FGV EPGE
ESCOLA BRASILEIRA DE ECONOMIA E FINANÇAS

Notas de Aula para o Mestrado e Doutorado em Economia

Dívida Soberana e Câmbio

FGV/EPGE — Ana Flávia Soares dos Santos Oliveira

Vitor Wilher[1]

Versão preliminar — compilada ao longo do curso (a partir de Outubro de 2026). Baseada nos slides da disciplina, nos artigos originais da bibliografia e em Sarno e Taylor (2002).

[1]Bacharel e Mestre em Economia pela UFF, Candidato ao PhD em Economia pela EPGE/FGV. É Especialista em Ciências de Dados e Inteligência Artificial Generativa pela PUC-Rio. Atualmente, exerce a função de Data Tech Lead na Análise Macro (http://analisemacro.com.br). Saiba mais em https://github.com/vitorwilher.

Índice

1 Introdução **4**
- 1.1 Sobre o que é o curso . . . 4
- 1.2 Cronograma . . . 4
- 1.3 Como ler estas notas . . . 5
  - 1.3.1 Uma palavra sobre os dados e o software . . . 6
- 1.4 Referências . . . 6

2 Modelos de Determinação da Taxa de Câmbio — Parte I **7**
- 2.1 Conceitos: câmbio nominal, real e efetivo . . . 7
  - 2.1.1 A taxa de câmbio nominal e a convenção do curso . . . 7
  - 2.1.2 O câmbio real bilateral . . . 8
  - 2.1.3 O câmbio real efetivo e a média geométrica . . . 9
  - 2.1.4 Broad vs. narrow: quais parceiros entram . . . 9
  - 2.1.5 Metodologias de ponderação . . . 10
  - 2.1.6 Deflatores . . . 10
- 2.2 A paridade do poder de compra . . . 11
  - 2.2.1 A lei do preço único . . . 11
  - 2.2.2 PPC absoluta . . . 12
  - 2.2.3 PPC relativa . . . 12
  - 2.2.4 A origem da hipótese: Cassel (1918) . . . 13
- 2.3 Desvios estruturais: Balassa-Samuelson . . . 14
  - 2.3.1 O argumento de Balassa . . . 14
  - 2.3.2 O modelo, passo a passo . . . 14
  - 2.3.3 A evidência de Balassa . . . 15
  - 2.3.4 Samuelson (1964) . . . 16
- 2.4 A evidência empírica sobre a PPC . . . 16
  - 2.4.1 Frenkel: da evidência favorável ao colapso . . . 16
  - 2.4.2 O problema econométrico da regressão em níveis . . . 17
  - 2.4.3 Testes de raiz unitária no câmbio real . . . 18
  - 2.4.4 Meia-vida . . . 19
  - 2.4.5 Potência: por que a extensão da amostra importa mais que a frequência . . . 19
  - 2.4.6 Cointegração . . . 19
  - 2.4.7 O *PPP puzzle* de Rogoff . . . 20
  - 2.4.8 Não linearidade: Taylor, Peel e Sarno (2001) . . . 21
- 2.5 Paridades financeiras . . . 21
  - 2.5.1 Paridade coberta de juros (CIP) . . . 22
  - 2.5.2 Fricções e desvios da CIP . . . 23
  - 2.5.3 Paridade descoberta de juros (UIP) . . . 23
  - 2.5.4 A relação entre CIP e UIP . . . 24
  - 2.5.5 UIP com prêmio de risco . . . 24
  - 2.5.6 A regressão de Fama . . . 24
  - 2.5.7 *Carry trade* . . . 25
  - 2.5.8 Economias emergentes e o caso brasileiro . . . 26
- 2.6 Laboratório computacional em R e Python . . . 26
  - 2.6.1 (0) Os dados . . . 27
  - 2.6.2 (a) Construindo o câmbio real bilateral . . . 27
  - 2.6.3 (b) Média geométrica vs. aritmética no câmbio efetivo . . . 29
  - 2.6.4 (c) A PPC relativa no Brasil, 1995–2024 . . . 31
  - 2.6.5 (d) A reta de Balassa . . . 33
  - 2.6.6 (e) Frenkel em níveis e a regressão espúria . . . 33
  - 2.6.7 (f) Teste ADF e meia-vida, à mão . . . 34
  - 2.6.8 (g) Potência: extensão vs. frequência . . . 36

2.6.9 (h) ESTAR: a meia-vida depende do tamanho do choque . . . 37
2.6.10 (i) Paridade coberta: juros implícitos no *forward* . . . 39
2.6.11 (j) A regressão de Fama e o *carry trade* . . . 40
2.7 Exercícios . . . 41
2.8 Gabarito dos Exercícios . . . 42
2.8.1 Exercício 1 . . . 42
2.8.2 Exercício 2 . . . 44
2.8.3 Exercício 3 . . . 45
2.8.4 Exercício 4 . . . 46
2.8.5 Exercício 5 . . . 47
2.8.6 Exercício 6 . . . 48
2.8.7 Exercício 7 . . . 48
2.8.8 Exercício 8 . . . 50

Referências **52**

1 Introdução

Estas notas acompanham a disciplina de **Dívida Soberana e Câmbio** do Mestrado e Doutorado Profissional em Economia e Finanças da FGV/EPGE, ministrada por Ana Flávia Soares dos Santos Oliveira a partir de outubro de 2026. Elas seguem a ordem das aulas e tomam os slides da disciplina como fonte primária: a notação, as convenções e o encadeamento são os do curso, ainda que o texto seja de minha autoria e acrescente derivações, a leitura dos artigos originais e implementações computacionais que os slides deixam implícitas.

! Estado destas notas

O curso tem **quinze aulas**. Esta versão cobre a **primeira**, que foi a ministrada até o momento da compilação: conceitos de câmbio nominal, real e efetivo, a paridade do poder de compra e sua evidência empírica (de Cassel a Taylor, Peel e Sarno), e as paridades financeiras — coberta e descoberta de juros, a regressão de Fama e o *carry trade*. Os capítulos seguintes serão acrescentados conforme o curso avança — a estrutura do documento já está montada para recebê-los.

1.1 Sobre o que é o curso

O curso tem duas metades que conversam o tempo todo. A primeira é sobre **câmbio**: o que determina a taxa de câmbio, por que ela se afasta dos fundamentos, que regime cambial um país deve adotar e quando um banco central deve intervir. A segunda é sobre **dívida soberana**: como um governo se endivida, em que moeda, sob que regras, quando a dívida se torna insustentável e o que acontece quando ele deixa de pagar.

A ligação entre as duas metades não é acidental. Para uma economia emergente, a taxa de câmbio é ao mesmo tempo um preço macroeconômico e uma variável de balanço: se parte da dívida é denominada em moeda estrangeira, uma depreciação aumenta a dívida medida em moeda doméstica — é o problema do *original sin* e do *currency mismatch* que aparece na Aula 6. Inversamente, a percepção de risco soberano entra no prêmio que investidores exigem para carregar ativos na moeda doméstica, e esse prêmio é um dos determinantes do câmbio — é o termo rp_t que introduzimos já na Seção 2. As crises que fecham o curso — da dívida latino-americana dos anos 1980 às crises cambiais de primeira, segunda e terceira geração — são, quase sempre, episódios em que as duas coisas deram errado ao mesmo tempo.

1.2 Cronograma

Tabela 1: Cronograma da disciplina.

Aula	Conteúdo
1	Apresentação do curso. Modelos cambiais — Parte 1: fundamentos e PPC, abordagem monetária do câmbio

Aula	Conteúdo
2	Modelos cambiais — Parte 2: *overshooting* de Dornbusch, abordagem de portfólio, Mundell-Fleming, o *puzzle* de Meese-Rogoff
3	Regimes cambiais, trilema da política macroeconômica
4	Intervenções cambiais, reservas internacionais, controles de capital
5	Conceitos e composição da dívida soberana (interna/externa, indexadores, dívida oculta)
6	Endividamento em moeda local vs. estrangeira; *original sin* e *currency mismatch*
7	Dinâmica da dívida e análise de sustentabilidade
8	Espaço fiscal, dominância fiscal × monetária, gestão de dívida
9	Ajuste fiscal e programas de austeridade; inflação não antecipada
10	Repressão financeira; *default* e reestruturação de dívida soberana
11	Endividamento externo e crises em emergentes — crise da dívida latino-americana, Plano Brady, *sudden stops*
12	Crises cambiais — modelos de 1ª e 2ª geração
13	Crises cambiais — modelos de 3ª geração, crises gêmeas e estudos de caso (México, Ásia, Rússia, Brasil, Argentina)
14–15	Estudos de caso específicos — apresentações dos alunos

A avaliação tem quatro componentes de mesmo peso (25% cada): participação e discussão em aula, listas de exercícios analíticos, a apresentação em grupo de um estudo de caso sobre um episódio de crise e a entrega individual, por escrito, desse estudo de caso.

1.3 Como ler estas notas

Cada capítulo abre com a **motivação** do problema, desenvolve a teoria com **derivações passo a passo** — inclusive as que os slides apenas enunciam — e discute os **artigos originais** que a

disciplina indica como leitura. Fecha com duas seções fixas:

- um **Laboratório computacional em R e Python**, que reproduz numericamente os resultados do capítulo com dados reais ou simulados. Cada exercício aparece primeiro em R e depois em Python, com o mesmo raciocínio e, sempre que a conta é determinística, o mesmo número. O código roda na própria compilação do PDF, de modo que os números impressos são os que o software de fato produziu;
- uma lista de **Exercícios**, no espírito das listas analíticas da disciplina, seguida de um **gabarito desenvolvido** que, sempre que possível, responde com dados reais e código em R ou Python.

Quando as listas oficiais forem divulgadas, elas serão reproduzidas ao final do capítulo correspondente, com gabarito desenvolvido.

Resultados centrais aparecem em caixa, assim. Convenções e hipóteses que não podem ser esquecidas vão em caixas de destaque. Quando um conceito de econometria de séries temporais é mobilizado — raiz unitária, regressão espúria, cointegração —, uma caixa *Ferramenta econométrica* o explica no nível necessário para ler a literatura, já que o curso de Econometria do programa se concentra em dados de corte transversal e painel.

1.3.1 Uma palavra sobre os dados e o software

Os laboratórios usam séries públicas do **FRED** (Federal Reserve Bank of St. Louis): taxas de câmbio bilaterais mensais desde 1971, índices de preços ao consumidor da OCDE, taxas de juros interbancárias de três meses e os índices de câmbio efetivo do BIS. As séries foram baixadas uma vez para a pasta `dados/`, e o código lê esses arquivos locais — de modo que o PDF compila sem conexão e os números não mudam a cada revisão das fontes. O código de *download* aparece no primeiro laboratório para quem quiser atualizar a base.

Em R, uso apenas a base e o `ggplot2`; em Python, apenas `numpy`, `pandas` e `matplotlib`. Testes de raiz unitária, erros-padrão robustos e o estimador do modelo não linear são implementados **a partir das fórmulas**, pela mesma razão das notas de Econometria: escrever a conta deixa explícito o que o comando pronto faz por baixo do capô.

1.4 Referências

O programa lista três textos de referência. Para a metade de câmbio, Sarno e Taylor (2002) é o manual que organiza a literatura empírica coberta nas primeiras aulas — o Capítulo 3 trata da PPC e o Capítulo 2 das paridades financeiras e da regressão de Fama —, e James et al. (2012) reúne *surveys* mais recentes sobre os mesmos temas. Para a metade de dívida, Abbas et al. (2019) é o guia de referência. Ao longo das aulas a disciplina usa sobretudo **artigos originais**, que vão citados no próprio texto.

2 Modelos de Determinação da Taxa de Câmbio — Parte I

A taxa de câmbio é o preço mais observado de uma economia aberta e, ao mesmo tempo, um dos mais difíceis de explicar. Ela é um **preço relativo de bens** — quanto custa a cesta doméstica em termos da cesta estrangeira — e um **preço de ativo** — quanto vale uma moeda em termos de outra, num mercado que negocia trilhões de dólares por dia e reage a cada notícia. A primeira leitura leva à **paridade do poder de compra**, que ancora o câmbio no mercado de bens; a segunda leva às **paridades financeiras**, que o ancoram no mercado de ativos. Este capítulo percorre as duas âncoras e, sobretudo, a evidência de que nenhuma delas segura o câmbio no curto prazo.

A ideia que atravessa o capítulo cabe numa frase:

> **!** A ideia central do capítulo
>
> As condições de paridade são **condições de arbitragem**. Elas valem tanto quanto a arbitragem funciona: quase perfeitamente para ativos financeiros sem risco cambial (CIP), lenta e parcialmente para cestas de bens (PPC), e mal para ativos com risco cambial (UIP). Os grandes enigmas da literatura — o *PPP puzzle* de Rogoff e o *forward premium puzzle* de Fama — são, no fundo, medidas de **quanto** a arbitragem falha em cada mercado.

O capítulo tem quatro partes. A primeira fixa os **conceitos** — câmbio nominal, real e efetivo — e mostra que um índice de câmbio real é uma escolha metodológica com três dimensões. A segunda apresenta a **paridade do poder de compra**, de Cassel a Balassa-Samuelson. A terceira percorre a **evidência empírica** sobre a PPC, do colapso dos anos 1970 às soluções não lineares, passando pelos problemas econométricos que fizeram a literatura mudar de método três vezes. A quarta trata das **paridades financeiras**: paridade coberta e descoberta de juros, a regressão de Fama e o *carry trade*.

O capítulo corresponde à Aula 1 da disciplina. As leituras são os nove artigos indicados — Cassel (1918), Balassa (1964), Samuelson (1964), Frenkel (1981), Ardeni e Lubian (1991), Edison et al. (1997), Rogoff (1996), Taylor et al. (2001) e Fama (1984) —, e o tratamento de manual mais próximo é o de Sarno e Taylor (2002), Capítulos 2 e 3.

2.1 Conceitos: câmbio nominal, real e efetivo

2.1.1 A taxa de câmbio nominal e a convenção do curso

A **taxa de câmbio nominal** S_t é o preço de uma moeda em termos de outra. Há duas formas de cotá-la, e a confusão entre elas é a fonte mais comum de erros de sinal em economia internacional. Neste curso, como em Sarno e Taylor (2002), adota-se o **incerto**:

$$S_t = \text{unidades de moeda doméstica por unidade de moeda estrangeira.}$$

Para o Brasil, S_t é a cotação em reais de um dólar (USDBRL). Com essa convenção, **um aumento de S_t é uma depreciação da moeda doméstica**: é preciso mais reais para comprar o mesmo dólar. Letras minúsculas denotam logaritmos, $s_t = \ln S_t$, de modo que Δs_t é, aproximadamente, a taxa de depreciação.

Os slides abrem com a trajetória anual do USDBRL desde o Plano Real: R$ 0,87 em 1994, R$ 1,82 em 1999 (o fim da âncora cambial), R$ 2,92 em 2002 (a crise de confiança da eleição), R$ 1,67 em 2011 (o auge do ciclo de *commodities*), R$ 3,33 em 2015 (a recessão e a crise fiscal), R$ 5,15 em 2020 (a pandemia) e de novo R$ 5,15 nos nove primeiros meses de 2026. Mesmo em médias anuais, que suavizam muito, o câmbio nominal **multiplicou-se por seis** em três décadas, com idas e vindas de 40% a 70% em poucos anos. Quanto disso é inflação relativa e quanto é mudança de preço relativo real é exatamente a pergunta que o câmbio real responde.

2.1.2 O câmbio real bilateral

O **câmbio real** mede o preço relativo entre bens domésticos e estrangeiros, expressos na mesma moeda. Na forma bilateral, contra o parceiro i:

$$Q_{i,t} = \frac{S_{i,t}\, P^*_{i,t}}{P_t}, \tag{1}$$

em que $S_{i,t}$ é o câmbio nominal contra o parceiro i, $P^*_{i,t}$ o nível de preços externo e P_t o doméstico. O numerador é o custo da cesta estrangeira **convertido em moeda doméstica**; o denominador, o custo da cesta doméstica. Em logaritmos, omitindo os subscritos:

$$\boxed{q_t = s_t + p^*_t - p_t.} \tag{2}$$

Com a convenção do curso, **um aumento de q é uma depreciação real**: a cesta estrangeira ficou mais cara em relação à doméstica, o que torna os bens domésticos mais competitivos. Note que o câmbio real pode depreciar com o nominal parado (se a inflação externa superar a doméstica) e apreciar com o nominal depreciando (se a inflação doméstica superar a depreciação). A diferenciação da Equação 2 mostra isso de forma direta:

$$\Delta q_t = \Delta s_t - (\pi_t - \pi^*_t), \tag{3}$$

onde $\pi_t = \Delta p_t$ e $\pi^*_t = \Delta p^*_t$. O câmbio real só fica parado se a depreciação nominal compensar exatamente o diferencial de inflação — que é, como veremos, o enunciado da PPC relativa.

> ⚠ Convenções: o índice do BIS anda ao contrário
>
> Os índices de câmbio efetivo do BIS, do FMI e do FRED são construídos com o câmbio cotado como **moeda estrangeira por unidade de moeda doméstica**. Neles, **uma elevação do índice é uma apreciação real**. Os slides do curso apresentam o índice do BIS na forma original — "uma elevação do índice significa apreciação real" — e advertem que, nas derivações do curso, **aumento do REER significa depreciação real**. Ao usar dados de qualquer fonte, a primeira coisa a verificar é a direção do índice; a segunda é lembrar que o nível 100 é apenas a média do ano-base (2020, no BIS) e **não representa câmbio de equilíbrio**.

2.1.3 O câmbio real efetivo e a média geométrica

O câmbio bilateral responde a perguntas bilaterais. Para avaliar a **competitividade externa agregada**, usa-se o **câmbio real efetivo** (*real effective exchange rate*, REER): uma média ponderada dos câmbios reais bilaterais contra os N parceiros. A média é, quase sempre, **geométrica**:

$$REER_t = \prod_{i=1}^{N} Q_{i,t}^{\,w_{i,t}}, \qquad \sum_{i=1}^{N} w_{i,t} = 1. \tag{4}$$

Por que geométrica, e não aritmética? Os slides dão duas razões, e vale derivá-las.

Primeira: simetria entre apreciações e depreciações. Em logaritmos, a Equação 4 vira uma média aritmética simples dos logs:

$$\ln REER_t = \sum_{i=1}^{N} w_{i,t}\, q_{i,t}.$$

Se trocarmos a convenção de cotação de todos os pares — $Q \mapsto 1/Q$ —, cada q_i troca de sinal e, portanto, $\ln REER$ troca de sinal **exatamente**. O índice na convenção inversa é simplesmente $1/REER$. Com a média aritmética isso não ocorre. Um exemplo com dois parceiros de mesmo peso deixa o problema evidente: se o câmbio real contra o parceiro A **dobra** (Q_A: $1 \to 2$) e contra o parceiro B **cai à metade** (Q_B: $1 \to 0{,}5$), as duas variações são simétricas em log, e o índice geométrico fica parado em $\sqrt{2 \times 0{,}5} = 1$. O aritmético vai a $(2 + 0{,}5)/2 = 1{,}25$ — uma "depreciação efetiva" de 25% que não existe. Na convenção inversa, o aritmético registraria $(0{,}5 + 2)/2 = 1{,}25$ de novo: as duas convenções diriam que a moeda **depreciou**, o que é incoerente. O laboratório reproduz esse exemplo.

Segunda: encadeamento de pesos. O comércio muda de composição — a China pesava pouco para o Brasil nos anos 1990 e é hoje o maior parceiro. Com pesos variáveis, o índice é construído por **encadeamento** das variações:

$$\Delta \ln REER_t = \sum_{i=1}^{N} w_{i,t}\, \Delta q_{i,t}, \tag{5}$$

e o nível é obtido acumulando as variações. Isso só é possível porque, em log, o índice é linear nos q_i: a variação do índice num período usa os pesos daquele período, sem reescrever a história. É assim que o BIS constrói seus índices, com pesos atualizados a cada três anos (Klau e Fung 2006).

2.1.4 Broad vs. narrow: quais parceiros entram

A primeira das três escolhas que definem um índice é **quem entra na cesta**:

- **Narrow** (restrito): um grupo menor de grandes parceiros e moedas principais. Tem séries históricas mais longas e dados mais homogêneos, mas pode ignorar emergentes e mudanças recentes no padrão de comércio.
- **Broad** (amplo): um conjunto amplo de parceiros, inclusive emergentes. Representa melhor a estrutura contemporânea do comércio, mas tem série mais curta e exige mais dados.

No BIS, a cesta *narrow* real cobre 27 economias e a *broad* cobre 64; os índices *broad* mensais começam, em geral, em 1994. Para um país como o Brasil, cujo comércio se deslocou fortemente para a Ásia, a diferença entre as duas cestas está longe de ser um detalhe.

2.1.5 Metodologias de ponderação

A segunda escolha é **como ponderar**. As três opções básicas são:

$$w_i^M = \frac{M_i}{\sum_j M_j}, \qquad w_i^X = \frac{X_i}{\sum_j X_j}, \qquad w_i^{X+M} = \frac{M_i + X_i}{\sum_j (M_j + X_j)}, \tag{6}$$

em que M_i e X_i são as importações vindas de e as exportações destinadas ao parceiro i. Cada uma responde a uma pergunta diferente. A ponderação por **importações** é a relevante para a inflação importada, o custo relativo das importações e o poder de compra externo da moeda. A ponderação por **exportações** está mais diretamente ligada à competitividade dos produtos domésticos nos mercados de destino. A **dupla ponderação**, pela corrente de comércio, é o compromisso usual.

O BIS vai um passo além, com a **dupla ponderação com competição em terceiros mercados**. A ideia econômica é que o peso de um país não depende apenas do comércio bilateral. Em forma estilizada, o peso do parceiro i combina a sua importância como fornecedor do mercado doméstico com a sua importância como **concorrente** nos mercados para onde o país exporta:

$$w_i = \frac{M}{M+X}\, w_i^M + \frac{X}{M+X} \sum_k \frac{X_k}{X}\, \sigma_{i,k}, \tag{7}$$

em que X_k/X é a fração das exportações domésticas destinada ao mercado k e $\sigma_{i,k}$ é a participação do país i entre os fornecedores do mercado k (incluindo a produção do próprio k quando $i = k$). É por esse segundo termo que a China pode receber peso elevado no REER do Brasil não apenas pelo comércio Brasil–China, mas também porque empresas brasileiras e chinesas **concorrem** nos Estados Unidos, na Europa e em outros mercados.

2.1.6 Deflatores

A terceira escolha é o **índice de preços ou custos** usado para deflacionar. Os slides percorrem seis opções, resumidas na Tabela 2.

Tabela 2: Deflatores do câmbio real.

Deflator	Vantagens	Limitações
CPI/IPCA (consumidor)	Disponibilidade ampla; mensal; metodologia comparável; inclui comercializáveis e não comercializáveis	Muitos serviços não comercializados; impostos, preços administrados e subsídios; mede custo de vida melhor que competitividade

Deflator	Vantagens	Limitações
PPI (produtor)	Mais próximo da produção; maior peso de comercializáveis; útil para competitividade industrial	Cobertura e metodologia variam entre países; inclui insumos importados; composição setorial distinta
WPI (atacado)	Alta proporção de comercializáveis — muito usado na literatura histórica de PPC	Comparabilidade internacional fraca; pouca relação com o custo total de produção
Deflator do PIB	Cobertura abrangente; consistente com as contas nacionais	Trimestral; sujeito a revisões; muitos não comercializáveis; cesta não fixa
Preços de exportação	Comparação direta dos bens exportados	Dominados pela composição da pauta (no Brasil, *commodities*)
Custo unitário do trabalho	Relevante para competitividade de custos; incorpora salários e produtividade	Pouco comparável; restrito à indústria; revisões; ignora capital, energia, impostos e margens

O custo unitário do trabalho merece uma linha a mais. Ele é a razão entre a remuneração do trabalho e o produto real, $ULC = (\text{remuneração do trabalho})/(\text{produto real})$, e portanto sobe quando os salários crescem mais que a produtividade. Um REER-ULC em apreciação significa que os custos unitários domésticos estão crescendo relativamente aos externos — é a medida mais próxima de "perda de competitividade de custos", e é a que aparece, por exemplo, nos debates sobre a periferia do euro.

i Não existe um único câmbio real "correto"

Cada índice combina três escolhas:

$$\text{parceiros incluídos} \;+\; \text{sistema de ponderação} \;+\; \text{deflator de preços ou custos.}$$

Por isso uma moeda pode parecer relativamente apreciada segundo o CPI e menos apreciada segundo o PPI ou o custo unitário do trabalho. Antes de concluir que uma moeda está "sobrevalorizada", é preciso saber **qual** câmbio real se está olhando — e a Seção 2.3 mostra que mesmo com o índice certo a pergunta "em relação a quê?" não tem resposta trivial.

2.2 A paridade do poder de compra

2.2.1 A lei do preço único

A **lei do preço único** afirma que um bem homogêneo deve ter o mesmo preço em diferentes países quando os preços são expressos na mesma moeda:

$$P_{i,t} = S_t\, P^*_{i,t} \quad \Longrightarrow \quad S_t = \frac{P_{i,t}}{P^*_{i,t}}, \tag{8}$$

em que $P_{i,t}$ é o preço doméstico do bem i e $P^*_{i,t}$ seu preço no exterior. O mecanismo é a **arbitragem**: se o bem estiver mais barato em um país, compra-se no mercado barato e vende-se no caro até que a diferença desapareça.

A condição pressupõe bens idênticos, mercados competitivos e **ausência** de custos de transporte, tarifas, impostos, barreiras comerciais e segmentação de mercados. Com custos de transação proporcionais c, a arbitragem só garante uma **banda**,

$$\frac{1}{1+c} \;\leq\; \frac{S_t P^*_{i,t}}{P_{i,t}} \;\leq\; 1+c,$$

dentro da qual o preço relativo pode flutuar livremente — uma observação que parece inocente e que reaparece, vinte páginas adiante, como a solução de Taylor, Peel e Sarno para o *PPP puzzle*. Note também que a lei do preço único se aplica a **bens individuais**, não diretamente ao nível geral de preços.

2.2.2 PPC absoluta

A **PPC absoluta** estende a lei do preço único de um bem para uma **cesta** representativa de bens e serviços:

$$P_t = S_t\, P^*_t \quad \Longrightarrow \quad S_t = \frac{P_t}{P^*_t}. \tag{9}$$

A taxa de câmbio seria determinada pela razão entre os níveis gerais de preços. Em termos do câmbio real da Equação 1, a PPC absoluta implica $Q_t = 1$ (ou uma constante, dependendo da normalização dos índices de preços): uma cesta representativa custaria o mesmo nos dois países quando os preços fossem convertidos pela taxa de câmbio.

A PPC absoluta é uma afirmação sobre o **nível** do câmbio, e sua verificação direta é difícil por razões que nada têm a ver com arbitragem: as cestas de consumo, os pesos e a qualidade dos bens diferem entre países, e os índices de preços usuais são **números-índice** — medem variações, não níveis comparáveis. Além disso, serviços e outros não comercializáveis não estão sujeitos à arbitragem internacional.

2.2.3 PPC relativa

A **PPC relativa** é uma proposição sobre **variações**. Ela afirma que a moeda do país com inflação mais elevada deve depreciar-se proporcionalmente ao diferencial de inflação:

$$\frac{S_t}{S_{t-1}} = \frac{P_t / P_{t-1}}{P^*_t / P^*_{t-1}}. \tag{10}$$

Ela segue da PPC absoluta (basta dividir a Equação 9 em t pela mesma equação em $t-1$), mas **não** a implica: a Equação 10 vale sempre que Q_t for **constante**, qualquer que seja o valor da constante. É uma hipótese mais fraca e, por isso, mais defensável — sobrevive a diferenças de cestas, de qualidade e de normalização dos índices, desde que essas diferenças sejam estáveis no tempo.

Tomando logaritmos na Equação 10, e usando $\ln(1+x) \approx x$ para taxas pequenas:

$$\boxed{\Delta s_t = \pi_t - \pi_t^*,} \tag{11}$$

em que Δs_t é a taxa de depreciação da moeda doméstica. Comparando com a Equação 3, a PPC relativa é exatamente $\Delta q_t = 0$: o câmbio real permanece constante.

O exemplo dos slides: se a inflação brasileira for de 6% e a americana de 2%, a PPC relativa prevê uma depreciação de aproximadamente $6\% - 2\% = 4\%$ do real diante do dólar. A conta exata, pela Equação 10, é $1{,}06/1{,}02 - 1 = 3{,}92\%$; a diferença é o erro da aproximação logarítmica, desprezível para inflações baixas e relevante para inflações altas — o que importa, por exemplo, na Turquia de hoje ou no Brasil pré-Real.

2.2.4 A origem da hipótese: Cassel (1918)

Cassel (1918) é uma das formulações inaugurais da PPC e, sobretudo, uma explicação de por que o câmbio pode afastar-se dela. Cassel parte da ideia de que a taxa de câmbio de equilíbrio entre duas moedas é determinada pela relação entre seus poderes de compra internos, $S^{\text{PPC}} = P/P^*$: se os preços aumentam mais no país doméstico do que no exterior, sua moeda deve depreciar-se proporcionalmente. É essa relação que ele batiza de *purchasing power parity*.

O ponto fino do artigo é que a PPC **não** é uma identidade que precise valer continuamente. Ela depende da existência de comércio relativamente livre: quando mercadorias circulam, desvios cambiais criam incentivos à arbitragem e tendem a ser corrigidos. Restrições comerciais **simétricas** não seriam necessariamente suficientes para produzir grandes desvios. O problema surge quando as restrições são **assimétricas**. Se as importações de um país são mais severamente restringidas do que suas exportações:

1. o país continua vendendo bens ao exterior e acumula créditos e ativos estrangeiros;
2. os estrangeiros precisam adquirir sua moeda para pagar pelas exportações;
3. mas os residentes têm pouca possibilidade de usar as moedas estrangeiras recebidas para importar;
4. a moeda nacional pode, por isso, tornar-se artificialmente **valorizada** em relação à PPC.

A contribuição duradoura é a distinção entre a PPC como **referência de equilíbrio monetário de longo prazo** e a taxa de câmbio **observada**, afetada por restrições comerciais, fluxos financeiros e circunstâncias institucionais. Escrito em 1918, no meio da desorganização cambial da Primeira Guerra, o artigo antecipa a ideia — central para tudo o que vem depois — de que o câmbio pode afastar-se dos fundamentos de preços **quando a arbitragem de bens é impedida**.

2.3 Desvios estruturais: Balassa-Samuelson

Cassel explica desvios **temporários**, causados por obstáculos à arbitragem. Balassa (1964) e Samuelson (1964) mostram que os desvios podem ser **estruturais**: mesmo com arbitragem perfeita nos bens comercializáveis, a PPC absoluta falharia de forma sistemática.

2.3.1 O argumento de Balassa

Balassa (1964) questiona o uso da PPC absoluta como medida do valor de equilíbrio de uma moeda. O argumento divide a economia em dois setores: **bens comercializáveis** (*tradables*), sujeitos à concorrência internacional, e **bens não comercializáveis** (*non-tradables*), como boa parte dos serviços, cujos preços são determinados pelas condições domésticas. A lei do preço único atua sobre os primeiros, não sobre os segundos.

O mecanismo é uma cadeia de quatro elos:

1. países mais desenvolvidos têm **produtividade maior no setor de comercializáveis** (e a diferença de produtividade entre países é muito menor nos serviços);
2. a produtividade alta paga **salários altos** no setor comercializável;
3. a **mobilidade interna do trabalho** transmite esses salários ao setor não comercializável;
4. como a produtividade nos serviços não acompanhou, o salário mais alto vira **preço mais alto** dos serviços — e o nível geral de preços fica mais alto.

2.3.2 O modelo, passo a passo

Os slides apresentam a versão mais simples. Seja a tecnologia linear no trabalho nos dois setores, $Y_T = A_T L_T$ e $Y_N = A_N L_N$, com concorrência perfeita e trabalho móvel entre setores, de modo que o salário W é único. Pagar ao trabalho o valor do seu produto marginal em cada setor dá:

$$W = P_T A_T = P_N A_N \quad \Longrightarrow \quad P_N = \frac{W}{A_N} = P_T \, \frac{A_T}{A_N}. \tag{12}$$

O preço relativo dos não comercializáveis é, portanto, o **inverso da produtividade relativa**:

$$\frac{P_N}{P_T} = \frac{A_T}{A_N}.$$

Quanto maior a produtividade relativa dos comercializáveis, maior o preço relativo dos não comercializáveis. Até aqui os slides. Para chegar ao câmbio real, falta um passo, que vale a pena fazer explicitamente. Suponha que o índice de preços seja uma média geométrica dos dois setores, com peso γ dos não comercializáveis, igual nos dois países:

$$p = (1-\gamma)\, p_T + \gamma\, p_N, \qquad p^* = (1-\gamma)\, p_T^* + \gamma\, p_N^*.$$

Substituindo na Equação 2 e somando e subtraindo p_T e p_T^*:

$$q = s + p^* - p = \underbrace{(s + p_T^* - p_T)}_{\text{câmbio real dos comercializáveis}} + \gamma\left[(p_N^* - p_T^*) - (p_N - p_T)\right].$$

Se a lei do preço único vale para os comercializáveis, o primeiro termo é zero (ou uma constante). Usando $p_N - p_T = a_T - a_N$ da Equação 12:

$$\boxed{q = -\gamma\left[(a_T - a_N) - (a_T^* - a_N^*)\right].} \tag{13}$$

Esse é o resultado de Balassa-Samuelson. Um país cujo diferencial de produtividade comercializáveis/não comercializáveis é maior que o do resto do mundo tem câmbio real **mais apreciado** (menor q, na convenção do curso) — e um crescimento mais rápido da produtividade dos comercializáveis gera **apreciação real tendencial**. Note que nada disso envolve falha de arbitragem: a lei do preço único vale perfeitamente onde pode valer. A PPC absoluta falha porque os índices de preços incluem bens aos quais a arbitragem não chega.

A consequência prática é que **moedas de países ricos tendem a parecer sobrevalorizadas** quando comparadas com uma taxa de câmbio de PPC. Essa aparente sobrevalorização não é necessariamente um desequilíbrio: pode refletir uma diferença estrutural de produtividade. A mesma lógica explica a regularidade conhecida como *efeito Penn*: países mais ricos têm níveis de preços mais altos, e a diferença está concentrada nos serviços — o corte de cabelo é muito mais caro em Zurique do que em Mumbai, embora o cabeleireiro suíço não seja mais produtivo.

2.3.3 A evidência de Balassa

Balassa (1964) apresenta evidência para doze países industrializados. A razão entre a taxa de câmbio de PPC e a taxa observada cresce com a renda *per capita*, com correlação de aproximadamente 0,92; e os serviços eram relativamente mais baratos nos países europeus de menor renda do que nos Estados Unidos. A Tabela 3 reproduz a tabela que os slides destacam, com a variação da produtividade industrial e dos preços entre 1953 e 1961.

Tabela 3: Produtividade e preços em países industrializados, 1953–1961 (índices, 1953 = 100). Fonte: Balassa (1964).

País	Produto por homem-hora na manufatura (1)	Deflator do PNB (2)	Preços no atacado de manufaturados (3)	(2) como % de (3) (4)
Estados Unidos	124	117	111	105
Bélgica	143	114	105	109
França	165	103	91	113
Alemanha	152	128	109	117
Itália	167	115	98	117
Reino Unido	122	127	116	109
Japão	197	115	91	126

A coluna (4) é uma medida do preço relativo dos bens em geral — que incluem os serviços — em relação aos manufaturados, isto é, uma *proxy* de P/P_T. A previsão do modelo é que ela cresça mais onde a produtividade industrial (coluna 1) cresceu mais. É o que a figura do artigo mostra: o Japão, com o maior ganho de produtividade, teve o maior aumento do preço relativo; Estados Unidos e Reino Unido, com os menores ganhos, os menores aumentos. O laboratório estima essa reta.

2.3.4 Samuelson (1964)

Samuelson (1964) tem escopo mais amplo: examina especialização, salários, produtividade, balanço de pagamentos e critérios para identificar moedas sobrevalorizadas. Numa estrutura ricardiana com dois países e vários bens, as produtividades relativas determinam as vantagens comparativas e o padrão de especialização, mas **não determinam isoladamente** a taxa de câmbio de equilíbrio, que depende também da demanda por bens domésticos e estrangeiros, da composição do comércio, de custos de transporte e barreiras, de movimentos de capital, de salários e condições monetárias e da necessidade de equilíbrio externo.

A mensagem é que a PPC **não deve ser interpretada mecanicamente** como medida de equilíbrio cambial. O modelo hoje chamado "Balassa-Samuelson" é uma síntese posterior das contribuições complementares dos dois artigos de 1964.

2.4 A evidência empírica sobre a PPC

A literatura empírica sobre a PPC evoluiu de regressões simples entre câmbio e preços para testes de raiz unitária, cointegração, painéis, modelos não lineares e testes com quebras estruturais. A conclusão depende crucialmente de **qual versão** da PPC está sendo testada, do **horizonte** da amostra e da **potência** do procedimento econométrico. Esta seção segue essa evolução, porque cada mudança de método foi uma resposta a um problema do anterior.

2.4.1 Frenkel: da evidência favorável ao colapso

A primeira geração de testes estimava diretamente a relação em níveis,

$$s_t = \alpha + \beta\,(p_t - p_t^*) + u_t, \qquad H_0 : \beta = 1, \tag{14}$$

e a versão em diferenças correspondente para a PPC relativa. Frenkel (1978) revisita as origens da doutrina e examina o período de câmbio flexível dos anos 1920. Os resultados são favoráveis: em diversas especificações, a elasticidade do câmbio ao nível relativo de preços fica próxima da unidade — marco/libra 1,03 com preços no atacado e 1,08 com custo de vida, franco/libra 1,14 e 1,08, dólar/libra 0,90 e 0,85, franco/dólar 1,09 e 0,99 —, inclusive durante a hiperinflação alemã. A interpretação de Frenkel é que, quando os movimentos de preços são dominados por **choques monetários de grande magnitude**, os fatores que afastam o câmbio da PPC — custos de transporte, diferenças entre índices, mudanças de preços relativos — tornam-se de segunda ordem.

Frenkel (1981) aplica as mesmas regressões ao período de junho de 1973 a julho de 1979, para dólar/libra, dólar/franco francês e dólar/marco. O resultado é o que dá título ao artigo:

Tabela 4: PPC absoluta nos anos 1970, dados mensais de junho/1973 a julho/1979; variáveis instrumentais com correção de Cochrane-Orcutt (erros-padrão entre parênteses). Fonte: Frenkel (1981), Tabela 2.

Câmbio	$\hat{\beta}$ (atacado)	$\hat{\beta}$ (custo de vida)	$\hat{\rho}$
Dólar/Libra	0,165 (0,507)	1,070 (0,897)	0,963 / 0,998
Dólar/Franco	0,184 (0,374)	\$-\$1,070 (0,817)	0,863 / 0,901
Dólar/Marco	1,786 (0,230)	2,217 (0,263)	0,739 / 0,759

Os coeficientes vão de $-1{,}07$ a 2,22. Na versão em diferenças (PPC relativa, Tabela 3 do artigo), o quadro é ainda pior: os erros-padrão são da ordem de 1 a 3, de modo que os dados não conseguem distinguir $\beta = 1$ de $\beta = 0$. Uma coluna da Tabela 4 merece mais atenção do que costuma receber: o coeficiente de autocorrelação dos resíduos, $\hat{\rho}$, que chega a 0,96 e 0,998 para a libra. Um resíduo com autocorrelação próxima de um é a assinatura de um **desvio da PPC que não se corrige** — o tema da próxima seção.

Frenkel oferece três explicações para o colapso:

1. **Choques reais e preços relativos.** Os anos 1970 tiveram choques do petróleo, mudanças nos termos de troca e alterações na estrutura produtiva. Se o nível de preços combina comercializáveis e não comercializáveis, $P = P_N^{\beta} P_T^{1-\beta}$, mas a arbitragem opera sobre P_T, mudanças em P_N/P_T afastam a razão dos índices agregados do câmbio — é o mecanismo de Balassa-Samuelson, agora movido por choques. Omiti-las produz erro de especificação.
2. **Diferenças entre países.** A PPC funciona melhor para libra/marco e franco/marco do que para taxas contra o dólar, o que Frenkel associa à integração comercial europeia, à estabilidade das barreiras dentro da Europa e aos arranjos monetários regionais.
3. **O câmbio como preço de ativo** — a mais importante. A taxa de câmbio é o preço relativo de duas moedas e responde imediatamente a novas informações, mudanças de expectativas, políticas futuras esperadas e preferências de portfólio. Os índices de preços representam bens sujeitos a contratos e custos de reajuste, e respondem devagar. Em períodos turbulentos, é natural que o câmbio seja muito mais volátil do que os preços e que os desvios da PPC sejam frequentes.

2.4.2 O problema econométrico da regressão em níveis

A aparente rejeição dos anos 1970 representa ausência de equilíbrio de longo prazo? A pergunta não pode ser respondida com a Equação 14, por um problema que só foi plenamente compreendido depois que Frenkel escreveu: s_t, p_t e p_t^* têm **fortes tendências estocásticas**.

> **Ferramenta econométrica — raiz unitária e regressão espúria**
>
> Uma série é **integrada de ordem 1**, $I(1)$, quando não é estacionária mas sua primeira diferença é. O protótipo é o passeio aleatório $y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t$: choques têm efeito **permanente**, a variância cresce com t e a série não tem média para a qual retornar. Uma série $I(0)$ é estacionária: choques se dissipam.

Granger e Newbold (1974) mostraram por simulação que, ao regredir um passeio aleatório sobre **outro passeio aleatório independente**, o teste t convencional rejeita $H_0\colon \beta = 0$ na maior parte das vezes, com R^2 elevado e estatística de Durbin-Watson próxima de zero. É a **regressão espúria**: a teoria assintótica usual pressupõe regressores estacionários, e com séries $I(1)$ os estimadores e as estatísticas t e F não têm as distribuições de sempre. A regra prática de Granger e Newbold — desconfie de qualquer regressão com $R^2 > DW$ — continua útil. O laboratório reproduz a simulação.
A exceção é quando as séries são **cointegradas**: existe uma combinação linear delas que é $I(0)$. Nesse caso a regressão em níveis estima uma relação de equilíbrio genuína (e o estimador converge até mais rápido do que o usual). A PPC, lida com cuidado, é exatamente uma afirmação de cointegração.

Na Equação 14, u_t é o desvio da PPC. Se ele for $I(1)$, a regressão é espúria e as estatísticas t das regressões iniciais não valem; se for $I(0)$, há equilíbrio de longo prazo. A pergunta empírica relevante, portanto, deixou de ser "$\beta = 1$?" e passou a ser "**o desvio da PPC é estacionário?**".

2.4.3 Testes de raiz unitária no câmbio real

A partir dos anos 1980, a literatura passou a testar diretamente se o câmbio real é estacionário. Considere o processo autorregressivo

$$q_t = \mu + \rho\, q_{t-1} + \varepsilon_t. \tag{15}$$

Se $\rho = 1$, o câmbio real tem raiz unitária e os choques têm efeitos **permanentes**: não há PPC em nenhum horizonte. Se $|\rho| < 1$, os desvios são **transitórios** e q_t retorna à sua média de longo prazo, $\mu/(1-\rho)$. A rejeição da raiz unitária é, portanto, evidência de uma forma **fraca** de PPC: os desvios não são permanentes — mas o nível de equilíbrio não precisa ser $Q = 1$, e a convergência pode ser lenta.

O teste de Dickey e Fuller (1979) subtrai q_{t-1} dos dois lados da Equação 15 e testa se o coeficiente do nível defasado é zero. Na versão aumentada (ADF), incluem-se defasagens de Δq para absorver a autocorrelação de curto prazo:

$$\Delta q_t = \mu + \delta\, q_{t-1} + \sum_{j=1}^{k} \phi_j\, \Delta q_{t-j} + \varepsilon_t, \qquad \delta = \rho - 1, \qquad H_0\colon \delta = 0 \;\text{ vs. }\; H_1\colon \delta < 0. \tag{16}$$

A estatística é a razão t de $\hat{\delta}$, mas sob H_0 ela **não** tem distribuição normal nem t de Student — tem a distribuição de Dickey-Fuller, deslocada para a esquerda. Com constante, o valor crítico assintótico a 5% é $-2{,}86$ (MacKinnon 1996), e não $-1{,}645$. Usar o valor crítico normal rejeitaria a raiz unitária com frequência muito maior do que a nominal.

2.4.4 Meia-vida

A medida de persistência mais usada na literatura é a **meia-vida**: o tempo para que metade de um choque se dissipe. No AR(1), um desvio x_0 em relação à média vira, em média, $\rho^h x_0$ depois de h períodos. Igualando a metade do choque inicial:

$$\rho^h = \tfrac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{h = \frac{\ln 0{,}5}{\ln \rho}.} \tag{17}$$

Frankel e Rose (1996) usam um painel de 150 países e encontram, com dados anuais, $q_t = 0{,}85\, q_{t-1} + \varepsilon_t$: o câmbio real é estacionário, mas **muito persistente**. A meia-vida é $h = \ln 0{,}5 / \ln 0{,}85 = -0{,}693/-0{,}163 \approx 4{,}3$ anos. Com dados mensais, a mesma persistência corresponde a $\rho_m = 0{,}85^{1/12} \approx 0{,}9865$ — um número que, numa amostra curta, é difícil distinguir de um.

2.4.5 Potência: por que a extensão da amostra importa mais que a frequência

É aqui que entra o argumento de Ardeni e Lubian (1991) e Edison et al. (1997). Os testes de raiz unitária têm **baixa potência** em amostras relativamente curtas quando a reversão à média é lenta. Em uma amostra de 20 ou 30 anos, com meia-vida de 3 a 5 anos, existem pouquíssimos episódios **independentes** de convergência: o ADF pode não rejeitar a raiz unitária mesmo quando a PPC de longo prazo é verdadeira. Edison et al. (1997) mostram, por Monte Carlo, que boa parte do fracasso empírico da PPC no pós-Bretton Woods decorre dessa baixa potência, e não necessariamente da ausência de reversão à média.

Por que amostrar com mais frequência não resolve? O argumento, devido a Shiller e Perron (1985), cabe em uma linha. Se uma amostra cobre N anos com m observações por ano, o coeficiente autorregressivo na frequência m é $\rho_m = \rho_a^{1/m}$, onde ρ_a é o anual. A potência do teste depende essencialmente do produto $T(1-\rho)$ — quão longe de um está o coeficiente, medido na escala do tamanho da amostra. Com $T = mN$ e $1 - \rho_m \approx -\ln \rho_a / m$:

$$T\,(1-\rho_m) \;\approx\; mN \cdot \frac{-\ln \rho_a}{m} \;=\; N\,(-\ln \rho_a), \tag{18}$$

que **não depende de** m. Multiplicar a frequência por doze multiplica as observações por doze, mas aproxima ρ de um na mesma proporção, e as duas coisas se cancelam. O que aumenta a potência é aumentar N — a **extensão temporal** da amostra. Daí as duas saídas que a literatura adotou nos anos 1990: séries **longas**, de um século ou mais, e **painéis** de muitos países, como em Frankel e Rose (1996). O laboratório verifica a Equação 18 por simulação.

2.4.6 Cointegração

Para superar parte dessas limitações, a literatura passou a usar sistemas VAR e o método de máxima verossimilhança de Johansen (1988). A ideia é testar a PPC como **cointegração** entre s_t, p_t e p_t^* sem impor de saída os coeficientes $(1, -1, 1)$. A estratégia correta envolve três testes em sequência:

1. **existência** de cointegração — há alguma combinação linear estacionária?;

2. **restrições da PPC** — o vetor de cointegração é proporcional a $(1, -1, 1)$, isto é, simetria e proporcionalidade?;
3. **mecanismo de ajustamento** — quem corrige o desequilíbrio? Se o câmbio não responde ao termo de correção de erros, ele é **fracamente exógeno** para os parâmetros de longo prazo, e a correção ocorre por meio dos preços.

Mahdavi e Zhou (1994) aplicam o método a 13 países de inflação elevada e encontram evidência favorável às PPCs relativa e absoluta. Os modelos de correção de erros indicam com frequência que o ajuste ocorre pelos **preços relativos, e não pelo câmbio**: o câmbio absorve inicialmente o choque e os preços ajustam-se depois. É o argumento de Frenkel sobre o câmbio como preço de ativo, agora nos parâmetros de ajustamento.

2.4.7 O *PPP puzzle* de Rogoff

Rogoff (1996) organiza a literatura e identifica uma contradição central. Há evidência de que os câmbios reais retornam à PPC no longo prazo, com meias-vidas de **três a cinco anos** — o "consenso" da literatura de painel e de séries longas. Mas essa convergência é surpreendentemente lenta diante da **enorme volatilidade de curto prazo**.

Por que a PPC fracassa no curto prazo? Sob câmbio flexível, o câmbio nominal comporta-se como um preço de ativo: reage a notícias, incorpora expectativas sobre políticas futuras e responde a mudanças nas preferências de portfólio. Os preços de bens ajustam-se lentamente por contratos, custos de reajuste e rigidez nominal. Portanto

$$\mathrm{Var}(\Delta s_t) \;\gg\; \mathrm{Var}(\pi_t - \pi_t^*),$$

e pela Equação 3 as variações cambiais de curto prazo transformam-se quase integralmente em variações **reais**. O câmbio real herda a volatilidade do nominal.

O enigma está na combinação. Se a volatilidade de curto prazo vem de choques monetários e financeiros com preços rígidos, a convergência deveria ocorrer no horizonte da rigidez nominal — um a dois anos. Meias-vidas de três a cinco anos são lentas demais para isso. Se, ao contrário, os choques são reais (produtividade, gostos, termos de troca), a persistência se explica, mas a volatilidade de curto prazo não: choques reais não são tão voláteis. Nas palavras do próprio artigo, o difícil é conciliar a volatilidade de curto prazo com a lentidão da convergência.

A conclusão de Rogoff é que a PPC não funciona como relação de curto prazo, mas continua relevante como **condição de equilíbrio de longo prazo**. A explicação mais plausível combina choques monetários e financeiros, rigidez de preços, custos de transporte, tarifas e barreiras não tarifárias, não comercializáveis, *pricing-to-market*, produtividade relativa, termos de troca e custos de ajustamento. Essas fricções permitem que o câmbio nominal se mova amplamente sem provocar resposta imediata e proporcional dos preços: elas criam uma **banda** dentro da qual os desvios não geram arbitragem. Fora de um pequeno conjunto de mercadorias homogêneas, os mercados internacionais de bens são integrados o bastante para produzir alguma convergência à PPC no longo prazo, mas não o bastante para impedir desvios grandes e persistentes no curto e médio prazo.

2.4.8 Não linearidade: Taylor, Peel e Sarno (2001)

Taylor et al. (2001) propõem uma solução parcial para o enigma levando a sério a banda de arbitragem. O argumento é que a **velocidade de convergência não é constante**: pequenos desvios são muito persistentes, porque o ganho de arbitragem não cobre os custos (transporte e seguro, tarifas, custos de informação, segmentação); grandes desvios são corrigidos rapidamente, porque a arbitragem passa a compensar. O artigo procura explicar com um único mecanismo os dois resultados da literatura: (i) testes univariados frequentemente **não rejeitam** raiz unitária no câmbio real; (ii) estudos que encontram reversão à média estimam meias-vidas de três a cinco anos. Ambos podem decorrer da **imposição incorreta de uma dinâmica linear**.

O modelo é um autorregressivo de transição suave exponencial (ESTAR). Em sua forma mais simples, com $x_t = q_t - \mu$ o desvio em relação ao equilíbrio:

$$x_t = x_{t-1}\,\exp(-\gamma\, x_{t-1}^2) + \varepsilon_t, \qquad \gamma > 0. \tag{19}$$

O coeficiente autorregressivo **efetivo** é $\rho(x) = \exp(-\gamma x^2)$, e é ele que carrega a intuição:

- **perto do equilíbrio** ($x \to 0$), $\rho(x) \to 1$: o câmbio real comporta-se quase como um passeio aleatório — é a banda de inação;
- **longe do equilíbrio** ($|x|$ grande), $\rho(x) \to 0$: a reversão é forte.

Assim, o câmbio real pode ser **localmente não estacionário** nas proximidades da PPC e **globalmente estacionário** quando se consideram grandes desvios. Um teste ADF linear, aplicado a uma série gerada pela Equação 19, vê sobretudo o comportamento perto do equilíbrio (onde a série passa a maior parte do tempo) e tende a não rejeitar a raiz unitária. A estimação é por mínimos quadrados não lineares.

O estudo usa dados mensais de 1973 a 1996 para os câmbios reais do dólar contra libra, marco, franco francês e iene, e os quatro apresentam reversão à média não linear. Como num modelo não linear a meia-vida depende do tamanho do choque, ela é calculada por simulação (funções de resposta a impulso generalizadas). Para franco e iene, as meias-vidas vão de cerca de 13–14 meses para choques de 40% a 40–42 meses para choques de 1%; para libra e marco, ficam pouco abaixo de três anos para choques de 1% e abaixo de um ano para choques de 40%. Portanto, as meias-vidas de três a cinco anos do *puzzle* aparecem **principalmente para choques pequenos**, próximos do equilíbrio. Choques grandes — os que importam numa crise cambial — morrem muito mais rápido. O laboratório reproduz esse padrão.

2.5 Paridades financeiras

As paridades financeiras relacionam juros domésticos e externos às taxas de câmbio à vista, a termo e esperada. Diferentemente da PPC, que parte da arbitragem nos mercados de **bens**, elas derivam da escolha entre **ativos** financeiros denominados em moedas diferentes. A notação:

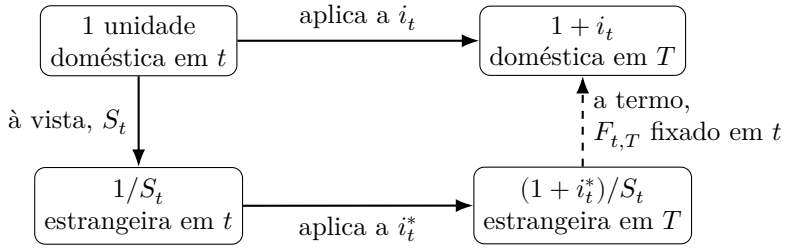
- S_t: câmbio à vista, em moeda doméstica por unidade de moeda estrangeira;
- $F_{t,T}$: taxa a termo (*forward*) contratada em t para liquidação em T;
- i_t, i_t^*: taxas de juros doméstica e externa, para o prazo de t a T;
- $\mathbb{E}_t S_T$: câmbio à vista esperado para T, condicional à informação em t.

2.5.1 Paridade coberta de juros (CIP)

A paridade coberta compara duas aplicações **sem risco cambial** de uma unidade de moeda doméstica:

1. aplicar na moeda doméstica, que rende $1 + i_t$;
2. converter para moeda estrangeira, aplicar no exterior e **contratar hoje** a taxa de reconversão. Passo a passo: (i) uma unidade doméstica compra $1/S_t$ de moeda estrangeira;

   (ii) aplicada à taxa externa, ela vira $(1 + i_t^*)/S_t$; (iii) vendida a termo por $F_{t,T}$, retorna $\frac{F_{t,T}}{S_t}(1 + i_t^*)$ em moeda doméstica.



As duas rotas são **conhecidas em** t e têm o mesmo risco (nenhum, se os emissores forem equivalentes). Na ausência de arbitragem, devem render o mesmo:

$$1 + i_t = \frac{F_{t,T}}{S_t}(1 + i_t^*) \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{\frac{F_{t,T}}{S_t} = \frac{1 + i_t}{1 + i_t^*}.} \tag{20}$$

Em logaritmos, e para taxas pequenas:

$$f_{t,T} - s_t \approx i_t - i_t^*. \tag{21}$$

O **prêmio a termo** da moeda estrangeira deve ser aproximadamente igual ao diferencial de juros. O exemplo dos slides: com $i = 10\%$, $i^* = 5\%$ e $S = 5{,}00$, a taxa a termo compatível com a CIP é $F = 5{,}00 \times 1{,}10/1{,}05 = 5{,}238$. Como o juro doméstico é maior, o dólar é negociado com **prêmio** a termo, $F > S$. Se não fosse, haveria ganho sem risco tomando emprestado numa moeda e aplicando na outra com proteção cambial.

> **!** A CIP não é uma teoria sobre expectativas
>
> A CIP é uma **condição de não arbitragem**. O *forward* é determinado pelo diferencial de juros, e não pela expectativa do mercado sobre o câmbio futuro. Um dólar a termo mais caro que o à vista, no Brasil, **não** significa que o mercado espera depreciação do real: significa apenas que o juro em reais é maior que o juro em dólares.

O exemplo dos slides com cotações reais de outubro de 2026 mostra a condição em ação. A lira turca era negociada a 49,37 por dólar à vista e a 65,88 no *forward* de um ano; o iene, a 158,31 à vista e a 153,61 no *forward* de um ano. O *forward* da lira embute um prêmio de quase 29% (em

log) — o diferencial entre o juro em liras e o juro em dólares —, enquanto o do iene embute um **desconto** de cerca de 3%, porque o juro em ienes é menor que o juro em dólares. O laboratório recupera os juros implícitos.

2.5.2 Fricções e desvios da CIP

A CIP requer que os agentes consigam tomar e emprestar nas duas moedas, operar nos mercados à vista e a termo, contratar instrumentos comparáveis em prazo e risco e fazer tudo isso com custos baixos. Na prática há custos de transação e *bid-ask spreads*, diferenças de risco de crédito, garantias e margens, controles de capital, impostos e regulação, restrições de balanço dos intermediários e risco de liquidação. Pequenas diferenças podem permanecer sem representar arbitragem explorável. Uma medida simples do desvio é

$$\text{CIP wedge}_t = (i_t - i_t^*) - (f_{t,T} - s_t), \tag{22}$$

que é zero sob a CIP. Quando o desvio persiste, fala-se em *cross-currency basis*. Ele não deve ser lido automaticamente como lucro sem risco: pode refletir custos de financiamento, escassez de balanço bancário, exigências de capital, demanda por *hedge* numa moeda, risco de crédito e liquidez ou segmentação.

Historicamente, a CIP foi uma das relações mais precisas da economia entre moedas conversíveis de mercados desenvolvidos. Os desvios aumentaram na crise financeira global e, desde então, persistem em vários pares — Du et al. (2018) documentam *bases* sistemáticas e associam-nas às restrições regulatórias de balanço dos bancos depois de 2008. A arbitragem existe no papel, mas tem custo de balanço, e alguém precisa pagá-lo.

2.5.3 Paridade descoberta de juros (UIP)

Na paridade **descoberta**, o investidor não fixa a taxa de reconversão. O retorno da aplicação externa depende do câmbio à vista em T, $\frac{S_T}{S_t}(1 + i_t^*)$, que é desconhecido em t. Sob **neutralidade ao risco**, a condição de equilíbrio iguala o retorno doméstico ao retorno externo **esperado**:

$$1 + i_t = (1 + i_t^*)\, \mathbb{E}_t\left[\frac{S_T}{S_t}\right], \tag{23}$$

e, em aproximação logarítmica, para um período:

$$\boxed{\mathbb{E}_t\, \Delta s_{t+1} \approx i_t - i_t^*.} \tag{24}$$

Se o juro doméstico supera o externo, a UIP prevê $\mathbb{E}_t \Delta s_{t+1} > 0$: a moeda doméstica deve **depreciar-se**, e o juro maior apenas compensa a perda cambial esperada. Não há almoço grátis em aplicar na moeda de juro alto.

2.5.4 A relação entre CIP e UIP

Combinando a Equação 21 com a Equação 24, os dois lados direitos são iguais e, portanto,

$$f_t - s_t = \mathbb{E}_t s_{t+1} - s_t \quad \Longrightarrow \quad f_t = \mathbb{E}_t s_{t+1}. \tag{25}$$

Se CIP e UIP valem simultaneamente, a taxa a termo é um **previsor não viesado** do câmbio futuro. Note a ordem lógica: o *forward* é determinado por arbitragem coberta; a UIP é a hipótese **adicional** de que essa taxa coincide com a expectativa.

2.5.5 UIP com prêmio de risco

A Equação 24 exige neutralidade ao risco. Se ativos em moedas diferentes têm riscos distintos, introduz-se um **prêmio cambial** rp_t:

$$i_t - i_t^* = \mathbb{E}_t \, \Delta s_{t+1} + rp_t \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbb{E}_t \, \Delta s_{t+1} = i_t - i_t^* - rp_t, \tag{26}$$

em que rp_t é o prêmio exigido para manter o ativo doméstico. A decomposição é central para o resto do curso:

$$\text{diferencial de juros} = \text{depreciação esperada} + \text{prêmio de risco}.$$

Na prática, o "prêmio" agrega também diferenças de risco soberano, de crédito, de liquidez, de tributação e controles de capital — e é por aí que a metade de dívida soberana do curso entra na determinação do câmbio.

2.5.6 A regressão de Fama

Fama (1984) investiga por que o *forward* tem tão pouco poder para prever a variação do câmbio. Ele estima

$$s_{t+1} - s_t = \alpha + \beta \, (f_t - s_t) + \varepsilon_{t+1}. \tag{27}$$

Sob expectativas racionais e prêmio de risco constante ou nulo, $\alpha = 0$ e $\beta = 1$: uma moeda negociada com prêmio a termo deveria depreciar-se na mesma proporção. Como, pela CIP, $f_t - s_t = i_t - i_t^*$, a Equação 27 é também um teste direto da UIP. O resultado de Fama — e de praticamente toda a literatura posterior (Engel 1996) — é que

$$\hat{\beta} < 0.$$

Moedas com prêmio a termo — isto é, com juros mais altos — **não** se depreciam como previsto: frequentemente se apreciam, ou se depreciam menos do que o diferencial de juros. É o *forward premium puzzle*.

A contribuição mais elegante do artigo é o que esse sinal implica sobre o prêmio de risco. Seja $p_t \equiv f_t - \mathbb{E}_t s_{t+1}$ o prêmio (na notação de Fama), de modo que

$$f_t - s_t = p_t + \mathbb{E}_t \Delta s_{t+1}.$$

Com expectativas racionais, $\Delta s_{t+1} = \mathbb{E}_t \Delta s_{t+1} + \eta_{t+1}$, com η não correlacionado com a informação em t. O coeficiente populacional da Equação 27 é então

$$\beta = \frac{\mathrm{Cov}(\Delta s_{t+1},\, f_t - s_t)}{\mathrm{Var}(f_t - s_t)} = \frac{\mathrm{Var}(\mathbb{E}_t \Delta s_{t+1}) + \mathrm{Cov}(p_t,\, \mathbb{E}_t \Delta s_{t+1})}{\mathrm{Var}(p_t) + \mathrm{Var}(\mathbb{E}_t \Delta s_{t+1}) + 2\mathrm{Cov}(p_t,\, \mathbb{E}_t \Delta s_{t+1})}. \tag{28}$$

O denominador é positivo; logo, $\beta < 0$ exige um numerador negativo:

$$\mathrm{Cov}(p_t, \mathbb{E}_t \Delta s_{t+1}) < -\mathrm{Var}(\mathbb{E}_t \Delta s_{t+1}) \leq 0.$$

Primeira implicação: o prêmio e a depreciação esperada são **negativamente correlacionados**. Para a segunda, use a desigualdade de Cauchy-Schwarz, $\mathrm{Cov}(p, \mathbb{E}\Delta s)^2 \leq \mathrm{Var}(p)\,\mathrm{Var}(\mathbb{E}\Delta s)$. Como $|\mathrm{Cov}| > \mathrm{Var}(\mathbb{E}\Delta s)$,

$$\mathrm{Var}(\mathbb{E}_t \Delta s_{t+1})^2 < \mathrm{Cov}(p_t, \mathbb{E}_t \Delta s_{t+1})^2 \leq \mathrm{Var}(p_t)\,\mathrm{Var}(\mathbb{E}_t \Delta s_{t+1}) \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\mathrm{Var}(p_t) > \mathrm{Var}(\mathbb{E}_t \Delta s_{t+1}).} \tag{29}$$

A maior parte da variação do prêmio a termo vem do **prêmio de risco**, e não de mudanças na depreciação esperada. Esse resultado fundamenta tanto a literatura sobre o *forward premium puzzle* quanto a investigação posterior dos retornos do *carry trade*.

2.5.7 *Carry trade*

O *carry trade* é a estratégia que explora diretamente a falha da UIP:

1. toma-se financiamento em uma moeda de juros baixos (*funding currency*);
2. convertem-se os recursos para uma moeda de juros altos (*investment* ou *target currency*);
3. aplica-se à taxa de juros da moeda de destino;
4. mantém-se a exposição cambial **aberta**.

Do ponto de vista de um investidor que se financia na moeda estrangeira (de juro baixo) e aplica na doméstica (de juro alto), o retorno aproximado é

$$rx_{t+1}^{CT} \approx (i_t - i_t^*) - \Delta s_{t+1}. \tag{30}$$

O investidor ganha o diferencial de juros, mas perde se a moeda de juros altos se depreciar ($\Delta s_{t+1} > 0$). Sob a UIP sem prêmio, o retorno esperado seria zero. Com prêmio, pela Equação 26:

$$\mathbb{E}_t\, rx_{t+1}^{CT} = (i_t - i_t^*) - \mathbb{E}_t\, \Delta s_{t+1} = rp_t.$$

O retorno esperado do *carry* **é** o prêmio de risco cambial. A pergunta passa a ser por que ele é positivo. A explicação racional é que moedas de juros altos pagam prêmio porque têm **retornos ruins em estados ruins** — quando a riqueza ou o consumo dos investidores já estão baixos. Verdelhan (2010) gera esse prêmio, variável ao longo do ciclo, num modelo com formação de hábito; Lustig et al. (2011) mostram que um único fator de risco global explica boa parte da dispersão de retornos entre carteiras de moedas ordenadas pelo juro.

A dinâmica do risco é assimétrica. Moedas de juros altos frequentemente se apreciam gradualmente em períodos tranquilos e sofrem **depreciações abruptas** em momentos de estresse — "sobem de escada e descem de elevador". Numa crise, aumenta a aversão ao risco, investidores desmontam posições de *carry*, vendem moedas de juros altos e recompram moedas de *funding*; o movimento cambial amplia as perdas e as chamadas de margem forçam novas liquidações. É um ciclo de desalavancagem, e por isso moedas de *funding* como o iene e o franco suíço podem **apreciar-se** fortemente em crises (Brunnermeier et al. 2008). Os retornos do *carry* são negativamente expostos a indicadores de aversão ao risco e volatilidade global: o retorno médio é positivo porque moedas de juros altos não se depreciam, em média, tanto quanto prevê a UIP — mas esse retorno vem com perdas concentradas exatamente nas crises.

2.5.8 Economias emergentes e o caso brasileiro

Em mercados emergentes, juros elevados refletem vários componentes, e não é correto interpretar todo o diferencial como *carry* puro. No caso brasileiro, a análise deve considerar o risco fiscal e soberano, a liquidez do mercado de NDF, o **cupom cambial**, as intervenções do Banco Central, a volatilidade dos termos de troca e a exposição a *commodities*, a tributação, o risco político e o custo efetivo de financiamento em dólares.

O cupom cambial merece uma linha. É a taxa de juros em dólares **implícita no mercado doméstico**, obtida invertendo a CIP com o juro em reais e o *forward* (ou o dólar futuro da B3):

$$1 + \text{cupom}_t = (1 + i_t^{\text{DI}})\,\frac{S_t}{F_{t,T}}.$$

Se a CIP valesse com o juro em dólares do mercado internacional, o cupom seria igual a esse juro. A diferença entre os dois — positiva e, em períodos de estresse, grande — mede o **risco de convertibilidade** e as fricções de acesso a dólares a partir do Brasil: é o *CIP wedge* da Equação 22 na sua versão brasileira, e uma ponte direta entre o câmbio e o risco soberano que o curso estuda adiante.

2.6 Laboratório computacional em R e Python

Este laboratório reproduz, com dados reais e simulados, os principais resultados do capítulo. Cada exercício aparece primeiro em R e depois em Python. As implementações são **feitas à mão** — sem `urca`, `tseries` ou `statsmodels` —, porque escrever a regressão do ADF ou a decomposição de Fama deixa explícito o que os comandos prontos fazem.

2.6.1 (0) Os dados

Todas as séries vêm do FRED e foram baixadas para a pasta `dados/`. O código abaixo, que não roda na compilação, é o que as baixou — basta executá-lo para atualizar a base.

```r
series <- c("EXUSUK", "EXJPUS", "EXSZUS", "EXCAUS",            # cambio mensal
            "CPIAUCSL", "GBRCPIALLMINMEI", "JPNCPIALLMINMEI",  # precos ao consumidor
            "CHECPIALLMINMEI", "CANCPIALLMINMEI",
            "IR3TIB01USM156N", "IR3TIB01GBM156N", "IR3TIB01CAM156N",  # juros 3 meses
            "EXBZUS", "BRACPIALLMINMEI", "RBBRBIS")            # Brasil
for (id in series) {
  url <- paste0("https://fred.stlouisfed.org/graph/fredgraph.csv?id=", id)
  download.file(url, file.path("dados", paste0(id, ".csv")), quiet = TRUE)
}
```

```python
import urllib.request
series = ["EXUSUK", "EXJPUS", "EXSZUS", "EXCAUS", "CPIAUCSL", "GBRCPIALLMINMEI",
          "JPNCPIALLMINMEI", "CHECPIALLMINMEI", "CANCPIALLMINMEI", "IR3TIB01USM156N",
          "IR3TIB01GBM156N", "IR3TIB01CAM156N", "EXBZUS", "BRACPIALLMINMEI", "RBBRBIS"]
for s in series:
    url = f"https://fred.stlouisfed.org/graph/fredgraph.csv?id={s}"
    urllib.request.urlretrieve(url, f"dados/{s}.csv")
```

Uma escolha de convenção atravessa o laboratório. Nos exercícios com dados internacionais, o país **doméstico** é os **Estados Unidos**: S é o preço em dólares de uma unidade de moeda estrangeira (libra, iene, franco suíço, dólar canadense), e $q = s + p^* - p$ sobe quando o dólar se deprecia em termos reais. O FRED cota a libra em dólares por libra, mas iene, franco e dólar canadense em moeda estrangeira por dólar — esses três precisam ser invertidos.

2.6.2 (a) Construindo o câmbio real bilateral

Usamos o período de janeiro de 1973 (o fim de Bretton Woods) a junho de 2021 (o último dado do CPI japonês na base da OCDE), num total de pouco menos de 50 anos de dados mensais.

```r
ids <- c("EXUSUK", "EXJPUS", "EXSZUS", "EXCAUS", "CPIAUCSL",
         "GBRCPIALLMINMEI", "JPNCPIALLMINMEI", "CHECPIALLMINMEI", "CANCPIALLMINMEI")
m <- Reduce(function(a, b) merge(a, b, by = "data"), lapply(ids, ler_fred))
m <- subset(m, data >= as.Date("1973-01-01") & data <= as.Date("2021-06-01"))

# s = log de dolares por unidade de moeda estrangeira
s  <- data.frame(UK = log(m$EXUSUK),  JP = -log(m$EXJPUS),
                 CH = -log(m$EXSZUS), CA = -log(m$EXCAUS))
pe <- data.frame(UK = log(m$GBRCPIALLMINMEI), JP = log(m$JPNCPIALLMINMEI),
                 CH = log(m$CHECPIALLMINMEI), CA = log(m$CANCPIALLMINMEI))
p  <- log(m$CPIAUCSL)
q  <- s + pe - p                          # eq. (q-log): q = s + p* - p
c(T = nrow(q), inicio = format(min(m$data)), fim = format(max(m$data)))
```

```
         T       inicio          fim
     "582" "1973-01-01" "2021-06-01"
```

```r
qd <- data.frame(data = m$data, sweep(q, 2, colMeans(q)))
qd <- tidyr::pivot_longer(qd, -data, names_to = "moeda", values_to = "q")
qd$moeda <- factor(qd$moeda, levels = c("UK", "JP", "CH", "CA"),
                   labels = c("Libra", "Iene", "Franco suíço", "Dólar canadense"))
ggplot(qd, aes(data, q, colour = moeda)) +
  geom_hline(yintercept = 0, colour = cz, linewidth = 0.3) +
  geom_line(linewidth = 0.5) +
  scale_colour_manual(values = c(az, vm, vd, lr)) +
  labs(x = NULL, y = "q (desvio da média, log)")
```

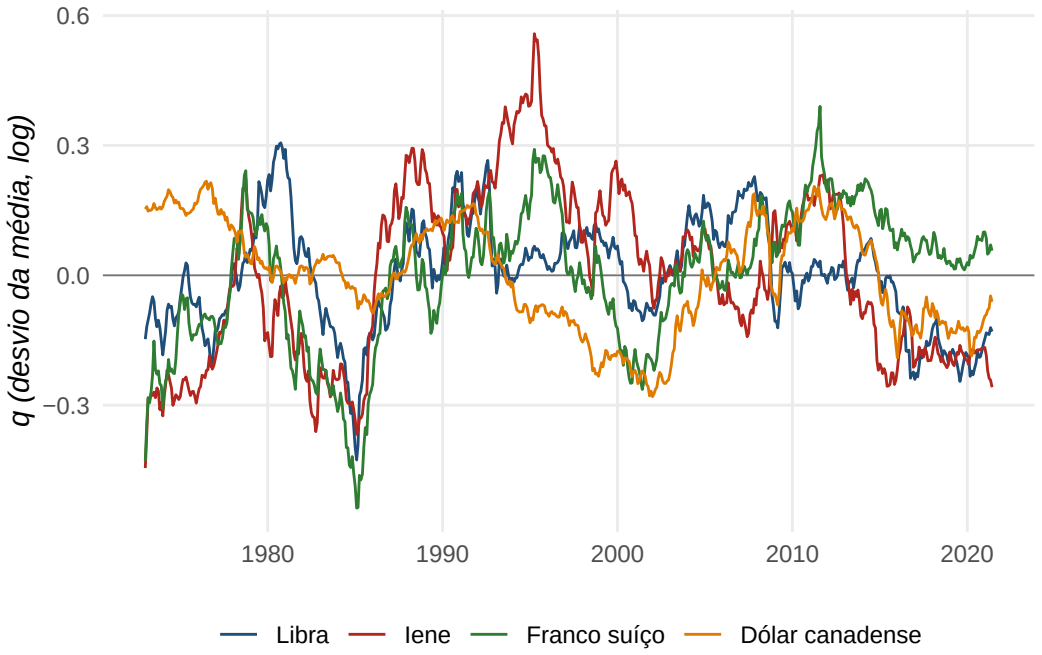


Figura 1: Câmbio real do dólar contra quatro moedas, 1973–2021 (log, normalizado em zero na média da amostra). Aumento = depreciação real do dólar.

A Figura 1 é o *PPP puzzle* em uma imagem: desvios de 30 a 50 log-pontos em relação à média, que levam **anos** para se desfazer — e que, no caso do iene, parecem ter uma tendência de longo prazo, apreciação até meados dos anos 1990 e depreciação depois, compatível com um componente Balassa-Samuelson.

A mesma construção em Python:

```python
import numpy as np
import pandas as pd

def ler_fred(id_):
```

```
    d = pd.read_csv(f"dados/{id_}.csv")
    d.columns = ["data", id_]
    d["data"] = pd.to_datetime(d["data"])
    d[id_] = pd.to_numeric(d[id_], errors="coerce")
    return d.set_index("data")

ids = ["EXUSUK", "EXJPUS", "EXSZUS", "EXCAUS", "CPIAUCSL",
       "GBRCPIALLMINMEI", "JPNCPIALLMINMEI", "CHECPIALLMINMEI", "CANCPIALLMINMEI"]
m = pd.concat([ler_fred(i) for i in ids], axis=1, join="inner").loc["1973-01":"2021-06"]

s = pd.DataFrame({"UK": np.log(m.EXUSUK), "JP": -np.log(m.EXJPUS),
                  "CH": -np.log(m.EXSZUS), "CA": -np.log(m.EXCAUS)})
pe = pd.DataFrame({"UK": np.log(m.GBRCPIALLMINMEI), "JP": np.log(m.JPNCPIALLMINMEI),
                   "CH": np.log(m.CHECPIALLMINMEI), "CA": np.log(m.CANCPIALLMINMEI)})
p = np.log(m.CPIAUCSL)
q = s + pe.values - p.values[:, None]

# desvio-padrao das variacoes mensais: cambio nominal vs. diferencial de inflacao
dp_ds  = s.diff().std()
dp_inf = (p.values[:, None] - pe).diff().std()
print(pd.DataFrame({"dp(ds)": dp_ds, "dp(pi - pi*)": dp_inf,
                    "razao": dp_ds / dp_inf}).round(4))
```

```
    dp(ds)  dp(pi - pi*)   razao
UK  0.0237        0.0055  4.3385
JP  0.0262        0.0057  4.6321
CH  0.0279        0.0040  6.9477
CA  0.0149        0.0035  4.2403
```

A tabela é a desigualdade $\mathrm{Var}(\Delta s_t) \gg \mathrm{Var}(\pi_t - \pi_t^*)$ de Rogoff, em números: a variação mensal do câmbio nominal tem desvio-padrão **quatro a sete vezes** maior que a do diferencial de inflação. Pela Equação 3, quase toda a volatilidade do câmbio nominal vira volatilidade do câmbio real.

2.6.3 (b) Média geométrica vs. aritmética no câmbio efetivo

O exemplo da seção de conceitos: dois parceiros de mesmo peso, um câmbio real que dobra e outro que cai à metade, nas duas convenções de cotação.

```
Q0 <- c(A = 1, B = 1); Q1 <- c(A = 2, B = 0.5); w <- c(0.5, 0.5)
geom  <- function(Q, w) prod(Q^w)
arit  <- function(Q, w) sum(w * Q)
rbind(convencao_original = c(geometrica = geom(Q1, w) / geom(Q0, w),
                             aritmetica = arit(Q1, w) / arit(Q0, w)),
      convencao_inversa  = c(geometrica = geom(1/Q1, w) / geom(1/Q0, w),
                             aritmetica = arit(1/Q1, w) / arit(1/Q0, w)))
```

```
                  geometrica aritmetica
convencao_original          1       1.25
convencao_inversa           1       1.25
```

```
Q0, Q1, w = np.array([1.0, 1.0]), np.array([2.0, 0.5]), np.array([0.5, 0.5])
geom = lambda Q: np.prod(Q ** w)
arit = lambda Q: np.sum(w * Q)
print("original:", geom(Q1) / geom(Q0), arit(Q1) / arit(Q0))
```

```
original: 1.0000000000000002 1.25
```

```
print("inversa: ", geom(1 / Q1) / geom(1 / Q0), arit(1 / Q1) / arit(1 / Q0))
```

```
inversa:  1.0000000000000002 1.25
```

O índice geométrico fica em 1 nas duas convenções. O aritmético sobe 25% **nas duas** — uma depreciação e uma apreciação ao mesmo tempo, o que é impossível.

Na prática, o que importa é a direção do índice publicado. O REER *broad* do BIS para o Brasil sobe quando o real se **aprecia**; para colocá-lo na convenção do curso, basta inverter o sinal do log:

```
reer <- ler_fred("RBBRBIS")
reer$q_curso <- -log(reer$RBBRBIS / 100)
ggplot(reer, aes(data, q_curso)) +
  geom_hline(yintercept = 0, colour = cz, linewidth = 0.3) +
  geom_line(colour = az, linewidth = 0.6) +
  labs(x = NULL, y = "-log(REER BIS / 100)")
```



Figura 2: Câmbio real efetivo do Brasil (BIS, cesta broad, deflacionado pelo CPI), na convenção do curso: log do inverso do índice, normalizado em 2020 = 0. Aumento = depreciação real.

2.6.4 (c) A PPC relativa no Brasil, 1995–2024

A PPC relativa da Equação 11 diz que a depreciação do real deve acompanhar o diferencial de inflação Brasil–EUA. Com médias anuais, de 1995 a 2024:

```
br <- Reduce(function(a, b) merge(a, b, by = "data"),
             lapply(c("EXBZUS", "BRACPIALLMINMEI", "CPIAUCSL"), ler_fred))
br$ano <- as.integer(format(br$data, "%Y"))
anual <- aggregate(br[, c("EXBZUS", "BRACPIALLMINMEI", "CPIAUCSL")],
                   list(ano = br$ano), mean)
anual <- subset(anual, ano >= 1995 & ano <= 2024)

ds  <- diff(log(anual$EXBZUS))                                # depreciacao do real
dpi <- diff(log(anual$BRACPIALLMINMEI)) - diff(log(anual$CPIAUCSL))  # pi - pi*
ppc_rel <- lm(ds ~ dpi)
tab <- cbind(coef = coef(ppc_rel), ep_robusto = ep_robusto(ppc_rel))
round(tab, 3)
```

```
             coef ep_robusto
(Intercept) 0.009      0.042
dpi         1.383      0.807
```

```
c(depreciacao_acumulada = sum(ds), diferencial_acumulado = sum(dpi),
  depreciacao_real_acumulada = sum(ds) - sum(dpi))
```

```
     depreciacao_acumulada      diferencial_acumulado
                 1.7706479                  1.0849591
depreciacao_real_acumulada
                 0.6856888
```

O coeficiente fica acima de um, mas com erro-padrão enorme: com 29 observações anuais e um câmbio que oscila 20% a 30% em anos de crise, a regressão anual tem pouco a dizer. A conta acumulada é mais informativa. Entre 1995 e 2024, o real depreciou cerca de 177 log-pontos contra o dólar, e o diferencial de inflação acumulado foi de cerca de 108: a PPC relativa explica a **maior parte** da tendência do câmbio nominal em trinta anos, e o resto — perto de 70 log-pontos — é depreciação **real**. A Figura 3 mostra a trajetória:

```
acum <- data.frame(ano = anual$ano,
                   Cambio = c(0, cumsum(ds)),
                   `Diferencial de inflação` = c(0, cumsum(dpi)), check.names = FALSE)
acum <- tidyr::pivot_longer(acum, -ano)
ggplot(acum, aes(ano, value, colour = name)) +
  geom_line(linewidth = 0.7) +
  scale_colour_manual(values = c(az, vm)) +
  labs(x = NULL, y = "log acumulado")
```

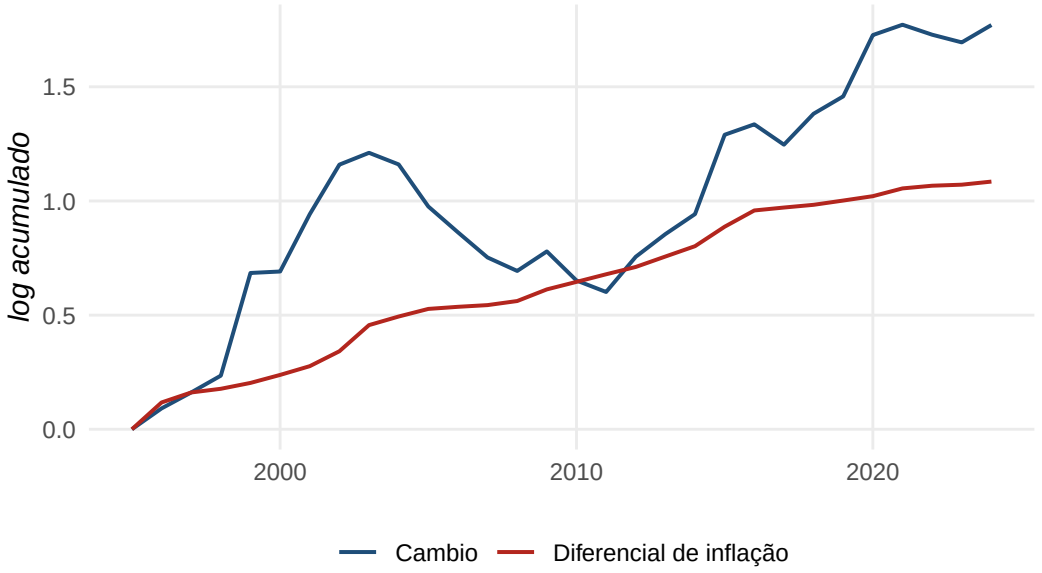


Figura 3: Depreciação nominal acumulada do real vs. diferencial de inflação acumulado Brasil–EUA, médias anuais, 1995–2024 (log, 1995 = 0).

As duas curvas andam juntas nas grandes tendências, mas a distância entre elas — o câmbio real — oscila muito: fecha-se em 2011, no auge das *commodities*, e abre-se em 2002, 2015 e 2020.

```
br = pd.concat([ler_fred(i) for i in ["EXBZUS", "BRACPIALLMINMEI", "CPIAUCSL"]],
               axis=1, join="inner")
anual = br.groupby(br.index.year).mean().loc[1995:2024]
ds  = np.diff(np.log(anual.EXBZUS.values))
dpi = np.diff(np.log(anual.BRACPIALLMINMEI.values)) - np.diff(np.log(anual.CPIAUCSL.values))

def mqo(y, X):
    """MQO com erro-padrao robusto HC1 (mesma formula do preambulo em R)."""
    X = np.column_stack([np.ones(len(y)), X])
    b = np.linalg.solve(X.T @ X, X.T @ y)
    u = y - X @ b
    n, k = X.shape
    bread = np.linalg.inv(X.T @ X)
    meat = (X * u[:, None]).T @ (X * u[:, None])
    ep = np.sqrt(np.diag(bread @ meat @ bread) * n / (n - k))
    return b, ep, u

b, ep, _ = mqo(ds, dpi)
print("coef:", b.round(3), " ep robusto:", ep.round(3))
```

```
coef: [0.009 1.383]  ep robusto: [0.042 0.807]
```

```
print("acumulados (cambio, inflacao, real):", ds.sum().round(3), dpi.sum().round(3),
      (ds.sum() - dpi.sum()).round(3))
```

```
acumulados (cambio, inflacao, real): 1.771 1.085 0.686
```

2.6.5 (d) A reta de Balassa

A Tabela 3 permite reestimar a relação da figura de Balassa (1964): o preço relativo dos bens em geral sobre o dos manufaturados contra a produtividade industrial.

```
balassa <- data.frame(
  pais  = c("EUA", "Bélgica", "França", "Alemanha", "Itália", "Reino Unido", "Japão"),
  prod  = c(124, 143, 165, 152, 167, 122, 197),   # coluna (1)
  preco = c(105, 109, 113, 117, 117, 109, 126))   # coluna (4)
reta <- lm(preco ~ prod, data = balassa)
c(intercepto = coef(reta)[[1]], inclinacao = coef(reta)[[2]],
  correlacao = cor(balassa$prod, balassa$preco))
```

```
intercepto inclinacao correlacao
76.3778887  0.2442568  0.9217735
```

```
prod  = np.array([124, 143, 165, 152, 167, 122, 197])
preco = np.array([105, 109, 113, 117, 117, 109, 126])
b, ep, _ = mqo(preco, prod)
print("intercepto, inclinacao:", b.round(3), " correlacao:",
      np.corrcoef(prod, preco)[0, 1].round(3))
```

```
intercepto, inclinacao: [76.378  0.244]  correlacao: 0.922
```

Cada 10 pontos de crescimento da produtividade industrial estão associados a cerca de 2,5 pontos de aumento do preço relativo dos bens em geral sobre os manufaturados, com correlação de 0,92. A reta estimada, com intercepto de 76,4, é praticamente a da figura original do artigo (intercepto de 76,52). Sete observações não provam nada, mas o sinal e a magnitude são os que a Equação 13 prevê.

2.6.6 (e) Frenkel em níveis e a regressão espúria

Primeiro, a regressão da Equação 14 com os dados de 1973–2021, reportando o R^2 e a estatística de Durbin-Watson:

```
dw <- function(u) sum(diff(u)^2) / sum(u^2)
t(sapply(names(q), function(k) {
  f <- lm(s[[k]] ~ I(p - pe[[k]]))
  c(beta = coef(f)[[2]], R2 = summary(f)$r.squared, DW = dw(resid(f)))
})) |> round(3)
```

```
    beta    R2    DW
UK 0.830 0.427 0.037
JP 1.059 0.737 0.019
CH 1.319 0.826 0.039
CA 0.994 0.119 0.015
```

Os $\hat{\beta}$ vão de 0,8 a 1,3 e o R^2 chega a 0,8 — à primeira vista, a PPC funcionaria. Mas a estatística de Durbin-Watson é da ordem de 0,02 a 0,04 em todos os casos, muito abaixo do R^2: pela regra de Granger e Newbold, é o perfil de uma regressão espúria, e os erros-padrão convencionais não podem ser usados para testar $\beta = 1$. A simulação de Granger e Newbold (1974) mostra o tamanho do problema: dois passeios aleatórios **independentes**, regredidos um no outro.

```r
set.seed(2026)
rejeita <- replicate(2000, {
  x <- cumsum(rnorm(200)); y <- cumsum(rnorm(200))
  abs(summary(lm(y ~ x))$coefficients[2, 3]) > 1.96
})
c(taxa_de_rejeicao_de_beta_zero = mean(rejeita), nominal = 0.05)
```

```
taxa_de_rejeicao_de_beta_zero                       nominal
                       0.8205                        0.0500
```

```python
rng = np.random.default_rng(2026)
R, T = 2000, 200
rej = 0
for _ in range(R):
    x = np.cumsum(rng.standard_normal(T)); y = np.cumsum(rng.standard_normal(T))
    X = np.column_stack([np.ones(T), x])
    b = np.linalg.lstsq(X, y, rcond=None)[0]
    u = y - X @ b
    ep = np.sqrt(u @ u / (T - 2) * np.linalg.inv(X.T @ X)[1, 1])
    rej += abs(b[1] / ep) > 1.96
print("taxa de rejeicao de beta = 0:", rej / R, "(nominal: 0.05)")
```

```
taxa de rejeicao de beta = 0: 0.8145 (nominal: 0.05)
```

O teste t rejeita a hipótese nula **verdadeira** — as séries são independentes por construção — em mais de 80% das vezes, contra 5% nominais. (Os números de R e Python diferem na terceira casa porque os geradores de números aleatórios são diferentes; a conclusão não.)

2.6.7 (f) Teste ADF e meia-vida, à mão

Implementamos a Equação 16 com $k = 12$ defasagens (um ano de dados mensais) e comparamos a estatística com o valor crítico de $-2{,}86$. A meia-vida usa o $\hat{\rho}$ de um AR(1) simples na Equação 17.

```r
adf <- function(y, k = 12) {
  dy <- diff(y); n <- length(dy)
  idx <- (k + 1):n                              # observacoes usaveis
  X <- cbind(1, y[idx])                         # constante e q_{t-1}
  for (j in 1:k) X <- cbind(X, dy[idx - j])     # defasagens de dq
  Y <- dy[idx]
  b <- solve(crossprod(X), crossprod(X, Y))
  u <- Y - X %*% b
  s2 <- sum(u^2) / (length(Y) - ncol(X))
  tau <- b[2] / sqrt(s2 * solve(crossprod(X))[2, 2])
  c(delta = b[2], tau = tau)
}
meia_vida <- function(y) {
  rho <- coef(lm(y[-1] ~ y[-length(y)]))[[2]]
  c(rho = rho, meia_vida_meses = log(0.5) / log(rho))
}
res_adf <- t(sapply(q, function(y) c(adf(y), meia_vida(y))))
res_adf <- cbind(res_adf, rejeita_5pct = res_adf[, "tau"] < -2.86)
round(res_adf, 3)
```

```
    delta    tau   rho meia_vida_meses rejeita_5pct
UK -0.029 -3.466 0.982          37.493            1
JP -0.016 -2.786 0.988          55.833            0
CH -0.024 -3.303 0.979          32.265            1
CA -0.012 -2.242 0.991          78.151            0
```

```python
def adf(y, k=12):
    dy = np.diff(y); n = len(dy)
    idx = np.arange(k, n)
    X = np.column_stack([np.ones(len(idx)), y[idx]] + [dy[idx - j] for j in range(1, k + 1)])
    Y = dy[idx]
    b = np.linalg.solve(X.T @ X, X.T @ Y)
    u = Y - X @ b
    s2 = u @ u / (len(Y) - X.shape[1])
    return b[1], b[1] / np.sqrt(s2 * np.linalg.inv(X.T @ X)[1, 1])

for c in q.columns:
    y = q[c].values
    delta, tau = adf(y)
    rho = np.polyfit(y[:-1], y[1:], 1)[0]
    print(f"{c}: tau = {tau:6.2f}  rejeita = {tau < -2.86!s:5}  "
          f"rho = {rho:.4f}  meia-vida = {np.log(.5) / np.log(rho):5.1f} meses")
```

```
UK: tau =  -3.47  rejeita = True   rho = 0.9817  meia-vida =  37.5 meses
JP: tau =  -2.79  rejeita = False  rho = 0.9877  meia-vida =  55.8 meses
CH: tau =  -3.30  rejeita = True   rho = 0.9787  meia-vida =  32.3 meses
CA: tau =  -2.24  rejeita = False  rho = 0.9912  meia-vida =  78.2 meses
```

O resultado é o retrato da literatura dos anos 1990 numa tabela. Com quase 50 anos de dados, o ADF **rejeita** a raiz unitária para a libra e o franco suíço, mas **não** para o iene e o dólar canadense. As meias-vidas implícitas vão de cerca de 32 meses (franco) a 78 meses (dólar canadense) — dentro e acima da faixa de três a cinco anos de Rogoff. Rejeição para uns pares e não para outros, com meias-vidas parecidas, é exatamente o que se espera de um teste com potência baixa diante de reversão lenta, que é o ponto do próximo exercício.

2.6.8 (g) Potência: extensão vs. frequência

Simulamos um câmbio real **estacionário** com meia-vida de três anos — logo, a PPC de longo prazo é verdadeira — e medimos com que frequência o teste DF rejeita a raiz unitária a 5%, para quatro desenhos amostrais: 25 anos mensais, 25 anos anuais, 50 anos mensais e 100 anos anuais.

```r
df_tau <- function(y) {                       # DF sem defasagens, com constante
  dy <- diff(y); X <- cbind(1, y[-length(y)])
  b <- solve(crossprod(X), crossprod(X, dy)); u <- dy - X %*% b
  b[2] / sqrt(sum(u^2) / (length(dy) - 2) * solve(crossprod(X))[2, 2])
}
potencia <- function(rho, T, R = 2000, burn = 100) {
  mean(replicate(R, {
    y <- stats::filter(rnorm(T + burn), rho, method = "recursive")
    df_tau(as.numeric(y)[-(1:burn)]) < -2.86
  }))
}
set.seed(2026)
rho_a <- 0.5^(1/3); rho_m <- rho_a^(1/12)   # meia-vida de 3 anos
pot <- c(`25 anos, mensal`  = potencia(rho_m, 300),
         `25 anos, anual`   = potencia(rho_a, 25),
         `50 anos, mensal`  = potencia(rho_m, 600),
         `100 anos, anual`  = potencia(rho_a, 100))
round(pot, 3)
```

```
25 anos, mensal  25 anos, anual 50 anos, mensal 100 anos, anual
          0.141           0.152           0.402           0.908
```

```python
def potencia(rho, T, R=2000, burn=100, seed=2026):
    rng = np.random.default_rng(seed)
    e = rng.standard_normal((R, T + burn))
    y = np.zeros_like(e)
    for t in range(1, T + burn):              # AR(1), todas as replicacoes de uma vez
        y[:, t] = rho * y[:, t - 1] + e[:, t]
    y = y[:, burn:]
    dy, yl = np.diff(y, axis=1), y[:, :-1]
    # DF com constante: regressao de dy em (1, y_{t-1}) para cada replicacao
    yl_c = yl - yl.mean(axis=1, keepdims=True)
    dy_c = dy - dy.mean(axis=1, keepdims=True)
```

```
    b = (yl_c * dy_c).sum(1) / (yl_c ** 2).sum(1)
    u = dy_c - b[:, None] * yl_c
    ep = np.sqrt((u ** 2).sum(1) / (T - 3) / (yl_c ** 2).sum(1))
    return np.mean(b / ep < -2.86)

rho_a = 0.5 ** (1 / 3); rho_m = rho_a ** (1 / 12)
for nome, rho, T in [("25 anos, mensal", rho_m, 300), ("25 anos, anual", rho_a, 25),
                     ("50 anos, mensal", rho_m, 600), ("100 anos, anual", rho_a, 100)]:
    print(f"{nome:16s} potencia = {potencia(rho, T):.3f}")
```

```
25 anos, mensal  potencia = 0.152
25 anos, anual   potencia = 0.152
50 anos, mensal  potencia = 0.412
100 anos, anual  potencia = 0.900
```

A Equação 18 em números. Com 25 anos de dados, a potência é de cerca de 15%, **seja a amostra mensal (300 observações) ou anual (25 observações)**: doze vezes mais dados não ajudam. Com 50 anos mensais, sobe para cerca de 40%; com um século de dados anuais — apenas 100 observações —, passa de 90%. É o argumento de Ardeni e Lubian (1991) e Edison et al. (1997): o fracasso dos testes no pós-Bretton Woods é, em boa medida, o fracasso de amostras curtas demais.

2.6.9 (h) ESTAR: a meia-vida depende do tamanho do choque

Simulamos a Equação 19 com $\gamma = 0{,}5$ e choques mensais com desvio-padrão de 3% — parâmetros escolhidos para gerar meias-vidas na faixa das estimadas por Taylor et al. (2001) — e calculamos a função de resposta a impulso generalizada: a diferença média entre trajetórias que começam com um choque de tamanho x_0 e trajetórias que começam no equilíbrio, sob as **mesmas** sequências de choques futuros.

```
def girf_estar(x0, gama=0.5, sig=0.03, H=120, R=3000, seed=42):
    rng = np.random.default_rng(seed)
    e = rng.normal(0, sig, (R, H))
    a = np.zeros((R, H + 1)); b = np.zeros((R, H + 1)); b[:, 0] = x0
    for h in range(H):                          # eq. (estar): x_t = x_{t-1} exp(-g x_{t-1}^2) + e
        a[:, h + 1] = a[:, h] * np.exp(-gama * a[:, h] ** 2) + e[:, h]
        b[:, h + 1] = b[:, h] * np.exp(-gama * b[:, h] ** 2) + e[:, h]
    return (b - a).mean(axis=0) / x0            # resposta normalizada pelo choque

choques = [0.01, 0.10, 0.20, 0.40]
respostas = {x0: girf_estar(x0) for x0 in choques}
for x0, g in respostas.items():
    print(f"choque de {x0:4.0%}: meia-vida = {np.argmax(g <= 0.5):3d} meses")
```

```
choque de   1%: meia-vida =  45 meses
choque de  10%: meia-vida =  42 meses
```

```
choque de  20%: meia-vida =  33 meses
choque de  40%: meia-vida =  16 meses
```

```python
import matplotlib.pyplot as plt
fig, ax = plt.subplots(figsize=(7, 3.2))
cores = ["#1f4e79", "#2e7d32", "#e07b00", "#b3261e"]
for (x0, g), cor in zip(respostas.items(), cores):
    _ = ax.plot(g, color=cor, lw=1.4, label=f"choque de {x0:.0%}")
_ = ax.axhline(0.5, color="grey", ls=":", lw=1)
_ = ax.set_xlabel("meses após o choque", style="italic")
_ = ax.set_ylabel("fração do choque remanescente", style="italic")
ax.spines[["top", "right"]].set_visible(False)
_ = ax.legend(frameon=False, ncol=4, loc="upper center", bbox_to_anchor=(0.5, -0.22))
plt.tight_layout()
plt.show()
```

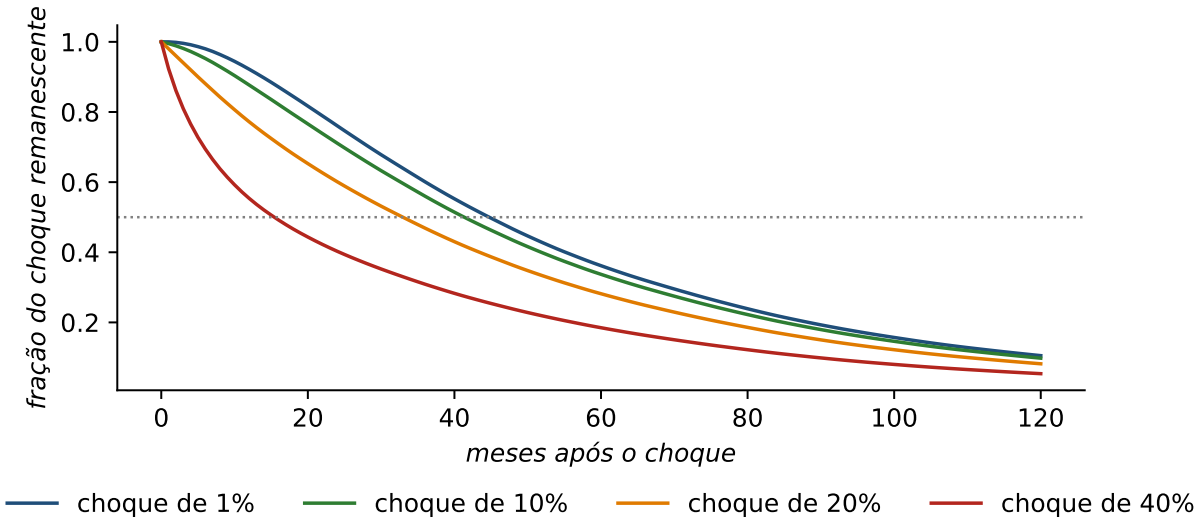


Figura 4: Resposta a impulso generalizada do modelo ESTAR (Equação 19, $\gamma = 0{,}5$, $\sigma = 3\%$ ao mês), normalizada pelo tamanho do choque. A linha pontilhada marca a meia-vida.

A mesma simulação em R, para conferir as meias-vidas:

```r
girf_estar <- function(x0, gama = 0.5, sig = 0.03, H = 120, R = 3000) {
  set.seed(42)
  e <- matrix(rnorm(R * H, 0, sig), R, H)
  a <- matrix(0, R, H + 1); b <- a; b[, 1] <- x0
  for (h in 1:H) {
    a[, h + 1] <- a[, h] * exp(-gama * a[, h]^2) + e[, h]
    b[, h + 1] <- b[, h] * exp(-gama * b[, h]^2) + e[, h]
  }
  colMeans(b - a) / x0
```

```
}
sapply(c(`1%` = 0.01, `10%` = 0.10, `20%` = 0.20, `40%` = 0.40),
       function(x0) which(girf_estar(x0) <= 0.5)[1] - 1)
```

```
 1% 10% 20% 40%
 45  42  33  16
```

Um choque de 1% leva quase quatro anos para se reduzir à metade; um choque de 40%, pouco mais de um. O mesmo processo gera, portanto, as meias-vidas "lentas demais" do *PPP puzzle* para desvios pequenos e uma correção rápida para desvios grandes — exatamente o padrão que Taylor et al. (2001) encontram para franco e iene. As meias-vidas de R e Python coincidem embora os choques simulados sejam diferentes: com 3.000 replicações, a média já é estável.

2.6.10 (i) Paridade coberta: juros implícitos no *forward*

Com as cotações dos slides (outubro de 2026) e um juro de um ano em dólares de 3,9% (a taxa interbancária americana de três meses em setembro de 2026, usada como aproximação), a Equação 20 permite recuperar o juro implícito em liras e em ienes:

```
cotacoes = {"TRY": (49.3669, 65.877220), "JPY": (158.31, 153.6120)}  # (spot, forward 1 ano)
i_usd = 0.039
for moeda, (S, F) in cotacoes.items():
    premio_log = np.log(F / S)                    # f - s  ~  i - i*
    i_impl = (F / S) * (1 + i_usd) - 1            # eq. (cip): 1 + i = (F/S)(1 + i*)
    print(f"{moeda}: f - s = {premio_log:7.2%}   juro implicito em {moeda} = {i_impl:6.2%}")

# exemplo dos slides: i = 10%, i* = 5%, S = 5,00
print("forward do exemplo:", round(5.00 * 1.10 / 1.05, 3))
```

```
cotacoes <- rbind(TRY = c(S = 49.3669, F = 65.87722), JPY = c(S = 158.31, F = 153.612))
i_usd <- 0.039
cbind(premio_log = log(cotacoes[, "F"] / cotacoes[, "S"]),
      juro_implicito = cotacoes[, "F"] / cotacoes[, "S"] * (1 + i_usd) - 1) |> round(4)
```

```
    premio_log juro_implicito
TRY     0.2885         0.3865
JPY    -0.0301         0.0082
```

A lira carrega um juro implícito próximo de 39% ao ano, e o iene, menos de 1%. Note que nada nisso diz que o mercado **espera** uma depreciação de 29% da lira em um ano: a CIP só diz que o *forward* tem de embutir o diferencial de juros.

2.6.11 (j) A regressão de Fama e o *carry trade*

Não há taxas a termo no FRED, mas, pela Equação 21, $f_t - s_t = i_t - i_t^*$; usamos então o diferencial de juros interbancários de três meses entre Estados Unidos (doméstico) e Reino Unido ou Canadá (estrangeiro). Para não sobrepor horizontes, a amostra é **trimestral**: observamos o câmbio e os juros em janeiro, abril, julho e outubro, e regredimos a variação do câmbio nos três meses seguintes sobre o diferencial de juros do início do trimestre. A amostra começa em 1980, depois da abolição dos controles de capital britânicos, e vai até 2025.

```r
fm <- Reduce(function(a, b) merge(a, b, by = "data"),
             lapply(c("EXUSUK", "EXCAUS", "IR3TIB01USM156N",
                      "IR3TIB01GBM156N", "IR3TIB01CAM156N"), ler_fred))
fm <- subset(fm, data >= as.Date("1980-01-01") & data <= as.Date("2025-12-01") &
                 format(data, "%m") %in% c("01", "04", "07", "10"))

fama <- function(s, i_dom, i_est) {
  dif <- (i_dom - i_est) / 400              # % ao ano -> fracao trimestral
  ds  <- diff(s)                            # s_{t+1} - s_t (um trimestre)
  x   <- head(dif, -1)                      # diferencial em t
  ok  <- !is.na(ds) & !is.na(x)
  f   <- lm(ds[ok] ~ x[ok])
  ep  <- ep_robusto(f)
  # carry: financia-se na moeda de juro baixo e aplica na de juro alto (eq. carry)
  rx  <- sign(x[ok]) * (x[ok] - ds[ok])
  c(beta = coef(f)[[2]], ep = ep[[2]], t_beta_igual_1 = (coef(f)[[2]] - 1) / ep[[2]],
    n = sum(ok), carry_media_aa = 4 * mean(rx), carry_dp_aa = 2 * sd(rx),
    sharpe = 2 * mean(rx) / sd(rx))
}
rbind(Libra = fama(log(fm$EXUSUK), fm$IR3TIB01USM156N, fm$IR3TIB01GBM156N),
      `Dolar canadense` = fama(-log(fm$EXCAUS), fm$IR3TIB01USM156N, fm$IR3TIB01CAM156N)) |>
  round(3)
```

```
                 beta    ep t_beta_igual_1   n carry_media_aa carry_dp_aa
Libra          -1.285 0.887         -2.577 182          0.024       0.097
Dolar canadense -0.424 0.467         -3.050 182          0.007       0.063
                sharpe
Libra            0.250
Dolar canadense  0.115
```

```python
ids = ["EXUSUK", "EXCAUS", "IR3TIB01USM156N", "IR3TIB01GBM156N", "IR3TIB01CAM156N"]
fm = pd.concat([ler_fred(i) for i in ids], axis=1, join="inner").loc["1980-01":"2025-12"]
fm = fm[fm.index.month.isin([1, 4, 7, 10])]

def fama(s, i_dom, i_est):
    dif = (i_dom - i_est) / 400
    ds, x = np.diff(s), dif[:-1]
    ok = ~np.isnan(ds) & ~np.isnan(x)
```

```
    b, ep, _ = mqo(ds[ok], x[ok])
    rx = np.sign(x[ok]) * (x[ok] - ds[ok])
    return {"beta": b[1], "ep": ep[1], "t(beta=1)": (b[1] - 1) / ep[1], "n": ok.sum(),
            "carry a.a.": 4 * rx.mean(), "dp a.a.": 2 * rx.std(ddof=1),
            "sharpe": 2 * rx.mean() / rx.std(ddof=1)}

res = pd.DataFrame({
    "Libra": fama(np.log(fm.EXUSUK.values), fm.IR3TIB01USM156N.values, fm.IR3TIB01GBM156N.value
    "Dolar canadense": fama(-np.log(fm.EXCAUS.values), fm.IR3TIB01USM156N.values,
                            fm.IR3TIB01CAM156N.values)}).T
print(res.round(3))
```

Os dois $\hat{\beta}$ são **negativos**, e a hipótese $\beta = 1$ é rejeitada com folga. Moedas com juros relativamente altos não se depreciaram como a UIP previa — o *forward premium puzzle* de Fama (1984), quarenta anos e uma crise financeira depois. A estratégia de *carry* correspondente — aplicar a cada trimestre na moeda de juro mais alto do par, financiado na de juro mais baixo — teve retorno médio positivo, mas modesto diante da volatilidade (índice de Sharpe baixo): com apenas um par de moedas, o prêmio de risco é pequeno e o risco cambial, grande. É por isso que a literatura empírica de *carry* trabalha com **carteiras** de muitas moedas, que diversificam o risco idiossincrático e isolam o fator comum (Lustig et al. 2011).

2.7 Exercícios

Exercício 1. Suponha que, em determinado ano, a inflação brasileira tenha sido de 4,5% e a americana de 2,8%, enquanto o real se apreciou 10% em relação ao dólar. (a) Usando a Equação 3, calcule a variação aproximada do câmbio real bilateral Brasil–EUA, com a convenção do curso. (b) O que a PPC relativa teria previsto para o câmbio nominal? (c) Por que a resposta de (a) pode diferir do movimento do REER *broad* do BIS no mesmo ano? Cite as três escolhas metodológicas da seção de conceitos.

Exercício 2. Mostre que, com pesos constantes, a variação percentual de um índice aritmético de câmbio real efetivo, $\sum_i w_i Q_{i,t}$, **não** é igual à média ponderada das variações percentuais dos câmbios bilaterais, enquanto a variação em log do índice geométrico **é** igual à média ponderada das variações em log. Que propriedade de cada média explica a diferença?

Exercício 3. No modelo de Balassa-Samuelson da Equação 13, suponha que $\gamma = 0{,}5$ e que a produtividade dos comercializáveis cresça 4% ao ano no país doméstico e 2% no exterior, enquanto a dos não comercializáveis cresce 1% ao ano nos dois. (a) Calcule a taxa anual de variação do câmbio real. (b) Se a PPC relativa valesse para os comercializáveis e o diferencial de inflação fosse de 3% ao ano, qual seria a variação do câmbio nominal? (c) Discuta por que um analista que comparasse o câmbio com a PPC calculada a partir do IPCA concluiria que a moeda está se "sobrevalorizando".

Exercício 4. Um câmbio real anual segue $q_t = 0{,}85\, q_{t-1} + \varepsilon_t$. (a) Calcule a meia-vida em anos. (b) Calcule o coeficiente mensal equivalente e verifique que a meia-vida, medida em meses, é doze vezes a anual. (c) Usando a Equação 18, explique por que um pesquisador com 25 anos de dados mensais não tem, essencialmente, mais potência que um com 25 anos de dados anuais.

Exercício 5. No modelo ESTAR da Equação 19, calcule o coeficiente autorregressivo efetivo $\rho(x)$ para desvios de 1%, 10% e 40%, com $\gamma = 0{,}5$. Use a Equação 17 para obter uma "meia-vida local" em cada caso e compare com as meias-vidas simuladas no laboratório (h). Por que os números do laboratório são **menores** que as meias-vidas locais para choques pequenos? *Sugestão:* pense no que os choques futuros ε_t fazem com o desvio.

Exercício 6. Em certa data, o dólar à vista é cotado a R$ 5,40, o juro DI de um ano é de 14% e o *forward* de um ano é negociado a R$ 5,90. (a) Calcule o cupom cambial implícito. (b) Se o juro de um ano em dólares no mercado internacional for de 4%, calcule o *CIP wedge* e interprete-o. (c) Explique por que um banco estrangeiro poderia não conseguir explorar essa diferença.

Exercício 7. Prove a Equação 29 a partir da Equação 28 e explique, em palavras, por que o resultado de Fama implica que o prêmio de risco cambial deve ser **mais volátil** que a depreciação esperada. Em seguida, mostre que, se o prêmio de risco for constante, o coeficiente da regressão de Fama é exatamente 1.

Exercício 8. Um gestor argumenta: "O diferencial de juros entre Brasil e Estados Unidos é de 10 pontos; pela UIP, o mercado espera uma depreciação de 10% do real no próximo ano". (a) Que hipóteses essa afirmação exige? (b) À luz do resultado de Fama, qual é a leitura mais provável do diferencial? (c) Liste pelo menos quatro componentes do diferencial de juros brasileiro, além da depreciação esperada, discutidos no capítulo.

2.8 Gabarito dos Exercícios

> **Sobre esta seção**
>
> As resoluções combinam a álgebra do capítulo com dados reais sempre que o exercício permite: câmbio e preços do Brasil e dos Estados Unidos, o REER do BIS, juros interbancários e a taxa overnight brasileira (`IRSTCI01BRM156N` no FRED, que acompanha de perto a Selic/CDI). Os números citados no texto são calculados na própria compilação. Como sempre, a recomendação é tentar cada exercício antes de consultar a resolução.

2.8.1 Exercício 1

(a) Pela Equação 3, $\Delta q \approx \Delta s - (\pi - \pi^*)$. Uma apreciação de 10% do real é $\Delta s = -10\%$, e o diferencial de inflação é $4{,}5\% - 2{,}8\% = 1{,}7\%$. Logo

$$\Delta q \approx -10\% - 1{,}7\% = -11{,}7\%,$$

uma **apreciação real** de quase 12%: o real ficou mais caro em dólares **e** a inflação brasileira superou a americana — os dois efeitos encarecem os bens brasileiros na mesma direção. As contas exata e em log:

```
S1_S0 <- 0.90; pi_br <- 0.045; pi_us <- 0.028
c(aproximada = -0.10 - (pi_br - pi_us),
  log        = log(S1_S0) - (log(1 + pi_br) - log(1 + pi_us)),
  exata      = S1_S0 * (1 + pi_us) / (1 + pi_br) - 1) |> round(4)
```

```
aproximada        log      exata
   -0.1170    -0.1218    -0.1146
```

A aproximação linear e a conta exata diferem por menos de 0,3 ponto — irrelevante aqui, mas a conta em log é a que soma corretamente ao longo de vários anos.

(b) A PPC relativa da Equação 11 teria previsto uma **depreciação** nominal de aproximadamente $4{,}5\% - 2{,}8\% = 1{,}7\%$ (exatamente $1{,}045/1{,}028 - 1 = 1{,}65\%$), e não uma apreciação de 10%. O erro de previsão, de quase 12 pontos, é a própria variação do câmbio real do item (a): a PPC relativa erra exatamente por Δq.

(c) O REER *broad* do BIS difere do câmbio real bilateral Brasil–EUA nas três dimensões da seção de conceitos: (i) **parceiros** — inclui 64 economias, não só os Estados Unidos; (ii) **ponderação** — o dólar tem peso grande, mas a China, a zona do euro e a Argentina também pesam, e a ponderação considera concorrência em terceiros mercados; (iii) **deflator** — o CPI de cada parceiro, e não apenas o americano. Em particular, se o próprio dólar se apreciou ou depreciou contra o resto do mundo naquele ano, o bilateral Brasil–EUA carrega esse movimento e o efetivo não.

Os dados mostram a diferença. Abaixo, a variação anual do câmbio real bilateral contra o dólar e a do REER do BIS, este invertido para a convenção do curso (aumento = depreciação real), com médias anuais de 1996 a 2024:

```r
br1 <- Reduce(function(a, b) merge(a, b, by = "data"),
              lapply(c("EXBZUS", "BRACPIALLMINMEI", "CPIAUCSL", "RBBRBIS"), ler_fred))
br1$ano <- as.integer(format(br1$data, "%Y"))
an1 <- aggregate(br1[, -c(1, 6)], list(ano = br1$ano), mean)
an1 <- subset(an1, ano >= 1995 & ano <= 2024)

dq_bil  <- diff(log(an1$EXBZUS)) + diff(log(an1$CPIAUCSL)) - diff(log(an1$BRACPIALLMINMEI))
dq_reer <- -diff(log(an1$RBBRBIS))                    # BIS invertido
comp <- data.frame(ano = an1$ano[-1], bilateral = dq_bil, efetivo = dq_reer,
                   diferenca = dq_bil - dq_reer)
c(correlacao = cor(dq_bil, dq_reer), dp_diferenca = sd(comp$diferenca)) |> round(3)
```

```
  correlacao dp_diferenca
        0.96         0.04
```

```r
comp[order(-abs(comp$diferenca)), ][1:5, ] |> round(3)
```

```
    ano bilateral efetivo diferenca
8  2003    -0.063   0.029    -0.092
20 2015     0.262   0.179     0.083
7  2002     0.152   0.075     0.076
27 2022    -0.055  -0.128     0.072
2  1997     0.026  -0.024     0.050
```

As duas medidas andam juntas — correlação de 0,96 —, mas a diferença entre elas tem desvio-padrão de 4,0% ao ano, e os anos de maior discrepância contam a história do item (c). Em 2015 e 2022 o câmbio real contra o dólar depreciou bem mais que o efetivo: foram anos de **forte valorização global do dólar**, e contra euro, iene e yuan o real perdeu menos. Em 2003, o oposto: o dólar se enfraquecia no mundo, e o real se apreciou mais contra ele do que contra a cesta. Quem olha apenas o USDBRL confunde o que é Brasil com o que é dólar.

2.8.2 Exercício 2

Seja $A_t = \sum_i w_i Q_{i,t}$ o índice aritmético, com pesos constantes. Sua variação percentual é

$$\frac{A_t - A_{t-1}}{A_{t-1}} = \sum_i \frac{w_i (Q_{i,t} - Q_{i,t-1})}{A_{t-1}} = \sum_i \underbrace{\frac{w_i\, Q_{i,t-1}}{\sum_j w_j\, Q_{j,t-1}}}_{\omega_{i,t-1}} \cdot \frac{Q_{i,t} - Q_{i,t-1}}{Q_{i,t-1}}.$$

É uma média ponderada das variações percentuais bilaterais, mas com pesos **efetivos** $\omega_{i,t-1}$ que dependem do **nível** de cada câmbio real: um parceiro contra o qual o câmbio real já subiu muito passa a pesar mais. Os pesos efetivos só coincidem com os w_i quando todos os $Q_{i,t-1}$ são iguais — tipicamente, só no período-base. Fora dele, o índice deriva para os parceiros com maior Q.

Para o índice geométrico, $\ln G_t = \sum_i w_i \ln Q_{i,t}$ e, subtraindo o mesmo em $t-1$,

$$\Delta \ln G_t = \sum_i w_i\, \Delta \ln Q_{i,t},$$

exatamente a média ponderada das variações em log, com os pesos originais. A propriedade que explica a diferença é a **linearidade**: o logaritmo transforma o produto ponderado numa soma ponderada, e a variação de uma soma linear é a soma das variações. A média aritmética é linear nos **níveis**, não nas variações proporcionais, de modo que os pesos efetivos se contaminam pelos níveis. Uma consequência é a assimetria que vimos no laboratório (b).

Com dados reais o efeito não é pequeno. Construímos, para os Estados Unidos, um índice de pesos iguais com as quatro moedas do laboratório, cada câmbio real normalizado em 1 em janeiro de 1973, nas duas convenções de cotação:

```
Qn = np.exp(q - q.iloc[0])                    # Q_i normalizado: 1 em jan/1973
w = np.full(4, 0.25)
geo       = np.exp(np.log(Qn) @ w)            # indice geometrico
arit      = Qn @ w                            # aritmetico, convencao original
arit_inv  = (1 / Qn) @ w                      # aritmetico, convencao inversa
fim = pd.DataFrame({"geometrico": [geo.iloc[-1], 1 / geo.iloc[-1]],
                    "aritmetico": [arit.iloc[-1], arit_inv.iloc[-1]]},
                   index=["convencao original", "convencao inversa"])
print(fim.round(3))
# pesos efetivos da libra e do iene no fim da amostra (eram 0,25 em 1973)
omega = (w * Qn.iloc[-1]) / arit.iloc[-1]
print("pesos efetivos em 2021:", omega.round(3).to_dict())
```

O geométrico é coerente: na convenção inversa, o índice é exatamente o inverso do original. O aritmético não é: os dois números finais **não** são inversos um do outro, e ficam **acima** dos geométricos nas duas convenções — é a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica, que viesa o índice aritmético para cima qualquer que seja a cotação. Lidos ao pé da letra, os dois índices aritméticos discordam até sobre o tamanho da depreciação real do dólar em quase cinquenta anos. E os pesos efetivos derivaram para longe de 0,25: o franco suíço, contra o qual o câmbio real do dólar mais subiu, passou a pesar cerca de um terço do índice.

2.8.3 Exercício 3

(a) Diferenciando a Equação 13 no tempo, com $\gamma = 0{,}5$:

$$\Delta q = -\gamma\left[(\Delta a_T - \Delta a_N) - (\Delta a_T^* - \Delta a_N^*)\right] = -0{,}5\left[(4-1)-(2-1)\right] = -1\% \text{ ao ano.}$$

O câmbio real **aprecia** 1% ao ano. O país doméstico tem um diferencial de produtividade setorial de 3 pontos contra 1 no exterior; os 2 pontos de diferença, multiplicados pelo peso dos não comercializáveis, viram apreciação real tendencial.

(b) Se a PPC vale para os comercializáveis, $\Delta s = \pi_T - \pi_T^*$. A inflação agregada é $\pi = \pi_T + \gamma(\pi_N - \pi_T)$, e pela Equação 12 $\pi_N - \pi_T = \Delta a_T - \Delta a_N$. Logo

$$\pi - \pi^* = (\pi_T - \pi_T^*) + \gamma\left[(\Delta a_T - \Delta a_N) - (\Delta a_T^* - \Delta a_N^*)\right] \quad \Longrightarrow \quad 3\% = (\pi_T - \pi_T^*) + 0{,}5 \times 2\%,$$

de onde $\pi_T - \pi_T^* = 2\%$ e, portanto, $\Delta s = 2\%$. Conferindo pela Equação 3: $\Delta q = \Delta s - (\pi - \pi^*) = 2\% - 3\% = -1\%$, como no item (a).

```
gama <- 0.5; dif_prod <- (0.04 - 0.01) - (0.02 - 0.01); dif_inf <- 0.03
dq   <- -gama * dif_prod
dif_inf_T <- dif_inf - gama * dif_prod
c(dq = dq, ds = dif_inf_T, ds_previsto_pela_PPC_agregada = dif_inf,
  desvio_anual = dif_inf_T - dif_inf)
```

```
                            dq                             ds
                         -0.01                           0.02
ds_previsto_pela_PPC_agregada                   desvio_anual
                          0.03                          -0.01
```

(c) Um analista que aplicasse a PPC relativa ao índice agregado (o IPCA) esperaria uma depreciação de 3% ao ano e observaria só 2%. Ano após ano, o câmbio ficaria 1 ponto "abaixo" da PPC, e em dez anos a moeda pareceria cerca de 10% **sobrevalorizada**. Mas não há desequilíbrio algum: os comercializáveis obedecem à lei do preço único, e a diferença vem inteiramente da inflação mais alta dos não comercializáveis, causada pelo crescimento da produtividade. É a advertência de Balassa (1964) e Samuelson (1964) — a PPC calculada com índices agregados não é medida de câmbio de equilíbrio — e é por isso que análises de desalinhamento cambial (como as do FMI) controlam por produtividade relativa ou renda *per capita*.

2.8.4 Exercício 4

(a) Pela Equação 17, $h = \ln 0{,}5 / \ln 0{,}85 = -0{,}6931 / -0{,}1625 = 4{,}27$ anos.

(b) O coeficiente mensal equivalente é o que, composto doze vezes, dá o anual: $\rho_m = 0{,}85^{1/12} = 0{,}98655$. A meia-vida em meses é

$$h_m = \frac{\ln 0{,}5}{\ln \rho_m} = \frac{\ln 0{,}5}{\frac{1}{12}\ln 0{,}85} = 12 \times \frac{\ln 0{,}5}{\ln 0{,}85} = 51{,}2 \text{ meses},$$

exatamente doze vezes a anual, porque $\ln \rho_m = \ln \rho_a / 12$.

(c) A grandeza que governa a potência é $T(1-\rho)$. Com 25 anos:

```
rho_a <- 0.85; rho_m <- rho_a^(1/12)
c(meia_vida_anos = log(0.5) / log(rho_a), rho_mensal = rho_m,
  meia_vida_meses = log(0.5) / log(rho_m),
  T_1menosrho_anual  = 25  * (1 - rho_a),
  T_1menosrho_mensal = 300 * (1 - rho_m),
  aproximacao_eq_span = 25 * (-log(rho_a))) |> round(4)
```

```
     meia_vida_anos          rho_mensal     meia_vida_meses   T_1menosrho_anual
             4.2650              0.9865             51.1803              3.7500
 T_1menosrho_mensal aproximacao_eq_span
             4.0356              4.0630
```

Os dois desenhos têm $T(1-\rho)$ praticamente igual — cerca de 4 —, e a Equação 18 mostra que isso não é coincidência: o termo depende apenas de $N(-\ln \rho_a)$. Multiplicar as observações por doze aproxima ρ de um na mesma proporção, e a "distância à raiz unitária" medida na escala da amostra não muda. A simulação confirma, usando a função `potencia` do laboratório (g):

```
for nome, rho, T in [("25 anos, anual", 0.85, 25),
                     ("25 anos, mensal", 0.85 ** (1 / 12), 300),
                     ("100 anos, anual", 0.85, 100)]:
    print(f"{nome:16s} potencia = {potencia(rho, T):.3f}")
```

Também se pode ver o resultado nos dados. Para o câmbio real dólar–libra, estimamos o AR(1) com dados mensais e com **médias anuais** da mesma série, e comparamos as meias-vidas:

```
q_uk  <- q$UK
ano   <- as.integer(format(m$data, "%Y"))
q_uk_a <- tapply(q_uk, ano, mean)
q_uk_a <- q_uk_a[names(q_uk_a) <= "2020"]          # so anos completos
rho_mes <- coef(lm(q_uk[-1] ~ q_uk[-length(q_uk)]))[[2]]
rho_ano <- coef(lm(q_uk_a[-1] ~ q_uk_a[-length(q_uk_a)]))[[2]]
c(rho_mensal = rho_mes, rho_mensal_anualizado = rho_mes^12, rho_anual = rho_ano,
  meia_vida_mensal_em_anos = log(0.5) / log(rho_mes) / 12,
  meia_vida_anual_em_anos  = log(0.5) / log(rho_ano)) |> round(3)
```

```
              rho_mensal    rho_mensal_anualizado                rho_anual
                   0.982                    0.801                    0.781
meia_vida_mensal_em_anos  meia_vida_anual_em_anos
                   3.124                    2.799
```

As duas frequências contam essencialmente a mesma história sobre a persistência — meias-vidas de três anos ou pouco mais —, com 582 observações de um lado e 48 do outro: o ρ anual estimado com médias anuais e o ρ mensal elevado à décima segunda potência diferem por muito pouco. (A diferença que resta vem, em parte, de a média anual suavizar a série — o viés de agregação temporal.) Os dados mensais não trazem informação adicional relevante sobre a **reversão de longo prazo**, porque o número de episódios independentes de convergência é o mesmo.

2.8.5 Exercício 5

O coeficiente efetivo é $\rho(x) = \exp(-0{,}5\,x^2)$ e a "meia-vida local" é $\ln 0{,}5 / \ln \rho(x) = \ln 2 / (0{,}5\,x^2)$:

```
x0 <- c(`1%` = 0.01, `10%` = 0.10, `20%` = 0.20, `40%` = 0.40)
rho_x <- exp(-0.5 * x0^2)
hl_local <- log(0.5) / log(rho_x)
hl_simulada <- sapply(x0, function(x) which(girf_estar(x) <= 0.5)[1] - 1)   # lab (h)
rbind(rho_efetivo = rho_x, meia_vida_local = hl_local, meia_vida_simulada = hl_simulada) |>
  round(4)
```

```
                        1%       10%     20%     40%
rho_efetivo           1.00    0.9950  0.9802  0.9231
meia_vida_local   13862.94 138.6294 34.6574  8.6643
meia_vida_simulada   45.00  42.0000 33.0000 16.0000
```

Para o choque de 1%, $\rho(x) = 0{,}99995$ e a meia-vida local seria de quase **14 mil meses** — mais de mil anos. A simulada é de 45 meses. A razão é o que a sugestão aponta: os choques futuros ε_t, com desvio-padrão de 3% ao mês, empurram o câmbio real para **fora** da banda de inação em poucos meses. Lá fora, a reversão é forte, e ela atua tanto sobre o choque original quanto sobre o ruído acumulado. A meia-vida local supõe que o desvio fica parado em 1%, mas no modelo estocástico ele não fica: a GIRF tira a média sobre trajetórias que visitam regiões de $\rho(x)$ muito menor. Em termos formais, como $\rho(x)$ é côncava perto de zero, $\mathbb{E}[\rho(x_t)] < \rho(\mathbb{E}[x_t])$ — uma desigualdade de Jensen.

Para o choque de 40% ocorre o contrário: a meia-vida local (cerca de 9 meses) é **menor** que a simulada (16 meses). A meia-vida local usa o ρ do ponto de partida, mas à medida que o desvio encolhe, a reversão enfraquece, e a segunda metade do caminho é mais lenta que a primeira. Nos dois casos, a lição é a mesma: num modelo não linear, a persistência não é um número, é uma **função** do estado e do ruído — e só a simulação a mede corretamente.

2.8.6 Exercício 6

(a) Invertendo a CIP com o juro em reais e o *forward*:

$$1 + \text{cupom} = (1 + i^{\text{DI}})\,\frac{S}{F} = 1{,}14 \times \frac{5{,}40}{5{,}90} = 1{,}0434,$$

um cupom cambial de cerca de 4,34% ao ano.

(b) O *CIP wedge* da Equação 22 é

$$(i - i^{*}) - (f - s) = \ln 1{,}14 - \ln 1{,}04 - \ln \frac{5{,}90}{5{,}40} \approx 0{,}33 \text{ ponto},$$

que é, aproximadamente, a diferença entre o cupom cambial (4,34%) e o juro em dólares no exterior (4%):

```
S, F, i_di, i_usd = 5.40, 5.90, 0.14, 0.04
cupom = (1 + i_di) * S / F - 1
wedge = np.log(1 + i_di) - np.log(1 + i_usd) - np.log(F / S)
F_cip = S * (1 + i_di) / (1 + i_usd)          # forward que zeraria o wedge
print(f"cupom cambial = {cupom:.4%}   wedge = {wedge:.4%}   forward da CIP = {F_cip:.4f}")
```

Um *wedge* positivo significa que o dólar **no Brasil** rende mais do que o dólar lá fora — ou, equivalentemente, que o *forward* está mais barato do que a CIP com o juro internacional exigiria (R$ 5,90 contra R$ 5,92). É o prêmio que o mercado cobra por manter dólares *onshore*: o **risco de convertibilidade** (a possibilidade de controles que impeçam a remessa dos dólares), o risco de crédito das contrapartes locais e as fricções de acesso ao mercado.

(c) No papel, a arbitragem seria tomar dólares lá fora a 4%, trazê-los, aplicar em reais a 14% e vender o *forward* a 5,90, ganhando 0,33 ponto. Na prática, um banco estrangeiro enfrenta: (i) o **IOF** e outros tributos sobre a entrada de capital, que podem consumir o ganho sozinhos; (ii) o próprio risco de convertibilidade que o *wedge* remunera — não é lucro sem risco; (iii) o custo de **balanço**: a operação ocupa capital regulatório e limites de crédito, que depois de 2008 têm preço (Du et al. 2018); (iv) o acesso limitado ao mercado doméstico (o *forward* liquidado no exterior é um NDF em dólares, não o mesmo instrumento); e (v) custos de transação e *bid-ask*, que num *wedge* de 33 pontos-base são de primeira ordem.

2.8.7 Exercício 7

Prova da Equação 29. Com $p_t = f_t - \mathbb{E}_t s_{t+1}$, temos $f_t - s_t = p_t + \mathbb{E}_t \Delta s_{t+1}$ e $\Delta s_{t+1} = \mathbb{E}_t \Delta s_{t+1} + \eta_{t+1}$, com η_{t+1} não correlacionado com p_t nem com $\mathbb{E}_t \Delta s_{t+1}$ (expectativas racionais). Escrevendo $E \equiv \mathbb{E}_t \Delta s_{t+1}$ para encurtar:

$$\text{Cov}(\Delta s_{t+1}, f_t - s_t) = \text{Cov}(E+\eta,\ p+E) = \text{Var}(E) + \text{Cov}(p, E), \qquad \text{Var}(f_t - s_t) = \text{Var}(p) + \text{Var}(E) + 2\text{Cov}(p, E),$$

que é a Equação 28. Como $\mathrm{Var}(f_t - s_t) > 0$, $\beta < 0$ exige $\mathrm{Var}(E) + \mathrm{Cov}(p, E) < 0$, isto é, $\mathrm{Cov}(p, E) < -\mathrm{Var}(E) \leq 0$, e portanto $|\mathrm{Cov}(p, E)| > \mathrm{Var}(E)$. Por Cauchy-Schwarz, $\mathrm{Cov}(p, E)^2 \leq \mathrm{Var}(p)\mathrm{Var}(E)$, e então $\mathrm{Var}(E)^2 < \mathrm{Cov}(p, E)^2 \leq \mathrm{Var}(p)\,\mathrm{Var}(E)$. Dividindo por $\mathrm{Var}(E) > 0$: $\mathrm{Var}(p) > \mathrm{Var}(E)$. □

Há uma forma ainda mais direta de ver o resultado, que Fama também usa. Seja β_2 o coeficiente da regressão de $f_t - s_{t+1}$ sobre $f_t - s_t$. Como $f_t - s_{t+1} = (f_t - s_t) - \Delta s_{t+1}$, temos a identidade $\beta + \beta_2 = 1$, e subtraindo as duas expressões de coeficientes:

$$\beta_2 - \beta = \frac{\mathrm{Var}(p) - \mathrm{Var}(E)}{\mathrm{Var}(f_t - s_t)} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\mathrm{Var}(p) - \mathrm{Var}(E) = (1 - 2\beta)\,\mathrm{Var}(f_t - s_t).}$$

Com $\beta < 1/2$ — e não só com $\beta < 0$ —, o prêmio já é mais volátil que a depreciação esperada.

Em palavras. O prêmio a termo $f - s$ é a soma de duas partes: o que o mercado espera de depreciação e o prêmio de risco. Se o prêmio a termo de fato prevê a depreciação com coeficiente negativo, a parte "expectativa" não pode ser a dominante — se fosse, β seria próximo de um. Para que $f - s$ suba quando a depreciação esperada cai, é preciso um componente que se move **contra** a expectativa e com **mais** força que ela: o prêmio de risco.

Prêmio constante. Se $p_t = \bar{p}$, então $\mathrm{Var}(p) = 0$ e $\mathrm{Cov}(p, E) = 0$, e a Equação 28 dá $\beta = \mathrm{Var}(E)/\mathrm{Var}(E) = 1$. O prêmio constante vai inteiro para o intercepto, $\alpha = -\bar{p}$, e a inclinação continua unitária.

Com dados reais. Usando o diferencial de juros como $f - s$ (pela CIP), podemos calcular β, β_2 e o limite inferior implícito $\mathrm{Var}(p) - \mathrm{Var}(E)$ para a libra (dados do laboratório j) e para o real (juro overnight brasileiro contra o Fed Funds, mensal, de julho de 1999 — já no câmbio flutuante — a 2025):

```
fama_dec <- function(ds, x) {
  ok <- !is.na(ds) & !is.na(x); ds <- ds[ok]; x <- x[ok]
  b1 <- coef(lm(ds ~ x))[[2]]
  b2 <- coef(lm(I(x - ds) ~ x))[[2]]                    # f - s_{t+1} sobre f - s
  c(beta = b1, beta2 = b2, soma = b1 + b2,
    razao_Vp_menos_VE_sobre_Vfs = 1 - 2 * b1, n = length(ds))
}
# libra: amostra trimestral do laboratorio (j)
x_uk  <- head((fm$IR3TIB01USM156N - fm$IR3TIB01GBM156N) / 400, -1)
ds_uk <- diff(log(fm$EXUSUK))
# real: mensal, R$ por dolar, i = Brasil, i* = EUA
bz <- Reduce(function(a, b) merge(a, b, by = "data"),
             lapply(c("EXBZUS", "IRSTCI01BRM156N", "FEDFUNDS"), ler_fred))
bz <- subset(bz, data >= as.Date("1999-07-01") & data <= as.Date("2025-12-01"))
x_br  <- head((bz$IRSTCI01BRM156N - bz$FEDFUNDS) / 1200, -1)
ds_br <- diff(log(bz$EXBZUS))
rbind(Libra = fama_dec(ds_uk, x_uk), Real = fama_dec(ds_br, x_br)) |> round(3)
```

```
        beta beta2 soma razao_Vp_menos_VE_sobre_Vfs   n
Libra -1.285 2.285    1                       3.570 182
Real  -0.876 1.876    1                       2.751 317
```

A identidade $\beta + \beta_2 = 1$ vale à precisão de máquina, como deveria. E com $\hat{\beta}$ negativo nos dois casos, o prêmio de risco teria variância maior que a da depreciação esperada por uma margem de 2,5 a 3,5 vezes a variância do próprio diferencial de juros. É o resultado de Fama (1984), agora com uma moeda emergente e um quarto de século de câmbio flutuante.

2.8.8 Exercício 8

(a) A afirmação exige: (i) **neutralidade ao risco** — nenhum prêmio cambial, $rp_t = 0$; (ii) **expectativas racionais** e um único "mercado" representativo cuja expectativa se possa ler nos preços; (iii) que os dois juros se refiram a **ativos comparáveis** — mesmo prazo, mesmo risco de crédito, sem risco de convertibilidade, sem tributação diferenciada; (iv) que a aproximação logarítmica seja boa — com juros de 14% e 4%, por exemplo, a depreciação esperada exata seria $1{,}14/1{,}04 - 1 = 9{,}6\%$, e não 10%. Sob essas hipóteses, e só sob elas, o diferencial é a depreciação esperada.

(b) O resultado de Fama diz que, **historicamente**, moedas de juros altos se depreciaram **menos** do que o diferencial — muitas vezes até se apreciaram. A leitura mais provável do diferencial brasileiro é que ele é majoritariamente **prêmio de risco**, e não expectativa de depreciação. Os dados do real mostram isso diretamente:

```r
rx_br <- x_br - ds_br                          # eq. (carry): (i - i*) - ds, mensal
c(diferencial_medio_aa   = 12 * mean(x_br),
  depreciacao_media_aa   = 12 * mean(ds_br),
  carry_medio_aa         = 12 * mean(rx_br),
  carry_dp_aa            = sqrt(12) * sd(rx_br),
  sharpe                 = sqrt(12) * mean(rx_br) / sd(rx_br),
  assimetria             = mean((rx_br - mean(rx_br))^3) / sd(rx_br)^3,
  pior_mes               = min(rx_br),
  t_beta_igual_1         = {f <- lm(ds_br ~ x_br); (coef(f)[[2]] - 1) / ep_robusto(f)[[2]]}) |>
  round(3)
```

```
diferencial_medio_aa depreciacao_media_aa       carry_medio_aa
               0.104                0.042                0.062
         carry_dp_aa               sharpe           assimetria
               0.131                0.477               -0.599
           pior_mes       t_beta_igual_1
              -0.181               -2.974
```

```python
bz = pd.concat([ler_fred(i) for i in ["EXBZUS", "IRSTCI01BRM156N", "FEDFUNDS"]],
               axis=1, join="inner").loc["1999-07":"2025-12"]
x_br  = ((bz.IRSTCI01BRM156N - bz.FEDFUNDS) / 1200).values[:-1]
ds_br = np.diff(np.log(bz.EXBZUS.values))
rx_br = x_br - ds_br
b, ep, _ = mqo(ds_br, x_br)
print(f"diferencial medio a.a. = {12 * x_br.mean():.2%}   depreciacao media a.a. = {12 * ds_br.
```

```
diferencial medio a.a. = 10.44%   depreciacao media a.a. = 4.19%
```

```
print(f"beta de Fama = {b[1]:.3f} (ep {ep[1]:.3f})   carry a.a. = {12 * rx_br.mean():.2%}   "
      f"sharpe = {np.sqrt(12) * rx_br.mean() / rx_br.std(ddof=1):.2f}")
```

```
beta de Fama = -0.876 (ep 0.631)   carry a.a. = 6.25%   sharpe = 0.48
```

```
# perdas concentradas: os 5 piores meses do carry em reais
piores = pd.Series(rx_br, index=bz.index[1:]).nsmallest(5)
print(piores.round(3))
```

```
data
2008-10-01   -0.181
2020-03-01   -0.115
2002-10-01   -0.110
2008-09-01   -0.102
2015-03-01   -0.099
dtype: float64
```

Entre 1999 e 2025, o diferencial médio entre a taxa overnight brasileira e o Fed Funds foi de 10,4% ao ano, mas o real se depreciou, em média, apenas 4,2% ao ano. A diferença — o retorno médio do *carry* em reais — foi de 6,2% ao ano, com índice de Sharpe de 0,48. O $\widehat{\beta}$ de Fama é negativo e $\beta = 1$ é rejeitado. E a assimetria negativa do retorno, com os piores meses concentrados em 2002 (eleição), 2008 (crise global), 2015 (crise fiscal) e 2020 (pandemia), é o "sobe de escada, desce de elevador" da seção sobre *carry trade*: o prêmio existe porque paga mal justamente nos piores estados do mundo. Quem lê o diferencial como "o mercado espera 10% de depreciação" erra o sinal da composição.

(c) Além da depreciação esperada, o diferencial de juros brasileiro incorpora: (i) **risco fiscal e soberano** — a probabilidade, ainda que pequena, de *default*, inflação ou repressão financeira sobre a dívida em reais; (ii) **risco de convertibilidade**, medido pela diferença entre o cupom cambial e o juro em dólares lá fora (Exercício 6); (iii) **liquidez** do mercado de NDF e de dólar futuro; (iv) **tributação** (IOF e imposto de renda sobre aplicações de não residentes); (v) **risco político**; (vi) a volatilidade dos **termos de troca** e a exposição a *commodities*, que fazem o real depreciar justamente em choques globais; (vii) as **intervenções do Banco Central**, que alteram a distribuição de retornos cambiais; e (viii) o **custo efetivo de financiamento em dólares**. Os itens (i) e (ii) são a ponte para a metade de dívida soberana do curso.

Referências

Abbas, S. Ali, Alex Pienkowski, e Kenneth Rogoff, org. 2019. *Sovereign Debt: A Guide for Economists and Practitioners*. Oxford University Press; International Monetary Fund.

Ardeni, Pier Giorgio, e Diego Lubian. 1991. "Is There Trend Reversion in Purchasing Power Parity?" *European Economic Review* 35 (5): 1035–55.

Balassa, Bela. 1964. "The Purchasing-Power Parity Doctrine: A Reappraisal". *Journal of Political Economy* 72 (6): 584–96.

Brunnermeier, Markus K., Stefan Nagel, e Lasse H. Pedersen. 2008. "Carry Trades and Currency Crashes". *NBER Macroeconomics Annual* 23: 313–47.

Cassel, Gustav. 1918. "Abnormal Deviations in International Exchanges". *The Economic Journal* 28 (112): 413–15.

Dickey, David A., e Wayne A. Fuller. 1979. "Distribution of the Estimators for Autoregressive Time Series with a Unit Root". *Journal of the American Statistical Association* 74 (366): 427–31.

Du, Wenxin, Alexander Tepper, e Adrien Verdelhan. 2018. "Deviations from Covered Interest Rate Parity". *The Journal of Finance* 73 (3): 915–57.

Edison, Hali J., Joseph E. Gagnon, e William R. Melick. 1997. "Understanding the Empirical Literature on Purchasing Power Parity: The Post-Bretton Woods Era". *Journal of International Money and Finance* 16 (1): 1–17.

Engel, Charles. 1996. "The Forward Discount Anomaly and the Risk Premium: A Survey of Recent Evidence". *Journal of Empirical Finance* 3 (2): 123–92.

Fama, Eugene F. 1984. "Forward and Spot Exchange Rates". *Journal of Monetary Economics* 14 (3): 319–38.

Frankel, Jeffrey A., e Andrew K. Rose. 1996. "A Panel Project on Purchasing Power Parity: Mean Reversion within and between Countries". *Journal of International Economics* 40 (1–2): 209–24.

Frenkel, Jacob A. 1978. "Purchasing Power Parity: Doctrinal Perspective and Evidence from the 1920s". *Journal of International Economics* 8 (2): 169–91.

Frenkel, Jacob A. 1981. "The Collapse of Purchasing Power Parities during the 1970's". *European Economic Review* 16 (1): 145–65.

Granger, Clive W. J., e Paul Newbold. 1974. "Spurious Regressions in Econometrics". *Journal of Econometrics* 2 (2): 111–20.

James, Jessica, Ian W. Marsh, e Lucio Sarno, org. 2012. *Handbook of Exchange Rates*. John Wiley & Sons.

Johansen, Søren. 1988. "Statistical Analysis of Cointegration Vectors". *Journal of Economic Dynamics and Control* 12 (2–3): 231–54.

Klau, Marc, e San Sau Fung. 2006. "The New BIS Effective Exchange Rate Indices". *BIS Quarterly Review*, 51–65.

Lustig, Hanno, Nikolai Roussanov, e Adrien Verdelhan. 2011. "Common Risk Factors in Currency Markets". *The Review of Financial Studies* 24 (11): 3731–77.

MacKinnon, James G. 1996. "Numerical Distribution Functions for Unit Root and Cointegration Tests". *Journal of Applied Econometrics* 11 (6): 601–18.

Mahdavi, Saeid, e Su Zhou. 1994. "Purchasing Power Parity in High-Inflation Countries: Further Evidence". *Journal of Macroeconomics* 16 (3): 403–22.

Rogoff, Kenneth. 1996. "The Purchasing Power Parity Puzzle". *Journal of Economic Literature* 34 (2): 647–68.

Samuelson, Paul A. 1964. "Theoretical Notes on Trade Problems". *The Review of Economics and Statistics* 46 (2): 145–54.

Sarno, Lucio, e Mark P. Taylor. 2002. *The Economics of Exchange Rates*. Cambridge University Press.

Shiller, Robert J., e Pierre Perron. 1985. "Testing the Random Walk Hypothesis: Power versus Frequency of Observation". *Economics Letters* 18 (4): 381–86.

Taylor, Mark P., David A. Peel, e Lucio Sarno. 2001. "Nonlinear Mean-Reversion in Real Exchange Rates: Toward a Solution to the Purchasing Power Parity Puzzles". *International Economic Review* 42 (4): 1015–42.

Verdelhan, Adrien. 2010. "A Habit-Based Explanation of the Exchange Rate Risk Premium". *The Journal of Finance* 65 (1): 123–46.