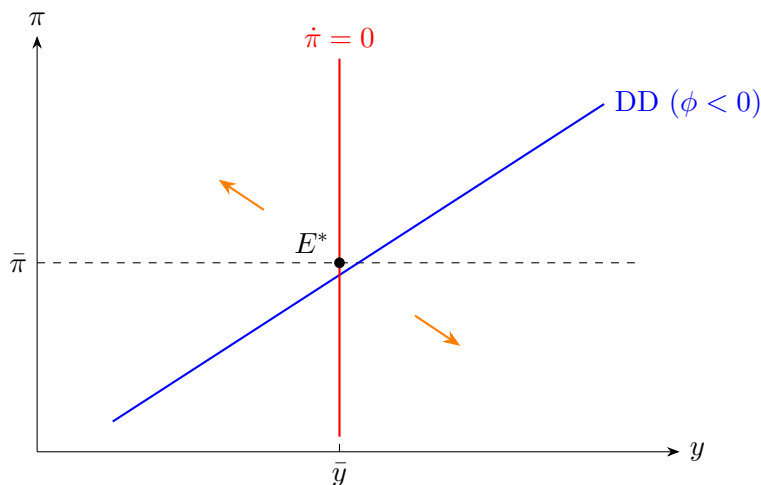
A elevação da meta gera, portanto, uma **expansão transitória** ($y_B > \bar{y}$), com a inflação subindo gradualmente até $\bar{\pi}_1$ e o produto retornando ao potencial — o espelho simétrico da desinflação custosa.

23.1.3 Item (c) — O caso $\phi < 0$

Com $\phi < 0$ a DD inverte-se: a inclinação $-(1 + \alpha\theta)/(\alpha\phi)$ torna-se **positiva**, e o autovalor reduzido

$$\lambda = -\frac{\alpha\phi\delta}{1 + \alpha\theta} > 0$$

fica **positivo**: $E^* = (\bar{y}, \bar{\pi})$ torna-se **instável**. Pela RPM em termos reais, $\phi < 0$ faz o BC **reduzir** o juro real quando $\pi > \bar{\pi}$ (resposta na direção errada): isso estimula a demanda, eleva y e, pela CP, acelera ainda mais π . Sem o princípio de Taylor ($\phi > 0$) não há **âncora nominal**, e qualquer desvio $\pi(0) \neq \bar{\pi}$ se amplifica.



23.2 Questão 2 (3,0 pts) — Economia aberta no plano (y, π)

Enunciado. Modelo de pequena economia aberta:

$$\begin{aligned} \text{IS: } & y - \bar{y} = -\alpha(\rho - \bar{\rho}) + \beta(q - \bar{q}) \\ \text{CP: } & \dot{\pi} = \gamma\dot{q} + \delta(y - \bar{y}) \\ \text{RPM: } & r = \bar{\rho} + \pi + \theta(\pi - \bar{\pi}) + \phi\dot{q} \\ \text{PJD: } & \rho = \bar{\rho} + \dot{q} \\ \text{CI: } & p(0), \pi(0) \end{aligned}$$

com $\phi < 1$. (a) Regime cambial. (b) Equilíbrio e dinâmica em (y, π) . (c) Aumento da meta.

23.2.1 Item (a) — Regime cambial

O instrumento de política é a **taxa de juros** (regra de Taylor sobre r), não o câmbio: o regime é de **câmbio flutuante**. O câmbio nominal ajusta-se via PJD para compatibilizar o juro fixado pela regra com a arbitragem internacional. A âncora nominal é a **meta de inflação** $\bar{\pi}$; o termo $\phi\dot{q}$ faz o BC “inclinarse contra o vento”, suavizando o câmbio, e $\phi < 1$ garante (item (b)) que a regra continua ancorando o sistema.

23.2.2 Item (b) — Equilíbrio e dinâmica em (y, π)

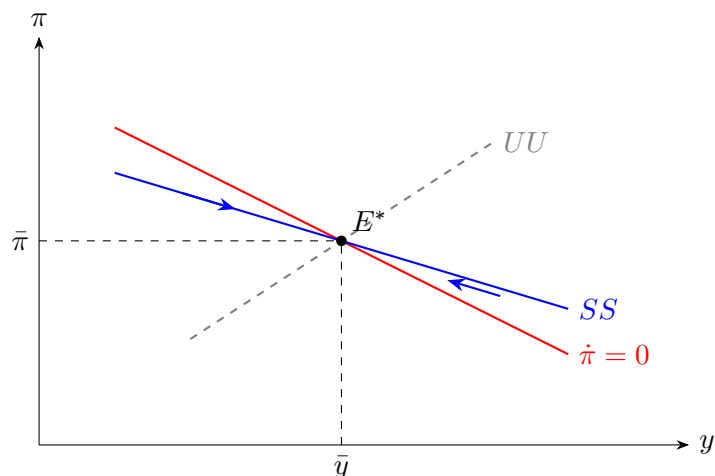
Por Fisher $\rho = r - \pi$; da RPM, $\rho - \bar{\rho} = \theta(\pi - \bar{\pi}) + \phi\dot{q}$. Igualando à PJD ($\rho - \bar{\rho} = \dot{q}$):

$$(1 - \phi)\dot{q} = \theta(\pi - \bar{\pi}) \implies \boxed{\dot{q} = a(\pi - \bar{\pi}), \quad a \equiv \frac{\theta}{1 - \phi} > 0}$$

(positivo porque $\phi < 1$), e $\rho - \bar{\rho} = a(\pi - \bar{\pi})$. Levando à IS, $y - \bar{y} = -\alpha a(\pi - \bar{\pi}) + \beta(q - \bar{q})$; a CP fica $\dot{\pi} = \delta(y - \bar{y}) + \gamma a(\pi - \bar{\pi})$. Derivando a IS no tempo e usando $\dot{q} = a(\pi - \bar{\pi})$:

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{y} &= -\alpha\delta a(y - \bar{y}) + a(\beta - \alpha\gamma a)(\pi - \bar{\pi}), \\ \dot{\pi} &= \delta(y - \bar{y}) + \gamma a(\pi - \bar{\pi}). \end{aligned}} \quad \det J = -a\delta\beta < 0.$$

Como $\det J < 0$ para quaisquer parâmetros positivos (e $\phi < 1$), $E^* = (\bar{y}, \bar{\pi})$ é um **ponto de sela**: há **uma** variável predeterminada (π) e **uma** de salto (y , que herda o salto de q). A isóclina $\dot{\pi} = 0$ é $(\pi - \bar{\pi}) = -\frac{\delta}{\gamma a}(y - \bar{y})$ (negativa); o braço estável SS tem inclinação $\delta/(\mu_1 - \gamma a) < 0$ (negativa e mais plana). Dado $\pi(0)$, o produto salta horizontalmente até SS e desliza até E^* .

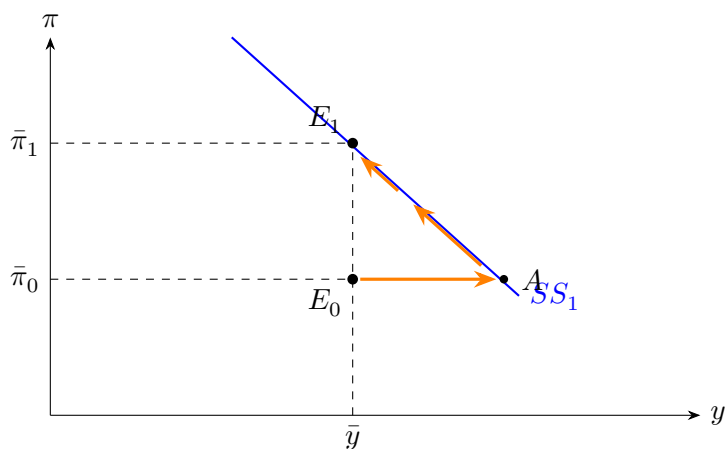


23.2.3 Item (c) — Aumento da meta de inflação

Em t_0 , $\bar{\pi}_0 \rightarrow \bar{\pi}_1 > \bar{\pi}_0$. O equilíbrio sobe verticalmente para $E_1 = (\bar{y}, \bar{\pi}_1)$ e o braço estável passa a ser SS_1 . Como π é predeterminada, em t_0^+ permanece em $\bar{\pi}_0 < \bar{\pi}_1$; quem salta é o produto. No impacto,

$$\rho - \bar{\rho} = a(\bar{\pi}_0 - \bar{\pi}_1) < 0 \quad (\text{juro real cai}), \quad q > \bar{q} \quad (\text{câmbio real deprecia}),$$

e, pela IS, $y - \bar{y} = -\alpha(\rho - \bar{\rho}) + \beta(q - \bar{q}) > 0$: juro real menor e depreciação (ganho de competitividade) **expandem** a demanda — *boom* de impacto (ponto A , à direita de \bar{y}). Em seguida, com $\pi < \bar{\pi}_1$, tem-se $\dot{q} = a(\pi - \bar{\pi}_1) < 0$ (o câmbio reaprecia) e a economia desliza ao longo de SS_1 : a inflação sobe gradualmente até $\bar{\pi}_1$ e o produto retorna a \bar{y} .



Conclusão. Na economia aberta, a elevação da meta gera **expansão inicial** por dois canais simultâneos — queda do juro real e depreciação cambial —, com a inflação subindo gradualmente até $\bar{\pi}_1$ e o produto retornando ao potencial. O canal cambial adicional tende a **acelerar** a transição em relação ao modelo fechado.

23.3 Questão 3 (2,5 pts) — Restrição orçamentária e sustentabilidade da dívida

Enunciado. A restrição orçamentária do governo é $G - T + rB = \dot{B} + \dot{M}$. (A) Escreva-a em proporção do PIB nominal. (B) Com $\dot{M} = 0$, obtenha a condição de sustentabilidade. (C) Com déficit primário $g - \tau = 1\%$, $b = 50\%$, $\rho = 8\%$, $\eta_y = 2\%$ e senhoriagem $\sigma = 0,2\%$, avalie a dívida e o ajuste necessário.

23.3.1 Item (A) — Restrição em proporção do PIB

Seja $Y = Py$ o PIB nominal, com $\dot{Y}/Y = \pi + \eta_y$ ($\eta_y \equiv \dot{y}/y$). Para $b = B/Y$ vale $\dot{b} = \dot{B}/Y - b(\pi + \eta_y)$, logo $\dot{B}/Y = \dot{b} + b(\pi + \eta_y)$, e analogamente $\dot{M}/Y = \dot{m} + m(\pi + \eta_y)$. Dividindo a restrição por Y e usando $r = \rho + \pi$:

$$g - \tau + (\rho + \pi)b = \dot{b} + b(\pi + \eta_y) + \dot{m} + m(\pi + \eta_y),$$

que simplifica para a forma canônica

$$\dot{b} = (\rho - \eta_y)b + (g - \tau) - [\dot{m} + m(\pi + \eta_y)].$$

O último colchete é a **senhoriagem real** $\sigma \equiv \dot{M}/Y$.

23.3.2 Item (B) — Sustentabilidade com $\dot{M} = 0$

Com $\dot{M} = 0$ tem-se $\sigma = \dot{m} + m(\pi + \eta_y) = 0$, e a dinâmica vira a EDO linear $\dot{b} = (\rho - \eta_y)b - (\tau - g)$. Integrando em $[t, T]$ e impondo a condição de **não-Ponzi** $\lim_{T \rightarrow \infty} b(T)e^{-(\rho - \eta_y)(T-t)} = 0$ (válida quando $\rho > \eta_y$):

$$b(t) = \int_t^{\infty} (\tau(v) - g(v)) e^{-(\rho - \eta_y)(v-t)} dv.$$

A dívida hoje deve igualar o **valor presente dos superávits primários futuros**, descontados ao diferencial juro-crescimento $\rho - \eta_y$.

23.3.3 Item (C) — Exercício numérico

Com $g - \tau = 0,01$, $b = 0,5$, $\rho = 0,08$, $\eta_y = 0,02$ e $\sigma = 0,002$:

$$\dot{b} = (\rho - \eta_y)b + (g - \tau) - \sigma = 0,06 \times 0,5 + 0,01 - 0,002 = \boxed{0,038}.$$

A dívida cresce a $\approx 3,8\%$ do PIB ao ano — **insustentável** sob a política corrente. Para estabilizá-la ($\dot{b} = 0$):

$$\tau - g = (\rho - \eta_y)b - \sigma = 0,03 - 0,002 = 0,028,$$

isto é, um **superávit primário de 2,8% do PIB** — um ajuste fiscal total de 3,8 p.p. (de déficit de 1% a superávit de 2,8%). Com o juro real (8%) muito acima do crescimento (2%), a bola de neve é forte e a senhoriagem (0,2%) alivia apenas marginalmente: o grosso do ajuste vem do **resultado primário**.

23.4 Questão 4 (2,0 pts) — Crescimento de Solow (certo, errado ou talvez)

No modelo de Solow com progresso técnico exógeno ($A = A_0 e^{gt}$, $L = L_0 e^{nt}$), em termos de capital por trabalhador efetivo $\tilde{k} = K/(AL)$ vale $\dot{\tilde{k}} = s\tilde{k}^\alpha - (n + g + \delta)\tilde{k}$, com estado estacionário $\tilde{k}^* = (s/(n + g + \delta))^{1/(1-\alpha)}$. No longo prazo Y cresce a $g + n$ e o produto **per capita** Y/L cresce a g , **independente de s** .

(a) “Uma elevação da taxa de poupança amplia a taxa de crescimento da economia.”

— **ERRADO**. Aumentar s eleva o **nível** de longo prazo de \tilde{k}^* e \tilde{y}^* (e de Y/L), mas não a **taxa** de crescimento de longo prazo ($g + n$ para Y , g para Y/L). O crescimento sobe apenas **transitoriamente**, durante a transição ao novo \tilde{k}^* . Confunde-se efeito de nível (permanente) com efeito de taxa (transitório).

(b) “A redução da taxa de investimento afeta o crescimento de longo prazo.” —

ERRADO (espelho de (a)). Reduzir s baixa \tilde{k}^* e o nível do produto per capita, mas a taxa de crescimento de longo prazo permanece $g + n$ (e g per capita). O efeito sobre o crescimento é apenas transitório.

(c) “O modelo de Solow garante a convergência de renda entre os países.” — **ERRADO**.

Solow prediz convergência **condicional**: países com os mesmos parâmetros (s, n, g, δ, α) convergem ao mesmo \tilde{k}^* . Com parâmetros heterogêneos não há convergência absoluta — empiricamente rejeitada (clubes de convergência).

(d) “A taxa de crescimento do produto per capita de longo prazo é igual a g .” —

CERTO. No estado estacionário \tilde{y} é constante e $Y/L = \tilde{y} \cdot A$ cresce à taxa de A , que é g .

24 Prova 2 (2025) — Prova cumulativa da disciplina (segunda versão)

Reconstrução da segunda versão da prova (enunciados originais em *Prova_02.pdf*, com gabarito em *Prova_02_Gabarito.pdf*). Mesma estrutura cumulativa da Prova 1: modelo fechado, economia aberta, restrição orçamentária e Solow. As diferenças concentram-se nas Questões 2 (diagrama em (ρ, q)), 3 (exercício numérico “europeu”) e 4 (itens de certo/errado). Resolvem-se as quatro questões de forma autocontida.

24.1 Questão 1 (2,5 pts) — IS–CP–RPM fechado

Enunciado. Mesmo modelo IS–CP–RPM fechado da Prova 1 (a única diferença é a condição inicial $p(0), \pi(0)$, sem efeito sobre a análise): (a) equilíbrio e dinâmica em (y, π) ; (b) BC eleva a meta; (c) caso $\phi < 0$.

A questão é **idêntica à Questão 1 da Prova 1** — a forma diferencial da IS, a redução à curva DD $y - \bar{y} = -\frac{\alpha\phi}{1+\alpha\theta}(\pi - \bar{\pi})$, a estabilidade ($\lambda = -\alpha\phi\delta/(1 + \alpha\theta) < 0$), o *boom* transitório no aumento da meta e a instabilidade sob $\phi < 0$ (perda da âncora nominal). Ver a resolução completa, com diagramas, na Questão 1 da Prova 1.

24.2 Questão 2 (3,0 pts) — Economia aberta no plano (ρ, q)

Enunciado. Mesma pequena economia aberta da Prova 1 (IS, CP, PJD e regra de Taylor com $\phi < 1$), agora analisada no diagrama de fases com a **taxa de juros real ρ no eixo vertical** e a **taxa de câmbio real q no horizontal**. (a) Regime cambial. (b) ρ e q são sempre negativamente correlacionadas? (c) Mostre o efeito de um aumento da meta de inflação.

24.2.1 Item (a) — Regime cambial

Como na Prova 1: o instrumento é o **juro** (regra de Taylor), logo o regime é de **câmbio flutuante** com mobilidade perfeita de capitais (PJD em igualdade). A âncora nominal é a meta $\bar{\pi}$, e $\phi < 1$ garante que a reação à velocidade do câmbio não inverte o sinal do mecanismo de ancoragem.

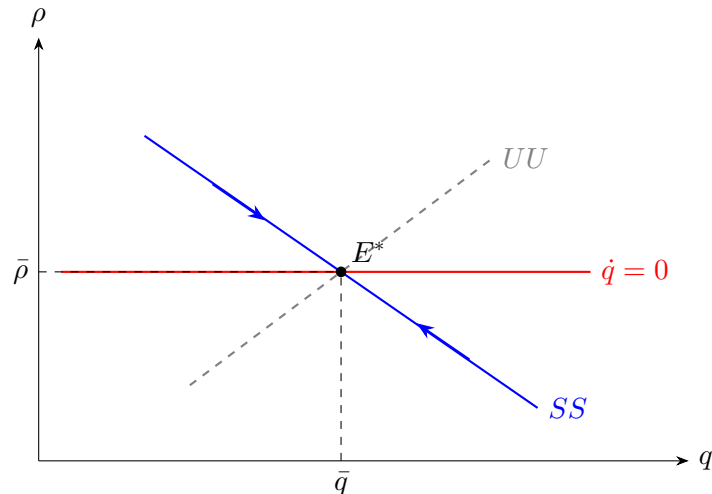
24.2.2 Item (b) — ρ e q são sempre negativamente correlacionadas?

Combinando RPM (via Fisher) e PJD obtém-se, como na Prova 1, $\dot{q} = a(\pi - \bar{\pi})$ com $a = \theta/(1 - \phi) > 0$, e $\rho - \bar{\rho} = \dot{q}$. Escrevendo o sistema em (q, ρ) — com $\pi - \bar{\pi} = (\rho - \bar{\rho})/a$ na CP e na IS:

$$\begin{cases} \dot{q} = \rho - \bar{\rho}, \\ \dot{\rho} = a\delta\beta(q - \bar{q}) + a(\gamma - \alpha\delta)(\rho - \bar{\rho}), \end{cases} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a\delta\beta & a(\gamma - \alpha\delta) \end{pmatrix}, \quad \det J = -a\delta\beta < 0.$$

Como $\det J < 0$ **para quaisquer parâmetros positivos** (e $\phi < 1$), há sempre dois autovalores reais de sinais opostos: $E^* = (\bar{q}, \bar{\rho})$ é um **ponto de sela**. A trajetória efetivamente percorrida é o **braço estável**, cujo autovetor associado a $\mu_1 < 0$ tem, pela primeira linha do sistema ($v_\rho = \mu_1 v_q$), inclinação $\mu_1 < 0$ no plano (q, ρ) .

Resposta: sim, são negativamente correlacionadas, e isso é **robusto aos parâmetros** — decorre apenas do sinal $\det J = -a\delta\beta < 0$, que independe dos valores. Ao longo do ajuste, juro real alto vem com câmbio real apreciado e vice-versa (o *overshooting* à la Dornbusch). A única ressalva é o **equilíbrio de longo prazo** $(\bar{q}, \bar{\rho})$, onde não há correlação (ambos nos seus níveis).

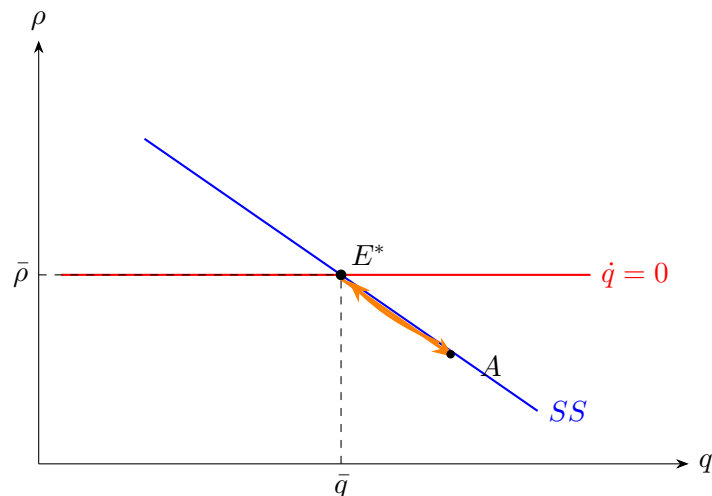


24.2.3 Item (c) — Aumento da meta de inflação

Em t_0 , $\bar{\pi}_0 \rightarrow \bar{\pi}_1 > \bar{\pi}_0$. No plano (ρ, q) , o equilíbrio $E^* = (\bar{q}, \bar{\rho})$ **não se desloca** — \bar{q} e $\bar{\rho}$ são fundamentos reais, independentes da meta; muda apenas o nível de inflação de longo prazo (que não é eixo). O braço estável SS é o mesmo. Como π é predeterminada, no impacto $\pi = \bar{\pi}_0$ e, com a nova meta,

$$\rho - \bar{\rho} = a(\bar{\pi}_0 - \bar{\pi}_1) < 0 :$$

o **juro real salta para baixo** ($\rho_A < \bar{\rho}$). Sobre o braço estável (inclinação negativa), $\rho < \bar{\rho}$ corresponde a $q > \bar{q}$ — o **câmbio real deprecia** no impacto (ponto A , abaixo e à direita de E^*). Em seguida, com $\pi > \bar{\pi}_1$, tem-se $\dot{q} = a(\pi - \bar{\pi}_1) > 0$ e a economia desliza ao longo de SS de volta a E^* , com $\rho \rightarrow \bar{\rho}$ e $q \rightarrow \bar{q}$ enquanto a inflação sobe até $\bar{\pi}_1$.



Conclusão. O aumento da meta produz, no impacto, **queda do juro real e depreciação cambial** (que expandem a demanda), e a economia retorna gradualmente ao mesmo $(\bar{q}, \bar{\rho})$ ao longo do braço de sela — o único efeito permanente é a inflação de equilíbrio mais alta.

24.3 Questão 3 (2,5 pts) — Sustentabilidade da dívida: caso europeu

Enunciado. Use a dinâmica $\dot{b} = (\rho - \eta_y)b + (g - \tau) - \sigma$ obtida na Prova 1. (B') Diagnostique a sustentabilidade de um país do Euro com $b = 60\%$, $\rho = 4\%$, $\eta_y = 2,5\%$, déficit primário $g - \tau = 3\%$ e **sem senhoriagem** ($\sigma = 0$, pois a emissão monetária cabe ao BCE). (C') Após uma crise de solvência, com $\rho = 6\%$ (prêmio de risco) e $\eta_y = 1\%$, determine o ajuste fiscal necessário.

A derivação da equação $\dot{b} = (\rho - \eta_y)b + (g - \tau) - \sigma$ e da condição intertemporal de solvência é a da Questão 3 da Prova 1 (itens A e B). Aqui aplicam-se os números do caso europeu.

24.3.1 Item (B') — Diagnóstico

Com $b = 0,6$, $\rho = 0,04$, $\eta_y = 0,025$, $g - \tau = 0,03$ e $\sigma = 0$:

$$\dot{b} = (\rho - \eta_y)b + (g - \tau) = 0,015 \times 0,6 + 0,03 = 0,009 + 0,03 = \boxed{0,039.}$$

A dívida cresce a $\approx 3,9\%$ do PIB ao ano: **trajetória explosiva, de insolvência**. Mesmo com um juro real modesto (4%), o déficit primário de 3% não pode ser sustentado — e, sem senhoriagem, não há a válvula do imposto inflacionário.

24.3.2 Item (C') — Ajuste após a crise

Após a crise, $\rho = 0,06$ (prêmio de risco) e $\eta_y = 0,01$ (crescimento reduzido). Para estabilizar a dívida ($\dot{b} = 0$, $\sigma = 0$):

$$\tau - g = (\rho - \eta_y)b = (0,06 - 0,01) \times 0,6 = 0,05 \times 0,6 = \boxed{0,03.}$$

É preciso um **superávit primário de 3% do PIB** — isto é, um ajuste fiscal total de **6 p.p.** (de déficit de 3% a superávit de 3%), da ordem do imposto à Grécia em 2010–2015.

Lição central. A combinação **alta dívida + alto juro real + baixo crescimento + sem senhoriagem** torna o ajuste fiscal extremamente penoso. Países da Eurozona em crise enfrentam exatamente essa configuração, porque (i) cederam a senhoriagem ao BCE e (ii) não podem desvalorizar a moeda nacional para inflacionar a dívida.

24.4 Questão 4 (2,0 pts) — Crescimento de Solow (certo, errado ou talvez)

Mesmo arcabouço de Solow da Prova 1: no longo prazo $\tilde{k}^* = (s/(n + g + \delta))^{1/(1-\alpha)}$, Y cresce a $g + n$ e Y/L a g , independente de s .

(a) “Uma elevação da taxa de poupança não afeta o produto da economia.” — **ERRADO**. Elevar s eleva \tilde{k}^* e \tilde{y}^* permanentemente: o nível do produto (per capita e total) sobe. Apenas a taxa de crescimento de longo prazo não muda. A afirmação confunde nível e taxa de crescimento.

(b) “A taxa de poupança eleva a taxa de crescimento do produto somente no curto prazo.” — **CERTO**. É a leitura correta: um aumento de s acelera o crescimento **durante a transição** (de um \tilde{k} menor a um \tilde{k}^* maior), mas o crescimento de longo prazo permanece $g + n$ (g per capita).

(c) “O modelo de Solow afirma que países mais pobres devem crescer em ritmo mais lento que os ricos.” — **ERRADO**. Solow prediz o **oposto**: países pobres (com \tilde{k} baixo) têm produto marginal do capital alto ($f'' < 0$) e crescem **mais rápido** na transição — a hipótese de **convergência condicional** (Barro–Sala-i-Martin). A heterogeneidade de parâmetros (clubes de convergência) pode atenuar isso na prática, mas o modelo puro prediz convergência (condicional).

(d) “A taxa de crescimento do produto per capita de longo prazo é igual a g .” — **CERTO**. Idêntico à Prova 1: $Y/L = \tilde{y} \cdot A$ com \tilde{y} constante no estado estacionário, e A cresce a g .

25 Referências

- Barbosa, Fernando de Holanda. 2009. *Apostila — Teoria Macroeconômica*. MFEE/FGV.
- Barbosa, Fernando de Holanda. 2017. *Macroeconomia*. 1º ed. Editora FGV.
- Barro, Robert J., e Xavier Sala-i-Martin. 1995. *Economic Growth*. McGraw-Hill.
- Clarida, Richard, Jordi Galí, e Mark Gertler. 1999. “The Science of Monetary Policy: A New Keynesian Perspective”. *Journal of Economic Literature* 37 (4): 1661–707.
- Lucas, Robert E. 1976. “Econometric Policy Evaluation: A Critique”. *Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy* 1: 19–46.
- Poole, William. 1970. “Optimal Choice of Monetary Policy Instruments in a Simple Stochastic Macro Model”. *Quarterly Journal of Economics* 84 (2): 197–216.
- Romer, David. 2000. “Keynesian Macroeconomics without the LM Curve”. *Journal of Economic Perspectives* 14 (2): 149–69.
- Taylor, John B. 1993. “Discretion versus Policy Rules in Practice”. *Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy* 39: 195–214.